

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Metóda konečných prvkov v mechatronike I
Úvod do programu ANSYS

Vladimír Kutiš – Justín Murín – Juraj Paulech – Vladimír Goga

Bratislava
2013

© doc. Ing. Vladimír Kutiš, PhD.
prof. Ing. Justín Murín, DrSc.
Ing. Juraj Paulech, PhD.
Ing. Vladimír Goga, PhD.

Lektori: prof. Ing. Milan Žmindák, PhD.
doc. Ing. Milan Naď, PhD.
Ing. Rastislav Ďuriš, PhD.

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU, Bratislava,
Vazovova 5

ISBN XXXXXXXXXX

Obsah

1	Úvod	9
2	Metóda konečných prvkov	10
2.1	Cieľ kapitoly	10
2.2	Matematické modely	10
2.2.1	Silná forma	11
2.2.2	Slabá forma	12
2.2.3	Variačná forma	12
2.3	Prehľad numerických metód	13
2.3.1	Metóda konečných diferencií	14
2.3.2	Metóda váhových reziduí	14
2.3.3	Reyleigh-Ritzova metóda	15
2.4	Metóda konečných prvkov – teoretické základy	15
2.4.1	Diskretizácia oblasti	16
2.4.2	Tvarové funkcie	17
2.4.3	Prvkové rovnice	18
2.4.4	Výsledný systém MKP rovníc	21
3	ANSYS - moderný nástroj inžiniera	23
3.1	Cieľ kapitoly	23
3.2	Základná charakteristika programu ANSYS	23
3.3	ANSYS Classic	23
3.3.1	Main menu	25
3.3.2	Utility menu	26
3.3.3	Command line	27
3.3.4	Toolbar	27
3.4	Základné kroky tvorby modelu v ANSYS Classic	28
3.4.1	Preprocessor	28
3.4.2	Solution	45
3.4.3	General Postprocessor	51
3.4.4	Time History Postprocessor	60
3.5	Príklad tvorby modelu	62
4	Statická analýza nosníkových štruktúr	69
4.1	Cieľ kapitoly	69
4.2	Matematické modely nosníkov	69
4.3	Euler-Bernoulliho teória	70

4.3.1	Kinematické rovnice	70
4.3.2	Rovnice silovej rovnováhy	71
4.3.3	Konštitutívny zákon	72
4.4	MKP formulácia Euler-Bernoulliho 2D nosníka	72
4.5	Riešené príklady	73
4.5.1	Príklad 1 – votknutý nosník	74
4.5.2	Príklad 2 – mikronosníková konštrukcia	76
4.5.3	Príklad 3 – bimetalový pásik	80
5	Úlohy rovinnej napätosti a rovinnej deformácie	85
5.1	Cieľ kapitoly	85
5.2	Základné rovnice pružnosti	85
5.2.1	Rovnice silovej rovnováhy	85
5.2.2	Kinematické rovnice	88
5.2.3	Konštitutívne rovnice	88
5.3	Rovinné úlohy	91
5.3.1	Rovinná napätosť	91
5.3.2	Rovinné pretvorenie	92
5.4	Rovinné prvky	93
5.5	Riešené príklady	95
5.5.1	Príklad 1 – Mikroaktuátor	95
5.5.2	Príklad 2 – Profilová tyč	102
6	Statická analýza dosiek a škrupín	107
6.1	Cieľ kapitoly	107
6.2	Matematické modely dosiek	107
6.3	Kirchhoffov model dosky	108
6.3.1	Kinematické rovnice	108
6.3.2	Rovnice rovnováhy	109
6.3.3	Konštitutívny zákon	110
6.4	Riešené príklady	111
6.4.1	Príklad 1 – deformácia mikromembrány	111
6.4.2	Príklad 2 – analýza hliníkovej rúrky	118
7	Modálna analýza	124
7.1	Cieľ kapitoly	124
7.2	Matematický opis modálnej analýzy	124
7.3	Matica hmotnosti	126
7.4	Riešené príklady	126
7.4.1	Príklad 1 – modálna analýza votknutého nosníka	126
7.4.2	Príklad 2 – modálna analýza mikromembrány	128
8	Harmonická analýza	133
8.1	Cieľ kapitoly	133
8.2	Matematický opis harmonickej analýzy	133
8.3	Riešené príklady	135
8.3.1	Príklad 1 – harmonická analýza votknutého nosníka	135
8.3.2	Príklad 2 – harmonická analýza mikroakcelerometra	138

9	Prechodová analýza	144
9.1	Cieľ kapitoly	144
9.2	Matematický opis prechodovej analýzy	144
9.3	Metódy používané na časovú diskretizáciu	145
9.4	Riešené príklady	147
9.4.1	Príklad 1 – prechodová analýza votknutého nosníka s počiatočnou deformáciou	147
9.4.2	Príklad 2 – odozva membrány na skokovú zmenu tlaku	152
	Register	155
	Literatúra	158

Pod'akovanie

Táto učebnica vznikla vďaka podpore Kultúrnej a grantovej agentúry Ministerstva školstva SR (KEGA). Autori ďakujú agentúre za poskytnuté financie pridelené projektu č. 015STU-4/2012 pre Fakultu elektrotechniky a informatiky STU Bratislava.

Kapitola 1

Úvod

Metóda konečných prvkov (MKP) patrí medzi najrozšírenejšie numerické metódy, ktoré sa využívajú v inžinierskej praxi. Výhoda tejto metódy spočíva v jej univerzálnosti, t. j. táto metóda môže byť veľmi efektívne použitá pri riešení úloh mechaniky [2, 22, 17, 16, 4, 3, 15], termomechaniky [18, 13] aj pri riešení úloh elektromagnetizmu [10, 20], prúdenia [23, 7] a ďalších fyzikálnych javov alebo aj ich vzájomného previazania. Univerzálnosť tejto metódy nespočíva len v univerzálnosti riešenej úlohy z pohľadu fyzikálneho opisu, ale aj z pohľadu opisu geometrie danej úlohy – táto metóda nie je limitovaná na jednoduché oblasti, ale veľmi elegantne si poradí aj s komplikovanou geometriou. Spolu s možnosťou definovania nelineárneho materiálového správania pre rôzne typy úloh stavajú vyššie spomenuté vlastnosti túto metódu na popredné miesto medzi rôznymi numerickými metódami, ktoré našli široké uplatnenie v inžinierskej praxi. Práve v oblasti mechatroniky, ktorá spája rôzne vedné disciplíny, MKP vďaka svojej univerzálnosti nachádza stále širšie a širšie uplatnenie, a to najmä v oblasti multifyzikálneho modelovania s možnosťou prepojenia s riadením.

Táto publikácia vznikla na základe cvičení a prednášok z predmetu Metóda konečných prvkov v mechatronike pre študentov inžinierskeho študijného programu Aplikovaná mechatronika na Fakulte elektrotechniky a informatiky STU v Bratislave. Cieľom tejto publikácie je poskytnúť čitateľovi stručný prehľad teoretických základov MKP aj základný matematický opis jednotlivých typov úloh ako sú nosníkové úlohy, rovinné úlohy, doskové a škrupinové úlohy. Z pohľadu časovej závislosti zaťaženia sú prezentované problémy, ktoré vedú na riešenie stacionárnej, modálnej, harmonickej a prechodovej úlohy. Pri riešených príkladoch je dôraz kladený na riešenie mechatronických systémov z pohľadu mechaniky. Všetky problémy, ktoré sú v publikácii predstavené, sú riešené v MKP programe ANSYS. Úlohy sú riešené v ANSYS Classic (ďalej takisto označované ako AC) prostredí. Okrem grafického vytvárania jednotlivých modelov v AC je vždy prezentovaný aj príslušný príkaz, ktorý sa môže využiť pri písaní skriptov, čo výrazne zvyšuje efektivitu práce s programom ANSYS.

Zamýšľané voľné pokračovanie tejto publikácie bude zamerané na riešenie multifyzikálnych úloh, pričom pri riešení multifyzikálnych úloh sa bude využívať jednak prostredie ANSYS Classic i nové prostredie ANSYS Workbench (ďalej takisto označované ako AWB). Práve oboznámenie sa so syntaxou jednotlivých príkazov v prostredí AC umožňuje využiť AWB na riešenie nielen geometricky komplikovaných úloh, ale aj napr. zmenu implicitného nastavenia jednotlivých prvkov resp. definovanie materiálového modelu, ktorý síce AC má k dispozícii, ale AWB ho v grafickom prostredí nemá implementovaný.

Kapitola 2

Metóda konečných prvkov

2.1 Cieľ kapitoly

Cieľom tejto kapitoly je poskytnúť základný pohľad na matematické modely, ich formy a problémy, ktoré sa nimi riešia. Keďže samotný opis matematických modelov vedie na riešenie rovníc, ktoré nie sme schopní vo väčšine prípadov realizovať v analytickom tvare, na ich vyriešenie musia byť použité numerické metódy. Druhý cieľ tejto kapitoly je poskytnúť čitateľovi stručný náhľad do numerických metód, ktoré sa v inžinierskej praxi používajú najmä s dôrazom na metódu konečných prvkov.

2.2 Matematické modely

Matematické modely predstavujú matematický opis skúmaného deja, pričom forma zápisu matematického modelu môže byť rôzna. Existujú tri formy zápisu matematického modelu:

- diferenciálna forma matematického modelu – tzv. silná forma
- integrálna forma matematického modelu – tzv. slabá forma
- variačná forma matematického modelu – tzv. variačná forma

Jednotlivé formy matematického modelu nám neumožňujú jednoduchšie riešenie daného problému z pohľadu analytického riešenia, ale nám umožňujú použitie rôznych numerických metód. Inými slovami, každá numerická metóda využíva určitú formu matematického modelu, a ak chceme použiť príslušnú numerickú metódu, musí byť matematický model zapísaný v príslušnej matematickej forme.

Druhé veľmi užitočné delenie matematických modelov vyplýva z fyzikálnej podstaty riešeného problému:

- problém okrajových hodnôt – rieši sa tzv. stacionárny problém, t. j. cieľom je opísať napr. deformáciu systému v ustálenom stave. Pri takto definovanej úlohe musí byť jednoznačne definované správanie sa systému na okraji vyšetrovanej oblasti.
- problém počiatočných hodnôt – rieši sa tzv. prechodový problém hmotných bodov, t. j. cieľom je opísať napr. časovú zmenu polohy telesa, ktoré je idealizované ako hmotný bod. Pri takto definovanej úlohe musí byť jednoznačne definovaný počiatočný stav systému.

- problém okrajovo-počiatočných hodnôt – rieši sa tzv. prechodový problém telies, t. j. cieľom je opísať napr. časovú zmenu deformácie telesa, ktoré má geometrické rozmery. Pri takto definovanej úlohe musí byť jednoznačne definovaný počiatočný stav systému ako aj správanie sa systému na okraji vyšetrovanej oblasti počas vyšetřovaného času.
- problém vlastných čísel – cieľom je určiť vlastné frekvencie a vlastné tvary kmitania skúmaného systému. Pri probléme vlastných čísel do výpočtu nevstupuje záťaž ale iba geometrické väzby, t. j. musia byť predpísané okrajové podmienky vyšetřovaného systému.

Tretie, veľmi dôležité delenie matematických modelov, je delenie podľa geometrického zjednodušenia modelu:

- 0D – skúmaný 3D systém je z pohľadu vyšetřovaných veličín chápaný ako hmotný bod, t. j. nemá žiadne geometrické rozmery
- 1D – skúmaný 3D systém je modelovaný ako jednorozmerný, typický príklad je matematický model prúta alebo nosníka
- 2D – skúmaný 3D systém je modelovaný ako dvojrozmerný, typický príklad je matematický model membrány
- 3D – predstavuje najkomplexnejší geometrický opis skúmaného systému, pri ktorom sa uvažujú všetky tri dimenzie priestoru

Tieto tri hlavné delenia matematických modelov sa navzájom ovplyvňujú, napr. ak vyjadrujeme matematický model v tvare diferenciálnej rovnice a chceme pri modelovaní využiť 1D geometrické zjednodušenie, samotný tvar diferenciálnej rovnice (a teda aj typ diferenciálnej rovnice) bude závisieť od toho, či budeme riešiť problém okrajových hodnôt alebo okrajovo-počiatočných hodnôt.

2.2.1 Silná forma

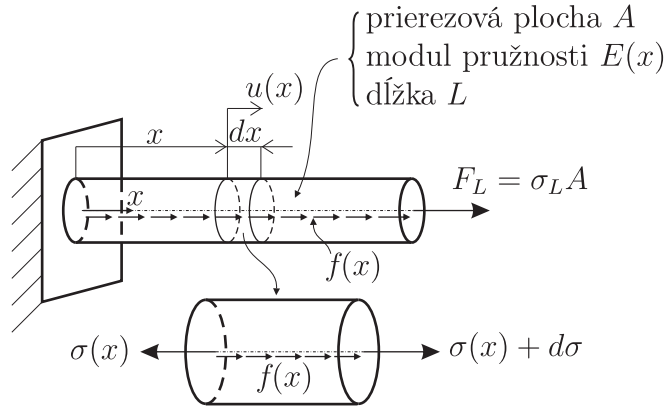
Pre inžiniera je najbližšia formulácia matematického modelu pomocou diferenciálnych rovníc (či už obyčajných diferenciálnych rovníc, parciálnych diferenciálnych rovníc alebo systému parciálnych diferenciálnych rovníc) [19, 9]. Takto zapísaný matematický model vyjadruje rovnováhu v každom bode skúmanej oblasti, preto sa nazýva silná forma matematického modelu. Ako príklad uvádzame 1D model prúta dĺžky L pre problém okrajových hodnôt, t. j. statická analýza prúta – obr. 2.1. Diferenciálna rovnica popisujúca tento systém má tvar

$$-\frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x) \quad (2.1)$$

a príslušné okrajové podmienky

$$u(x=0) = u_0 \quad (2.2)$$

$$\sigma(x=L) = E(x) \frac{du(x)}{dx} \Big|_L = \sigma_L = \frac{F_L}{A} \quad (2.3)$$



Obr. 2.1. 1D model prúta konštantného prierezu

Parameter $E(x)$ je modul pružnosti v ťahu, $u(x)$ je deformácia (posunutie) v bode x (nezávislú premennú polohy budeme označovať v teoretických výrazoch ako x a v súvislosti s programom ANSYS ako X) v smere osi x (pri prútoch žiadna iná deformácia nie je prípustná), $f(x)$ je spojitá objemová záťaž v mieste x v smere osi x a $\sigma(x)$ je osovú (normálové) napätie v mieste x . Vzťah medzi napätím $\sigma(x)$ a posunutím $u(x)$ je vyjadrený pomocou konštitutívneho zákona, ktorý sa nazýva Hookov zákon

$$\sigma(x) = E(x) \frac{du(x)}{dx} \quad (2.4)$$

2.2.2 Slabá forma

Slabá forma matematického modelu predstavuje tzv. váhovú integrálnu rovnicu, ktorá vznikne ako súčin rezidua príslušnej diferenciálnej rovnice a váhovej funkcie, ktorej bližšie špecifikovanie má zmysel až pri konkrétnej numerickej metóde [8]. Samotné reziduum je výraz, ktorý sa vytvorí z príslušnej diferenciálnej rovnice prenesením všetkých členov na jednu stranu, napr. pre rovnicu (2.1) má reziduum tvar

$$R(x) = \frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + f(x) \quad (2.5)$$

a príslušná váhová integrálna rovnica pre danú oblasť riešenia

$$\int_0^L R(x)w(x)dx = 0 \quad (2.6)$$

resp.

$$\int_0^L \left(\frac{d}{dx} \left(E(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + f(x) \right) w(x)dx = 0 \quad (2.7)$$

pri splnení príslušných okrajových podmienok. $w(x)$ predstavuje zvolenú váhovú funkciu. Zahnutie okrajových podmienok do rezidua je podrobnejšie vysvetlené v [12, 21].

2.2.3 Variačná forma

Pri variačnej forme matematického modelu sa pracuje s tzv. funkcionálom, ktorý z fyzikálneho hľadiska najčastejšie predstavuje celkovú energiu systému [14]. V rovnovážnom

stave pri splnení daných okrajových podmienok nadobúda tento funkcionál minimálnu hodnotu a proces hľadania minima funkcionálu sa nazýva variácia funkcionálu – odtiaľ pochádza aj názov tohto matematického modelu. Pre diferenciálnu rovnicu (2.1) s príslušnými okrajovými podmienkami (2.2) a (2.3) má variačný model tvar

$$I = \int_0^L \left(E(x) \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 - 2u(x)f(x) \right) dx + 2(-\sigma(x)u(x)) \Big|_L \quad (2.8)$$

pričom riešenie daného problému znamená nájsť takú funkciu $u(x)$, ktorá bude funkcionál (2.8) minimalizovať, čo sa zapisuje takto

$$\delta I(x, u(x), u'(x)) = 0 \quad (2.9)$$

kde δ predstavuje symbol prvej variácie funkcionálu (2.8) [11].

2.3 Prehľad numerických metód

Matematické metódy, bez ohľadu na formu zápisu matematického modelu, sú analyticky riešiteľné iba pre veľmi úzku skupinu problémov. Pre problémy, s ktorými sa inžinieri bežne stretávajú, nie je možné nájsť analytické riešenie, a preto je nevyhnuté použiť numerické metódy. Tento proces hľadania numerického riešenia pre danú úlohu sa tiež nazýva simulácia. Základný krok každej numerickej metódy spočíva v diskretizácii skúmanej oblasti (t. j. v rozdelení skúmanej oblasti na menšie podoblasti), pričom nemusí ísť len o geometrickú oblasť, ale aj o časovú oblasť. Okrem diskretizácie skúmanej oblasti je potrebné vykonať aj diskretizáciu príslušnej matematickej rovnice, čím sa zabezpečí prechod od danej formy matematického modelu k algebraickým rovniciam. Získanie algebraických rovníc, ktoré popisujú daný systém, je veľmi dôležité, lebo algebraické rovnice sa dajú veľmi efektívne riešiť pomocou počítača. To, akým spôsobom sa prechádza od príslušného matematického modelu k algebraickým rovniciam, definuje rozdiel medzi jednotlivými numerickými metódami.

Existuje veľké množstvo numerických metód, pričom niektoré sa v praxi presadili viac a niektoré menej. Rozšírenosť jednotlivých metód závisí jednak od vhodnosti metódy na riešenie daného problému z pohľadu fyziky (napr. pri problémoch prúdenia je dôležité, aby daná numerická metóda spĺňala podmienky zachovania pre jednotlivé fyzikálne veličiny, čo veľmi dobre spĺňa metóda konečných objemov) ako aj z historických dôvodov (napr. pri riešení problémov elektromagnetizmu sa dlhodobo používali metódy konečných diferencí a až v poslednej dobe sa začala veľmi úspešne presadzovať metóda konečných prvkov).

Jednotlivé numerické metódy sú priamo naviazané na určitú formu matematického modelu, t. j. na využitie danej numerickej metódy sa vyžaduje, aby matematický model bol zapísaný v príslušnej matematickej forme.

Medzi základné numerické metódy patria:

- metóda konečných diferencí (MKD)
- metóda váhových reziduí (MVR)
- metóda Reyleigh-Ritzova (RRM)

Avšak v praxi najväčšie uplatnenie našli metóda konečných prvkov (MKP) a metóda konečných objemov (MKO), na ktoré sa možno pozerať ako na určitým spôsobom modifikované a kombinované vyššie spomínané tri základné metódy.

2.3.1 Metóda konečných diferencií

Na využitie tejto metódy sa vyžaduje, aby matematický model bol zapísaný v silnej forme, t. j. priamo diferenciálnou rovnicou. Nejde tu o jednu metódu, ale o celú skupinu metód, kde hlavná myšlienka spočíva v pretransformovaní derivácií na diferencie (t. j. rozdiel funkčných hodnôt, napr. posunutí) v jednotlivých bodoch diskretizovanej oblasti, čím sa diferenciálna rovnica zmení na algebraickú rovnicu.

Z pohľadu mechaniky sa táto metóda používa najmä pri dynamických dejoch v kombinácii s MKP, pričom MKD sa využíva v časovej oblasti a MKP v geometrickej oblasti – pozri kapitolu 9, kde je filozofia tejto metódy naznačená.

Záujemcom o túto metódu dávame do pozornosti literatúru [9, 6].

2.3.2 Metóda váhových reziduí

Pod týmto označením sa opäť nerozumie iba jedna konkrétna metóda, ale ide o celú skupinu metód, ktoré vychádzajú z tzv. slabej formulácie matematického problému, pričom v závislosti od voľby váhovej funkcie sa ďalej delia napr. na kolakačnú metódu, metódu najmenších štvorcov, subdoménovú a Galerkinovu metódu. Práve posledná menovaná metóda má veľký význam, lebo MKP sa dá formulovať práve pomocou Galerkinovej metódy.

Hlavná myšlienka metódy váhových reziduí bude vysvetlená na príklade 1D modelu prúta a spočíva v nahradení hľadanej funkcie $u(x)$ (čo predstavuje napr. posunutie bodov prúta v smere jeho pozdĺžnej osi) súčtom polynómov (alebo iných funkcií, s ktorými sa ľahko realizujú základné matematické operácie, ako sú integrovanie a derivovanie) a vo výbere váhovej funkcie $w(x)$. Náhradné riešenie môže mať napr. takýto tvar

$$u(x) = a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + \dots + a_n\phi_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i\phi_i(x) \quad (2.10)$$

pričom polynómy $\phi_i(x)$ sú známe a volajú sa náhradné funkcie a parametre a_i sú neznáme, ktorých počet je n . Na to, aby sme výpočtom stanovili týchto n neznámych parametrov, potrebujeme, aby sa rovnica popisujúca daný problém, t. j. rovnica (2.6) resp. (2.7), rozpadla na n samostatných rovníc. To sa zabezpečí váhovou funkciou, ktorá na tento účel musí mať tvar

$$w(x) = b_1w_1(x) + b_2w_2(x) + b_3w_3(x) + \dots + b_nw_n(x) = \sum_{i=1}^n b_iw_i(x) \quad (2.11)$$

Parametre b_i v tomto vyjadrení nehrajú žiadnu úlohu a v konečnom dôsledku sa vo výsledných výrazoch nebudú vyskytovať, funkcie $w_i(x)$ definujú typ metódy. Napr. v Galerkinovej metóde sa za váhové funkcie volia náhradné funkcie, t. j. $w_i(x) = \phi_i(x)$, a teda rovnica (2.11) bude mať tvar

$$w(x) = b_1\phi_1(x) + b_2\phi_2(x) + b_3\phi_3(x) + \dots + b_n\phi_n(x) = \sum_{i=1}^n b_i\phi_i(x) \quad (2.12)$$

Dosadením rovníc (2.10) a (2.11) do rovnice (2.6) dostávame

$$\int_0^L \tilde{R}(a, x) \sum_{i=1}^n b_iw_i(x) dx = 0 \quad (2.13)$$

kde $\tilde{R}(a, x)$ vznikne z $R(x)$ dosadením rovnice (2.10). Rovnicu (2.13), ktorá predstavuje n súčtov, je možné rozdeliť na n samostatných rovníc

$$\begin{aligned} \int_0^L \tilde{R}(a, x)w_1(x)dx &= 0 \\ \int_0^L \tilde{R}(a, x)w_2(x)dx &= 0 \\ \int_0^L \tilde{R}(a, x)w_3(x)dx &= 0 \\ &\vdots \\ \int_0^L \tilde{R}(a, x)w_n(x)dx &= 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Vyriešením tohto systému dostávame n parametrov a_i a teda aj samotné náhradné riešenie (2.10). Ucelený prehľad metód váhových reziduí je možné nájsť v [8].

2.3.3 Reyleigh-Ritzova metóda

Táto numerická metóda využíva variačnú formuláciu matematického modelu (pre prút je to rovnica (2.8)). Riešenie $u(x)$ sa opäť predpokladá v tvare (2.10), pričom po dosadení náhradného riešenia do rovnice (2.8), sa funkcionál I zmení na funkciu I parametrov a_i . Tým variačný problém (t. j. problém hľadania funkcie tak, aby funkcionál nadobudol minimum) prechádza na problém minima funkcie (t. j. nájdenia takých parametrov a_i , ktoré minimalizujú funkciu) a samotné rovnice na určenie parametrov a_i majú tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_1} &= 0 \\ \frac{\partial I}{\partial a_2} &= 0 \\ \frac{\partial I}{\partial a_3} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial I}{\partial a_n} &= 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Pri voľbe rovnakých náhradných funkcií $\phi_i(x)$ ako pri Galerkinovej metóde, výpočtom dostávame rovnaké hodnoty a_i .

Takisto táto numerická metóda sa môže použiť pri odvádzaní rovníc metódy konečných prvkov.

2.4 Metóda konečných prvkov – teoretické základy

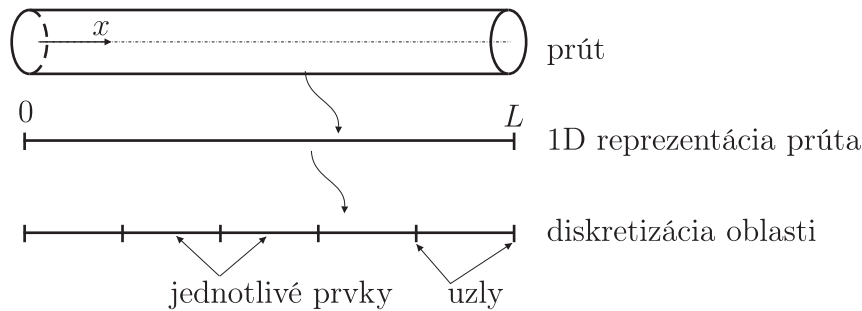
Na pochopenie, ako MKP funguje, bude v tejto časti ukázané teoretické odvodenie MKP rovníc pre prútový prvok konštantného prierezu, ktorého správanie je opísané pomocou diferenciálnej rovnice (2.1) s príslušnými okrajovými podmienkami (2.2) a (2.3).

2.4.1 Diskretizácia oblasti

Ako už bolo spomenuté vyššie, MKP vychádza buď z Galerkinovej metódy (t. j. metódy váhových reziduí) alebo z Reyleigh-Ritzovej metódy. Obe tieto metódy využívajú tzv. náhradné riešenie, t. j. predpokladajú riešenie v určitom tvare – rovnica (2.10), kde sú neznáme už len koeficienty a_i . Práve voľba náhradných funkcií môže pri týchto dvoch metódach spôsobovať určité problémy, lebo pri oboch metódach sa náhradné riešenie volí pre celú skúmanú oblasť. Teda ak náhradné funkcie sú polynómy, otázka je, ktorého stupňa majú byť, aby zachytili správanie sa skutočného riešenia.

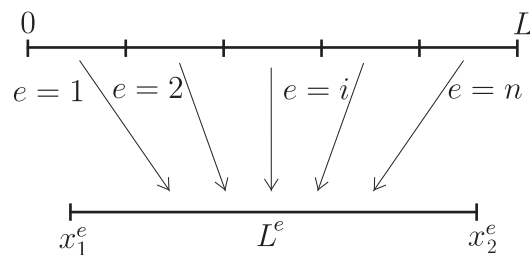
Práve tento problém sa pri MKP odstraňuje diskretizáciou skúmanej oblasti na menšie podoblasti – prvky, pričom náhradné riešenie sa definuje vždy len pre daný prvok. Veľkosť prvkov môže byť taká malá, že skutočné riešenie môže byť aproximované polynómom nízkeho stupňa, pričom najjednoduchší prípad nastane, keď tento polynóm bude predstavovať lineárnu funkciu.

Pôvodná oblasť skúmaného 1D prúta spolu s diskretizáciou je zobrazená na obr. 2.2. Základné rovnice MKP sa nemusia odvádzať pre každý prvok skúmanej oblasti samos-



Obr. 2.2. diskretizácia 1D oblasti

tatne, ale stačí toto odvodenie uskutočniť iba na jednom prvku, tzv. vzorovom – obr. 2.3, a výsledné rovnice sa použijú aj pre ostatné prvky danej oblasti. V ďalšom texte budeme



Obr. 2.3. Vzorový prvok pre celú oblasť

na odvodenie základných MKP rovníc pre prútový prvok používať Galerkinovu metódu, ktorá vychádza z váhového integrálneho modelu – rovnica (2.6). Tento integrál, ktorý popisuje celú skúmanú oblasť, môže byť prepísaný ako súčet n integrálov

$$\int_0^L R(x)w(x)dx = \int_0^L \sum_{e=1}^n R^e(x)w^e(x)dx = \sum_{e=1}^n \int_{x_1^e}^{x_2^e} R^e(x)w^e(x)dx = 0 \quad (2.16)$$

pričom táto rovnica môže byť rozdelená na n rovníc, kde každá rovnica popisuje jeden prvok

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} R^e(x)w^e(x)dx = 0 \quad \text{pre: } e = 1, \dots, n \quad (2.17)$$

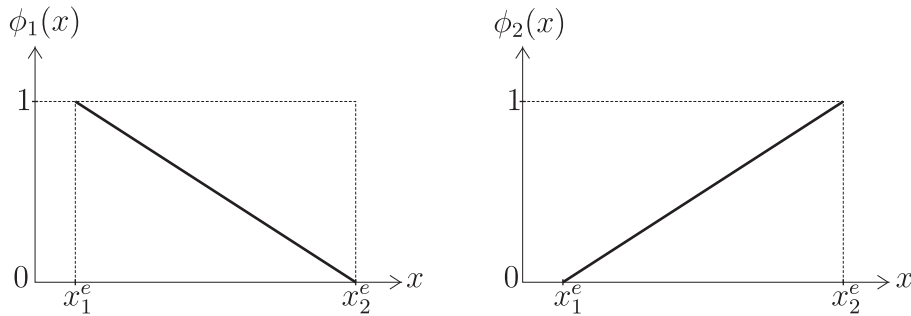
Vzorový prvok má súradnice uzlov x_1^e a x_2^e a dĺžka prvku je $L^e = x_2^e - x_1^e$.

2.4.2 Tvarové funkcie

Náhradné riešenie posunutia sa definuje iba pre daný prvok, všade inde je nulové. Najjednoduchšie prvkové náhradné riešenie $u^e(x)$ je lineárne (v takom prípade je prvok dvojuzlový), ktoré môže byť vyjadrené v tvare

$$u^e(x) = u_1^e\phi_1(x) + u_2^e\phi_2(x) \quad (2.18)$$

kde u_1^e a u_2^e sú hodnoty posunutí v oboch uzloch prvku, $\phi_1(x)$ a $\phi_2(x)$ sú tzv. tvarové funkcie, ktoré pre dvojuzlový prvok sú lineárne funkcie – pozri obr. 2.4.



Obr. 2.4. Lineárne 1D tvarové funkcie

Matematicky ich môžeme vyjadriť takto

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{x_2^e - x}{L^e} \\ \phi_2(x) &= \frac{x - x_1^e}{L^e} \end{aligned} \quad (2.19)$$

V ďalších krokoch pri odvádzaní prvkových rovníc sa objavujú aj prvé derivácie tvarových funkcií. Pre 1D lineárne tvarové funkcie (2.19) dostávame nasledovné derivácie

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1(x)}{dx} &= -\frac{1}{L^e} \\ \frac{d\phi_2(x)}{dx} &= \frac{1}{L^e} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Všeobecná vlastnosť tvarových funkcií je

$$\phi_i(x_k^e) = 1 \quad \text{pre: } k = i \quad (2.21)$$

$$\phi_i(x_k^e) = 0 \quad \text{pre: } k \neq i \quad (2.22)$$

Pre dvojuzlový prvok s tvarovými funkciami (2.19) to znamená

$$\phi_1(x_1^e) = 1 \quad \phi_1(x_2^e) = 0 \quad (2.23)$$

$$\phi_2(x_1^e) = 0 \quad \phi_2(x_2^e) = 1 \quad (2.24)$$

Keďže pri Galerkinovej metóde sa ako váhové funkcie využívajú funkcie použité pri náhradnom riešení, môžeme pre váhovú funkciu pre dvojuzlový prvok písať

$$w^e(x) = b_1^e \phi_1(x) + b_2^e \phi_2(x) \quad (2.25)$$

2.4.3 Prvkové rovnice

Formálnym dosadením náhradného prvkového riešenia (2.18) a váhovej funkcie (2.25) do prvkovej rovnice (2.17) dostávame

$$\int_{x_1^e}^{x_2^e} \tilde{R}^e(x) (b_1^e \phi_1(x) + b_2^e \phi_2(x)) dx = 0 \quad \text{pre: } e = 1, \dots, n \quad (2.26)$$

Túto rovnicu, ktorá popisuje prvkové správanie, je možné opäť rozdeliť na dve rovnice

$$\begin{aligned} \int_{x_1^e}^{x_2^e} \tilde{R}^e(x) \phi_1(x) dx &= 0 \\ \int_{x_1^e}^{x_2^e} \tilde{R}^e(x) \phi_2(x) dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dosadením prvkových reziduí do rovnice (2.27) a pri uvažovaní konštantných materiálových vlastností (t. j. $E(x) = E$), dostávame prvkové rovnice v tvare

$$\begin{aligned} \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(E \frac{d^2 u^e(x)}{dx^2} + f(x) \right) \phi_1(x) dx &= 0 \\ \int_{x_1^e}^{x_2^e} \left(E \frac{d^2 u^e(x)}{dx^2} + f(x) \right) \phi_2(x) dx &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

resp. po rozdelení integrálu

$$\begin{aligned} \int_{x_1^e}^{x_2^e} E \frac{d^2 u^e(x)}{dx^2} \phi_1(x) dx &= - \int_{x_1^e}^{x_2^e} f(x) \phi_1(x) dx \\ \int_{x_1^e}^{x_2^e} E \frac{d^2 u^e(x)}{dx^2} \phi_2(x) dx &= - \int_{x_1^e}^{x_2^e} f(x) \phi_2(x) dx \end{aligned} \quad (2.29)$$

Rovnice (2.28) resp. (2.29) obsahujú druhú deriváciu posunutí (t. j. $d^2 u^e(x)/dx^2$), čo zvyšuje požiadavky na náhradné riešenie a lineárna náhradná funkcia by bola neprípustná (druhá derivácia lineárnej funkcie je nula, čím by sa vynuloval celý člen). Avšak lineárne náhradné funkcie sú veľmi lákavé z pohľadu jednoduchosti práce s nimi, preto je potreba upraviť ľavú stranu rovnice (2.29) tak, aby obsahovala iba prvú deriváciu posunutí, čím sa znížia požiadavky na náhradné riešenie a lineárna náhradná funkcia bude prípustná.

Matematický postup, ktorý zabezpečí zníženie derivácie posunutí sa volá integrovanie per-partes a formálne pre funkcie $g(x)$ a $h(x)$ je ju možné zapísať takto

$$\int_0^L \frac{dg(x)}{dx} h(x) dx = g(x)h(x) \Big|_0^L - \int_0^L g(x) \frac{dh(x)}{dx} dx \quad (2.30)$$

Aplikovaním tohto postupu na ľavú stranu rovníc (2.29) môžeme túto časť rovníc prepísať takto

$$\begin{aligned} \int_{x_1^e}^{x_2^e} E \frac{d^2 u^e(x)}{dx^2} \phi_1(x) dx &= E \frac{du^e(x)}{dx} \phi_1(x) \Big|_{x_1^e}^{x_2^e} - \int_{x_1^e}^{x_2^e} E \frac{du^e(x)}{dx} \frac{d\phi_1(x)}{dx} dx \\ \int_{x_1^e}^{x_2^e} E \frac{d^2 u^e(x)}{dx^2} \phi_2(x) dx &= E \frac{du^e(x)}{dx} \phi_2(x) \Big|_{x_1^e}^{x_2^e} - \int_{x_1^e}^{x_2^e} E \frac{du^e(x)}{dx} \frac{d\phi_2(x)}{dx} dx \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dosadením výrazov (2.31) do ľavej strany (2.29) a úpravou dostávame prvkové rovnice v tvare

$$\begin{aligned} \int_{x_1^e}^{x_2^e} E \frac{du^e(x)}{dx} \frac{d\phi_1(x)}{dx} dx &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} f(x) \phi_1(x) dx + E \frac{du^e(x)}{dx} \phi_1(x) \Big|_{x_1^e}^{x_2^e} \\ \int_{x_1^e}^{x_2^e} E \frac{du^e(x)}{dx} \frac{d\phi_2(x)}{dx} dx &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} f(x) \phi_2(x) dx + E \frac{du^e(x)}{dx} \phi_2(x) \Big|_{x_1^e}^{x_2^e} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ľavá strana rovnice (2.32) môže byť upravená využitím rovnice popisujúcej náhradné riešenie $u^e(x)$ (2.18) takto

$$\begin{aligned} \int_{x_1^e}^{x_2^e} E \frac{du^e(x)}{dx} \frac{d\phi_1(x)}{dx} dx &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d\phi_1(x)}{dx} E \frac{d\phi_1(x)}{dx} dx u_1^e + \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d\phi_1(x)}{dx} E \frac{d\phi_2(x)}{dx} dx u_2^e \\ \int_{x_1^e}^{x_2^e} E \frac{du^e(x)}{dx} \frac{d\phi_2(x)}{dx} dx &= \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d\phi_2(x)}{dx} E \frac{d\phi_1(x)}{dx} dx u_1^e + \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d\phi_2(x)}{dx} E \frac{d\phi_2(x)}{dx} dx u_2^e \end{aligned} \quad (2.33)$$

kde výrazy pod integrálmi na pravej strane sú jednoznačne určené a môžu byť označené

$$K_{11}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d\phi_1(x)}{dx} E \frac{d\phi_1(x)}{dx} dx \quad K_{12}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d\phi_1(x)}{dx} E \frac{d\phi_2(x)}{dx} dx \quad (2.34)$$

$$K_{21}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d\phi_2(x)}{dx} E \frac{d\phi_1(x)}{dx} dx \quad K_{22}^e = \int_{x_1^e}^{x_2^e} \frac{d\phi_2(x)}{dx} E \frac{d\phi_2(x)}{dx} dx \quad (2.35)$$

Ak do vzťahov (2.34) a (2.35) dosadíme derivácie tvarových rovníc (2.20) a vykonáme integráciu v daných hraniciach, potom pre jednotlivé členy K_{ij}^e môžeme písať

$$K_{11}^e = \frac{E}{L^e} \quad K_{12}^e = -\frac{E}{L^e} \quad (2.36)$$

$$K_{21}^e = -\frac{E}{L^e} \quad K_{22}^e = \frac{E}{L^e} \quad (2.37)$$

Prvý člen na pravej strane rovníc (2.32) je definovaním spojitej záťaže $f(x)$ jednoznačne určený, preto môžeme použiť nasledujúce označenie

$$\begin{aligned} \int_{x_1^e}^{x_2^e} f(x)\phi_1(x)dx &= f_1^e \\ \int_{x_1^e}^{x_2^e} f(x)\phi_2(x)dx &= f_2^e \end{aligned} \quad (2.38)$$

Využitím rovníc (2.23) a (2.24) môže byť druhý člen na pravej strane rovníc (2.32) upravený a označený takto

$$\begin{aligned} E \frac{du^e(x)}{dx} \phi_1(x) \Big|_{x_1^e}^{x_2^e} &= -E \frac{du^e(x)}{dx} \Big|_{x_1^e} = -\sigma(x_1^e) \\ E \frac{du^e(x)}{dx} \phi_2(x) \Big|_{x_1^e}^{x_2^e} &= E \frac{du^e(x)}{dx} \Big|_{x_2^e} = \sigma(x_2^e) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Neznáme hodnoty $-\sigma(x_1^e)$ a $\sigma(x_2^e)$ predstavujú okrajové podmienky pre daný prvok e a ich eliminácia sa uskutoční až pri vytváraní výsledného MKP systému rovníc, kde sa prepoja jednotlivé prvkové rovnice.

Využitím zadaného označenia v rovniciach (2.34), (2.35), (2.38) a (2.39) môžu byť prvkové rovnice dvojuzlového prvku (2.32) prepísané na tvar

$$\begin{aligned} K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e &= f_1^e - \sigma(x_1^e) \\ K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e &= f_2^e + \sigma(x_2^e) \end{aligned} \quad (2.40)$$

alebo pomocou maticového zápisu

$$\begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e - \sigma(x_1^e) \\ f_2^e + \sigma(x_2^e) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

resp.

$$\frac{E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^e - \sigma(x_1^e) \\ f_2^e + \sigma(x_2^e) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

V kompaktnom maticovom zápise môžeme písať

$$\mathbf{K}^e \mathbf{x}^e = \mathbf{F}^e \quad (2.43)$$

Maticu \mathbf{K}^e nazývame matica tuhosti prvku, pričom pri 1D prvkoch sa zaužíval pojem lokálna matica tuhosti prvku, lebo pri 1D prvkoch je táto matica písaná v lokálnom súradnicovom systéme, zatiaľ čo pri ostatných typoch prvkov sa matica tuhosti prvku spravidla vyjadruje v globálnom súradnicovom systéme. Vektor \mathbf{x}^e sa nazýva vektor prvkových neznámych alebo vektor prvkových posunutí (aj keď pri niektorých typoch prvkov obsahuje aj rotácie) a \mathbf{F}^e sa nazýva vektor prvkového zaťaženia alebo vektor prvkových síl.

Ďalší dôsledok použitia Galerkinovej formulácie (t. j. použitia tvarových funkcií ako váhových) a zároveň vykonanie integrovania per-partes je, že výsledný systém prvkových rovníc je symetrický. Táto vlastnosť sa následne prenáša aj na výsledný systém MKP rovníc celého riešeného problému, čo sa s výhodou využíva pri programovom spracovaní MKP.

2.4.4 Výsledný systém MKP rovníc

Zostavenie výsledných MKP rovníc predstavuje spätné spojenie jednotlivých prvkových rovníc, čo je naznačené v rovnici (2.16) a pre spojenie n maticových rovníc (2.41) môžeme písať

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11}^3 & K_{12}^3 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{11}^n & K_{12}^n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{21}^n & K_{22}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ \vdots \\ u_1^n \\ u_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 - \sigma(x_1^1) \\ f_2^1 + \sigma(x_2^1) \\ f_1^2 - \sigma(x_1^2) \\ f_2^2 + \sigma(x_2^2) \\ f_1^3 - \sigma(x_1^3) \\ f_2^3 + \sigma(x_2^3) \\ \vdots \\ f_1^n - \sigma(x_1^n) \\ f_2^n + \sigma(x_2^n) \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Zároveň musí platiť podmienka kompatibility posunutí na hraniciach prvkov, t. j. musí platiť napr. pre spojenie prvku 1 a 2 $u_2^1 = u_1^2$, alebo vyjadrené všeobecne pre jednoduché spojenie prvkov, t. j. spojenie vždy iba dvoch susedných prvkov i a $i + 1$ $u_2^i = u_1^{i+1}$. Táto podmienka aplikovaná na rovnicu (2.44) predstavuje riadkovú redukciu systému. Zároveň táto podmienka ovplyvňuje aj náhradné riešenie, čo spätne ovplyvňuje aj váhové funkcie. Ovplyvnenie váhových funkcií podmienkou kompatibility posunutí sa prejaví na rovnici (2.44) stĺpcovou redukciu systému. Takže výsledný systém po zahrnutí podmienky kompatibility posunutí na hranici medzi jednotlivými prvkami má tvar

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 & & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 + K_{11}^4 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{22}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - \sigma(x_1^1) \\ f_2 + \sigma(x_2^1) - \sigma(x_1^2) \\ f_3 + \sigma(x_2^2) - \sigma(x_1^3) \\ f_4 + \sigma(x_2^3) - \sigma(x_1^4) \\ \vdots \\ f_n + \sigma(x_2^n) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

pričom sa použilo nové indexové označenie uzlov a spojitých zapažení, kde index pri uzle vyjadruje tzv. globálne číslo uzla (napr. $u_2 = u_2^1 = u_1^2$) a pri spojitých zapaženiach sa ich súčet označuje indexom uzla, kde toto zapaženie pôsobí, resp. je pretransformované (napr. $f_2 = f_2^1 + f_1^2$).

V rovnici (2.45) stále vystupujú veličiny, ktoré sú definované rovnicou (2.39) a o ktorých sme prehlásili, že predstavujú okrajové podmienky daného prvku. Zlúčením príslušných riadkov sa na pravej strane v jednom riadku objavili výrazy ako napr. $\sigma(x_2^1) - \sigma(x_1^2)$, čo vo všeobecnosti môžeme zapísať v tvare $\sigma(x_2^i) - \sigma(x_1^{i+1})$ pre $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Tento výraz predstavuje možnú skokovú zmenu napätia (a aj osových síl, ak by sme celú rovnicu vynásobili plochou A) v závislosti od vonkajšieho zapaženia v mieste spojenia prvku i a $i + 1$, t. j. v uzle s globálnym označením $i + 1$. Tvrdenie, že ide o skokovú zmenu osových síl je platné napriek tomu, že napr. výraz $\sigma(x_2^1) - \sigma(x_1^2)$ predstavuje rozdiel napätia v mieste uzla 2 z pohľadu prvého a druhého prvku, lebo oba prvky majú rovnaký prierez A (táto úloha bola definovaná s konštantným prierezom A), a preto môžeme pracovať aj s napätiami. Ak teda v uzle $i + 1$ nepôsobí žiadna diskretná osová sila, potom výraz $\sigma(x_2^i) - \sigma(x_1^{i+1})$ sa musí rovnať nule, t. j. napätia v tomto uzle zľava a sprava sa musia

rovnať – nie je tu žiadna skoková zmena napätia. Ak však v uzle $i + 1$ pôsobí vonkajšia sila F_{i+1} , potom výraz $\sigma(x_2^i) - \sigma(x_1^{i+1})$ sa musí rovnať F_{i+1}/A , t. j. v tomto uzle je skoková zmena napätia rovná výrazu F_{i+1}/A . Teda všeobecne môžeme rovnicu (2.45) prepísať na tvar

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 & & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 + K_{11}^4 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{22}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + F_1/A \\ f_2 + F_2/A \\ f_3 + F_3/A \\ f_4 + F_4/A \\ \vdots \\ f_n + F_n/A \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

V maticovom tvare táto rovnica môže byť zapísaná v tvare

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (2.47)$$

Matica \mathbf{K} sa nazýva matica tuhosti celého systému, vektor \mathbf{x} sa nazýva vektor neznámych systému resp. vektor posunutí systému a vektor \mathbf{F} sa nazýva vektor zaťaženia systému. Rovnica (2.46) predstavuje všeobecný tvar MKP rovníc, do ktorého je potrebné ešte vložiť okrajové podmienky riešeného príkladu. Ak napr. okrajové podmienky sú v zhode s rovnicami (2.2) a (2.3), t. j. úloha má definované spojité (objemové) zaťaženie $f(x)$ v smere osi x , v bode 0 (t. j. ľavý koniec prúta) je predpísané posunutie u_0 a v bode L (t. j. pravý koniec prúta) je predpísaná sila F_L a v žiadnom inom vnútornom bode nie je žiadna diskretná sila, potom výsledný systém MKP rovníc tohto príkladu má tvar

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 & & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 & & 0 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 + K_{11}^4 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{22}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + F_1/A \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_n + F_L/A \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Vyriešením tohto algebraického systému rovníc dostávame hodnoty $u_2, u_3, u_4, \dots, u_n$ a reakciu vo väzbe, t. j. silu F_1 .

Ak by sa uvažovalo aj so zotrvačnými a tlmiacimi silami, výsledný maticový zápis MKP rovníc by vyzeral takto

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.49)$$

kde \mathbf{M} je matica hmotnosti, \mathbf{B} je matica tlmenia, \mathbf{K} je matica tuhosti, $\mathbf{F}(t)$ je vektor uzlového zaťaženia, $\mathbf{x}(t)$ je vektor uzlových posunutí, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ je vektor uzlových rýchlostí a $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ je vektor uzlových zrýchlení celého MKP modelu. Spôsoby riešenia tejto rovnice sú v krátkosti naznačené v kapitole 9.

Kapitola 3

ANSYS - moderný nástroj inžiniera

3.1 Cieľ kapitoly

Cieľom tejto kapitoly je v krátkosti predstaviť program ANSYS Classic, jeho jednotlivé moduly, pričom dôraz bude kladený na opis základných funkcií z pohľadu riešenia problémov mechaniky. V závere tejto kapitoly bude riešený príklad, ktorý bude neskôr slúžiť ako vzor pre realizáciu jednotlivých krokov pri vytváraní modelu a realizácii simulácie.

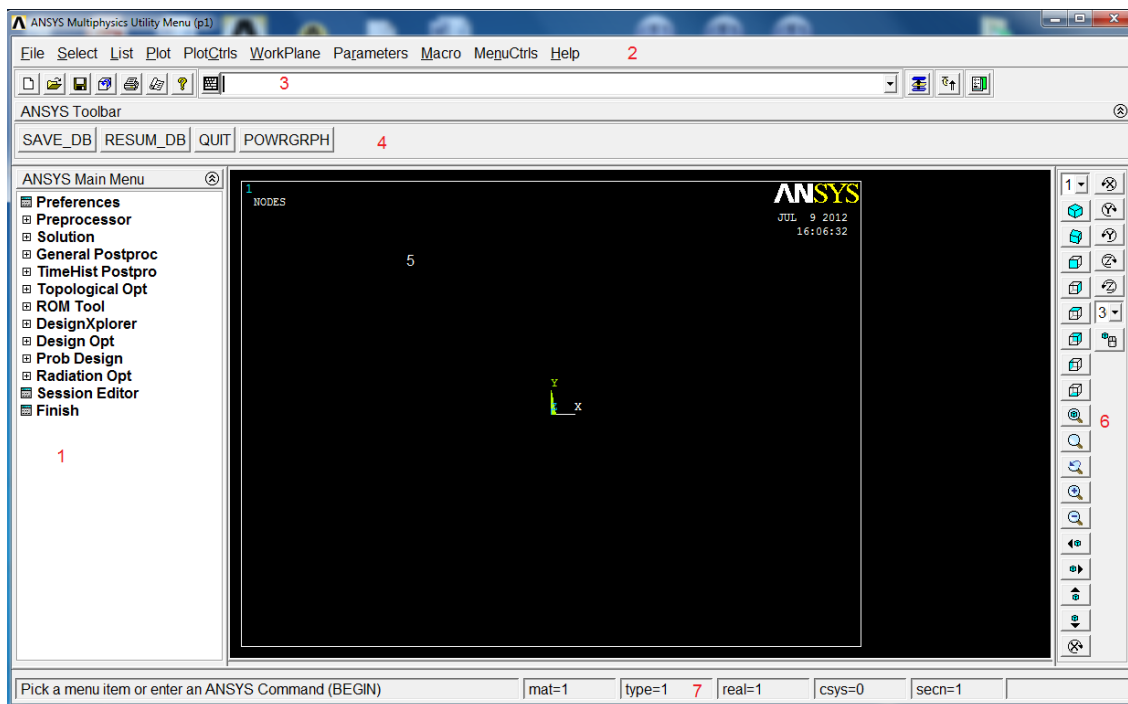
3.2 Základná charakteristika programu ANSYS

Pod pojmom ANSYS v súčasnosti musíme chápať celý programový balík od firmy ANSYS, Inc., ktorý v sebe zahŕňa celý rad špecializovaných nástrojov, ktoré slúžia buď na riešenie inžinierskych problémov, alebo ako podpora pri riešení týchto problémov. Typický príklad podporných programov sú nástroje na vytváranie sietí konečných prvkov alebo konečných objemov – nástroj ICEM CFD. Výsledkom práce s takýmto nástrojom nie je realizácia žiadnej simulácie, ale výsledkom je vytvorenie napr. siete konečných objemov, ktorá bude následne využitá pri CFD analýze prúdenia. Typickým príkladom programu na simuláciu inžinierskych úloh je softvér ANSYS CFX, ktorý predstavuje nástroj na modelovanie a simuláciu úloh z oblasti prúdenia.

V našom ďalšom výklade sa zameriame na opis jedného z dvoch základných grafických rozhraní (ďalej tiež GUI – Graphic User Interface) a to už spomenutého ANSYS Classic (AC). Druhé základné grafické rozhranie – ANSYS Workbench (AWB), bude predstavené v pokračovaní tejto publikácie, ktorá bude zameraná na simuláciu multifyzikálnych úloh. Táto publikácia kladie dôraz najmä na opis funkcií využívaných pri problémoch mechaniky.

3.3 ANSYS Classic

Pod pojmom ANSYS Classic sa vo všeobecnosti rozumie pôvodné grafické rozhranie programu ANSYS, ktorý sa takisto nazýva ANSYS APDL. Skratka APDL predstavuje ANSYS Parametric Design Language a predstavuje unikátny skriptovací jazyk, ktorý poskytuje skúsenému užívateľovi veľmi silný nástroj na ovládanie samotného programu. Druhý spôsob, ktorý sa používa pri komunikácii s AC je GUI – obr. 3.1.



Obr. 3.1. Základné GUI rozhranie programu ANSYS Classic

Základné grafické rozhranie možno rozdeliť na 7 častí:

1. ANSYS Main menu – predstavuje základnú GUI voľbu užívateľa, či pracuje na vytváraní modelu, nastavovaní parametrov riešiča alebo analyzuje dosiahnuté výsledky;
2. ANSYS Utility menu – táto časť GUI rozhrania zahŕňa široký rozsah nástrojov počínajúc prácou so súborami, správou dát daného modelu, nastavovaním grafických parametrov rozhrania a končiac prácou s helpom;
3. ANSYS Command line – predstavuje alternatívu zadania požadovaného príkazu, pričom pre skúsenejšieho užívateľa je často tento spôsob zadefinovania príkazu rýchlejší a aj pohodlnejší;
4. ANSYS Toolbar – v tejto časti GUI si užívateľ môže vytvoriť tlačidlá s odkazmi na často používané príkazy, čím si zefektívni prácu;
5. ANSYS Graphic window – je to základné grafické okno, v ktorom interaktívne ANSYS zobrazuje vykonanie jednotlivých požiadaviek užívateľa;
6. ANSYS View menu – pomocou príkazov v tomto okne užívateľ rotuje, posúva a zväčšuje objekty v Graphic window;
7. ANSYS Status line – v tejto časti GUI ANSYS upozorňuje užívateľa napr. na zapnutý aktívny súradnicový systém, alebo na aktívny typ prvku apod. a poskytuje krátke inštrukcie k zvoleným príkazom.

Okrem týchto 7 grafických častí je súčasťou ANSYS Classicu aj tzv. Output okno (tiež nazývané výstupné okno), ktoré je zobrazené na obr. 3.2. Toto Output okno dáva uží-

```

ANSYS 13.0 Output Window
***** ANSYS ANALYSIS DEFINITION <PREP?> *****
ENTER /SHOW_DEVICE-NAME TO ENABLE GRAPHIC DISPLAY
ENTER FINISH TO LEAVE PREP?
PRINTOUT KEY SET TO /GOPR (USE /NOPR TO SUPPRESS)

ELEMENT TYPE      1 IS PLANE182      2-D 4-NODE PLANE STRS SOLID
KEYOPT( 1- 6)=    0      0      0      0      0      0
KEYOPT( 7-12)=    0      0      0      0      0      0
KEYOPT(13-18)=    0      0      0      0      0      0

CURRENT NODAL DOF SET IS UX  UY
TWO-DIMENSIONAL MODEL

ELEMENT TYPE      1 IS PLANE182      2-D 4-NODE PLANE STRS SOLID
KEYOPT( 1- 6)=    0      0      0      0      0      0
KEYOPT( 7-12)=    0      0      0      0      0      0
KEYOPT(13-18)=    0      0      0      0      0      0

CURRENT NODAL DOF SET IS UX  UY
TWO-DIMENSIONAL MODEL

ELEMENT TYPE      1 IS PLANE182      2-D 4-NODE PLANE STRS SOLID
KEYOPT( 1- 6)=    0      0      0      0      0      0
KEYOPT( 7-12)=    0      0      0      0      0      0
KEYOPT(13-18)=    0      0      0      0      0      0

CURRENT NODAL DOF SET IS UX  UY
TWO-DIMENSIONAL MODEL

ELEMENT TYPE      1 IS PLANE182      2-D 4-NODE PLANE STRS SOLID
KEYOPT( 1- 6)=    0      0      0      0      0      0

```

Obr. 3.2. Output okno programu ANSYS Classic

vateľovi informáciu o tom, čo presne ANSYS vykonal, resp. v tomto okne sa zobrazujú napr. chybové hlášky, výpisy výsledkov atď. Obsah tohto okna môže byť presmerovaný do súboru.

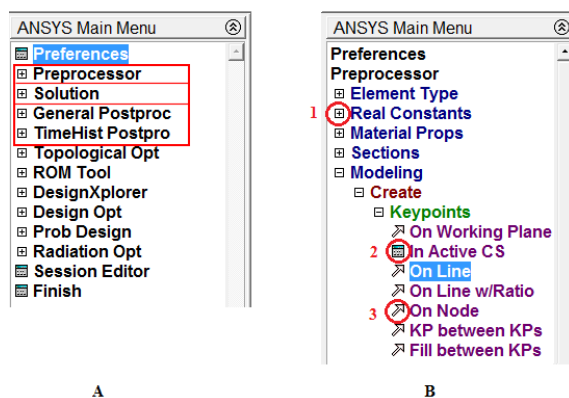
Pre prácu v grafickom režime sú obe tieto okná potrebné a zavretie jedného z nich spôsobí ukončenie práce s programom AC.

V ďalšej časti tejto kapitoly budú v krátkosti opísané vybrané bloky grafického rozhrania, pričom dôraz bude kladený najmä na tie príkazy, ktoré sú z pohľadu tvorby modelu nevyhnutné. Ostatné príkazy v danom grafickom bloku budú postupne vysvetľované v rámci riešenia jednotlivých úloh.

3.3.1 Main menu

Pri vytváraní modelu v AC sú v Main menu najdôležitejšie tieto tri fázy – obr. 3.3A:

1. Preprocessor – slúži na definovanie typu elementov, reálnych konštánt resp. prierezových charakteristík aj materiálových modelov a vlastností, ktoré budú v modeli použité, ale takisto na tvorbu, resp. import geometrie modelu a samotné sieťovanie – diskretizáciu geometrického modelu na konečné prvky;
2. Solution – slúži na definovanie typu analýzy spolu s nastavením parametrov danej analýzy ako aj na definovanie okrajových a počiatočných podmienok, t. j. z pohľadu mechaniky väzieb a záťaží, súčasťou tejto fázy v Main menu je aj samotné spustenie analýzy;
3. Postprocessor – slúži na prezeranie a analyzovanie dosiahnutých výsledkov. Ako je vidno už aj z obr. 3.3A, táto časť obsahuje dve položky:
 - General Postprocessor – slúži na zobrazovanie výsledkov na skúmanej geometrickej oblasti v určitom konkrétnom časovom okamihu
 - TimeHistory Postprocessor – slúži na zobrazovanie výsledkov v určitom konkrétnom mieste ako funkcia času, t. j. tento typ postprocesoru má najväčší význam pri analyzovaní výsledkov dynamických dejov



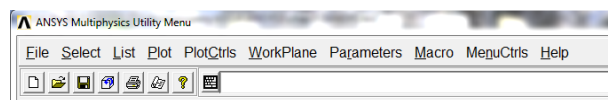
Obr. 3.3. Základný opis Main menu

Na obr. 3.3B sú naznačené tri možnosti, s ktorými sa užívateľ môže stretnúť v Main menu:

1. krížik označuje menu, ktoré možno ďalej rozbaľiť,
2. obdĺžnik naznačuje, že po aktivovaní takejto položky sa objaví dialógové okno, ktoré treba vyplniť, z pohľadu GUI ide o príkaz tabuľkového typu,
3. šípka označuje úkon, ktorý sa bude ďalej realizovať vo forme grafického výberu entity v Graphic window, z pohľadu GUI ide o príkaz výberového typu.

3.3.2 Utility menu

Základná ponuka Utility menu je zobrazená na obr. 3.4.



Obr. 3.4. Základná ponuka Utility menu

Stručný opis jednotlivých položiek Utility menu:

- File – v tejto položke možno uložiť rozpracovanú úlohu do databázy (prípona db), otvoriť už uloženú databázu, vyčistiť databázu, importovať geometriu, načítať skript, presmerovať výstup a iné operácie so súbormi
- Select – umožňuje z aktívneho modelu vyberať (selektovať) jednotlivé entity, ako sú uzly, prvky, keypointy, body, čiary, plochy a objemy podľa rôznych kritérií, ako aj vytváranie z jednotlivých vyselektovaných častí komponenty a zostavy a spravovanie týchto komponentov a zostáv
- List – slúži na textové zobrazenie informácie o rôznych parametroch modelu, ako sú uzly, prvky, keypointy atď., ale aj informácie o definovanej záťaži, použitých typoch prvkov a materiáloch ako aj ďalšie informácie
- Plot – táto položka zobrazuje informácie ako v položke List ale v grafickej podobe, t. j. vykresľuje uzly, prvky, keypointy atď. v Graphic window

- PlotCtrls – umožňuje detailné nastavenie správanie sa grafického rozhrania, ako aj presmerovanie grafických výstupov do súborov a podobne
- WorkPlane – táto časť Utility Menu sa zaoberá správou súradnicových systémov vrátane WorkPlane-u, čo je špeciálny súradnicový systém
- Parameters – v tejto časti možno definovať skalárne, vektorové aj tenzorové (vo forme matice) parametre, a to jednak užívateľom, alebo na základe určitých predpisov ako výstup z postprocesora
- Macro – umožňuje vytvárať skripty (makrá), ktoré možno opakovane veľmi efektívne používať
- MenuCtrls – v tejto časti možno upraviť vzhľad základného GUI
- Help – zabezpečuje prístup k všetkým manuálom programu ANSYS

3.3.3 Command line

Command line je možné využívať v kooperácii s grafickým výberom jednotlivých príkazov, (t. j. je možná kombinácia príkazov zadanych cez GUI a príkazov zadanych cez príkazový riadok) ale je možné tento príkazový riadok použiť aj na spustenie celého makra napísaného v samostatnom textovom súbore.

Ako príklad uvádzame príkaz na vykreslenie všetkých aktívnych čiar (t. j. čiar, ktoré sú v prípade použitia selektácie vo výbere). Príkaz má štruktúru

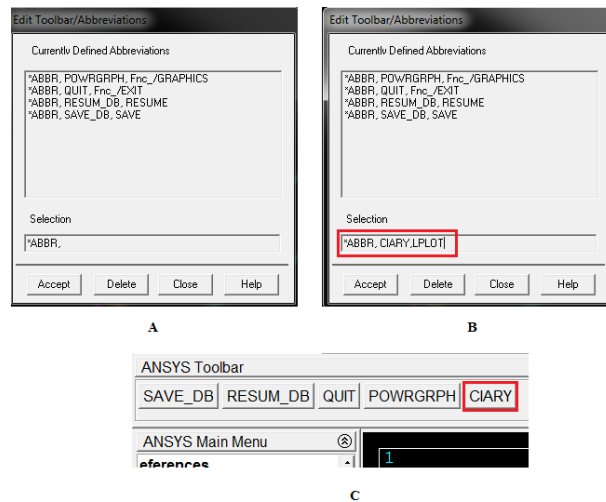
L PLOT,NL1,NL2,NINC

príčom *NL1* predstavuje číslo čiary, ktorá predstavuje spodnú číselnú hranicu vykresľovaných čiar, *NL2* predstavuje hornú číselnú hranicu vykresľovaných čiar a *NINC* predstavuje krok, ktorý bude použitý pri definovaní čísel čiar určených na vykreslenie. Teda ak chceme vykresliť napr. všetky čiary s číselným označením od 6 do 12, tak príkaz bude mať tvar *L PLOT,6,12*, ak chcem z tohto rozsahu vykresliť iba každú druhú čiaru, tak príkaz bude mať tvar *L PLOT,6,12,2* a v prípade použitia príkazu bez parametrov, t. j. iba *L PLOT*, tak sa nám vykreslia všetky aktívne čiary.

Takúto syntax má v podstate každý príkaz v programe ANSYS. Treba si ale uvedomiť, že nie každý textový príkaz má aj svoj grafický ekvivalent, napr. príkaz na vytvorenie cyklu **DO* a ukončenie cyklu **ENDDO* by sme v GUI hľadali márne. Je ho možné použiť iba v makre, kde sa využívajú textové príkazy.

3.3.4 Toolbar

Položka Toolbar nám slúži na rýchlejšiu prácu cez GUI. Zadefinovanie nového tlačidla si ukážeme na príkaze *L PLOT*. Definovanie príkazov, ktoré chceme mať prístupné v ponuke Toolbar sa nastavuje v položke Utility Menu → MenuCtrls → Edit Toolbar. Po aktivovaní tejto položky sa nám zobrazí menu – obr. 3.5A. Do položky Selection, kde už je automaticky uvedené **ABBR*, doplníme výraz *CIARY,L PLOT* – obr. 3.5B. Po stlačení Accept sa v položke Toolbar objaví nové tlačidlo *CIARY* – obr. 3.5C, ktorý funguje rovnako, ako keby sme napísali do príkazového riadku príkaz *L PLOT*.



Obr. 3.5. Definovanie nových položiek v Toolbare

3.4 Základné kroky tvorby modelu v ANSYS Classic

Ako už bolo spomínané, jednotlivé kroky pri tvorbe a analýze modelu v AC možno rozdeliť do troch základných blokov: Preprocessor, Solution, Postprocessor. V nasledujúcej časti budú tieto kroky opísané v takej miere, aby čitateľ získal prehľad o krokoch, potrebných k vykonaniu analýzy. V kapitole 3.5 bude ukázané použitie týchto príkazov na jednoduchom príklade.

3.4.1 Preprocessor

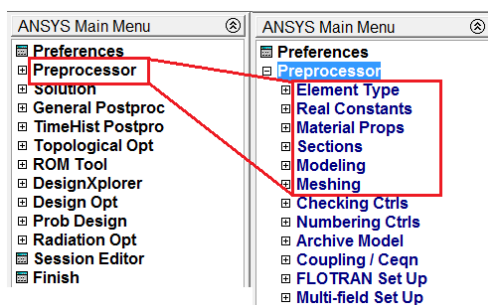
Základnú prácu v Preprocessore možno rozdeliť do týchto 5 bodov – obr. 3.6:

1. Element Type – definovanie typov prvkov, ktoré budú použité pri tvorbe modelu;
2. Real Constants a Sections – slúžia na definovanie prierezových charakteristík pre vybrané typy prvkov;
3. Material Props – umožňuje definovať materiálové modely a im prislúchajúce materiálové vlastnosti, ktoré budú použité v modeli;
4. Modeling – slúži na tvorbu geometrie modelu;
5. Meshing – umožňuje rozdeliť (tiež sa používa názov vysieťovať) geometriu na sieť konečných prvkov.

Použitie písaných príkazov z fázy Preprocessor si vyžaduje aktivovanie tejto fázy, čo sa realizuje príkazom */PREP7*. Pri práci s GUI je tento príkaz aktivovaný automaticky pri otvorení položky Preprocessor.

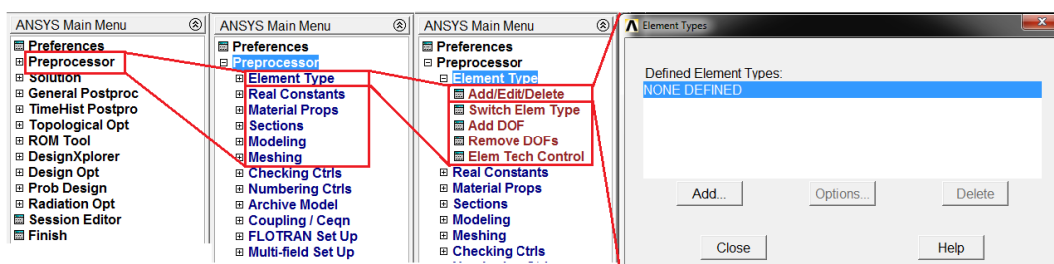
Element Type

Aby bol užívateľ schopný korektne vybrať vhodné typy prvkov, ktoré budú použité pri tvorbe modelu, musí jednoznačne vedieť definovať úlohu, ktorú ide riešiť, t. j. nielen to, či ide o problém mechaniky, tepla, previazaný problém elektro-tepelno-mechanický atď.,



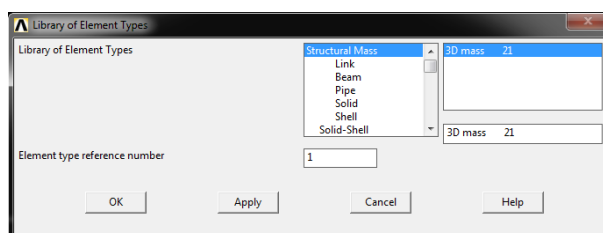
Obr. 3.6. Základné kroky v Preprocessore

ale aj či úloha predstavuje problém stacionárny – záťaž ani okrajové podmienky sa s časom nemenia, časovo premenlivý – záťaž alebo okrajové podmienky sa s časom menia, s harmonickým priebehom alebo s neharmonickým priebehom, ale takisto či úlohu možno riešiť využitím symetrie ako 2D úlohu resp. 1D úlohu. Pri výbere vhodného typu prvku má dôležitú úlohu aj materiálový model, ktorým má byť opísané materiálové správanie skúmaného systému – nie každý prvok podporuje všetky materiálové modely implementované v ANSYS-e. Tieto všetky faktory vplyvajú na voľbu vhodného typu prvku. Samotná voľba sa v GUI realizuje postupnosťou: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete – obr. 3.7.



Obr. 3.7. Definovanie typu prvku – stromová štruktúra výberu

Pridanie nového typu prvku z knižnice prvkov programu ANSYS do databázy aktuálneho modelu sa realizuje tlačidlom **Add**, pričom po aplikovaní tohto tlačidla sa objaví nové okno – obr. 3.8, kde v ľavom okne sú všetky dostupné kategórie prvkov v programe ANSYS, napr. nosníkové prvky, rovinné prvky atď. a v pravom okne sú všetky prvky z danej kategórie. Po výbere vhodného typu prvku je každému typu prvku priradené referenčné číslo (Element type reference number). Daný typ prvku sa do databázy danej úlohy priradí po stlačení tlačidla **Apply** alebo **OK**.



Obr. 3.8. Definovanie typu prvku – výber typu prvku z knižnice

V prípade, že užívateľ bude potrebovať viacero typov prvkov v rámci danej úlohy, tak po výbere prvého prvku stlačí tlačidlo **Apply**, čím sa daný príkaz vykoná ale zároveň dané grafické okno ostáva aktívne a užívateľ môže definovať ďalší typ prvku. Pri zadaní posledného typu prvku užívateľ stlačí tlačidlo **OK**, čím sa príkaz vykoná a dané okno sa uzavrie. V prípade, že užívateľ aj po definovaní posledného typu prvku stlačí **Apply**, potom mu dané GUI okno ostáva aktívne a na jeho zrušenie musí použiť tlačidlo **Cancel**. Ak by ale namiesto **Cancel** stlačil **OK**, okno sa síce zatvorí, ale súčasne sa daný príkaz vykoná a v databáze by bol ďalší typ prvku. Takýmto spôsobom fungujú tlačidlá **OK-Apply-Cancel** aj pri iných príkazoch.

Po pridaní daného typu prvku do databázy danej úlohy, je možné určitým spôsobom modifikovať štandardné vlastnosti prvku a to pomocou položky **Options** – obr. 3.7. Táto voľba sa vždy vzťahuje ku konkrétnemu prvku a umožňuje napr. pri rovinných prvkoch (napr. *PLANE182*) zmeniť nastavenie prvku pre riešenie úloh rovinatej napätosti, rovinného pretvorenia a osovej symetrie. Táto položka tiež umožňuje definovať spôsob numerickej integrácie apod. Všetky možnosti nastavenia správania sa konkrétneho typu prvku sa nachádzajú v *Help-e* pri opise daného prvku. Najjednoduchší spôsob, ako sa dostať k manuálovej stránke daného prvku, je použitie príkazového riadku, napr. pre načítanie manuálovej stránky prvku *PLANE182* zadáme do príkazového riadku príkaz *HELP,PLANE182*. V prípade, že už definovaný typ prvku sa nebude nachádzať v modeli, je možné ho vymazať z databázy tlačidlom **Delete** – obr. 3.7.

Definovanie typu prvku cez príkazový riadok je veľmi jednoduché, syntax je nasledovná

ET,ITYPE,ENAME,KOP1,KOP2,KOP3,KOP4,KOP5,KOP6

kde *ITYPE* je referenčné číslo typu prvku, *ENAME* je názov typu prvku a parametre *KOP1* až *KOP6* predstavujú parametre (tzv. „keyoptions“, odtiaľ aj názov skratky *KOP*), ktorými sa mení štandardné správanie sa prvku (tieto parametre sa v GUI menia v položke **Options** – obr. 3.7). Napr. pre pridanie prvku *PLANE182* do databázy úlohy, ktorá bude riešiť problém osovej symetrie (po anglicky „axisymmetric“), by sme v manuálovej stránke daného prvku našli informáciu, že správanie axisymmetric sa nastavuje parametrom keyoption číslo 3 a musí byť nastavený na hodnotu 1, t. j. zápis by bol nasledovný

ET,1,PLANE182, , ,1

t. j. referenčné číslo je 1 (v samotnom modeli sa na typ prvku *PLANE182* odkazuje ako na typ 1), pričom prázdne polia medzi čiarkami znamenajú, že tieto parametre sú nezmenené, a teda sa správajú podľa štandardného nastavenia daného príkazu. Štandardné nastavenie je buď v manuáli príslušného prvku explicitne uvedené, alebo implicitne je to parameter 0 pre daný keyoption.

Nastavenie keyoptionov je možné aj samostatným príkazom *KEYOPT*, ktorý má syntax

KEYOPT,ITYPE,KNUM,VALUE

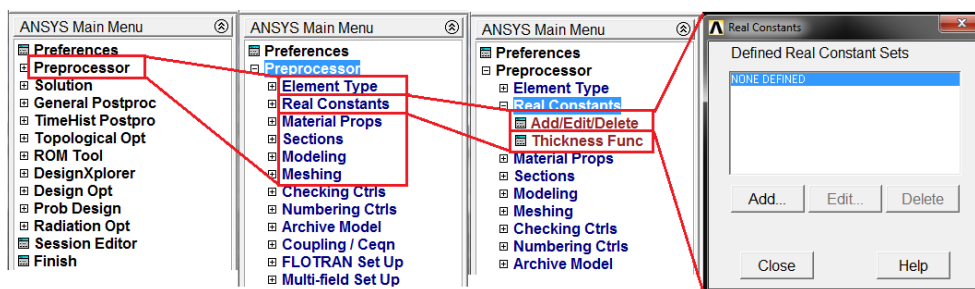
kde *ITYPE* predstavuje referenčné číslo typu prvku, pre ktorý bude daná zmena keyoptionu platiť, *KNUM* predstavuje číslo keyoptionu, ktoré ideme meniť a *VALUE* je číselná hodnota, ktorú ideme priradiť *KNUM* keyoptionu. Napr. predchádzajúce priradenie je možné realizovať takto

ET,1,PLANE182
KEYOPT,1,3,1

Takýto zápis je prehľadnejší a najmä ak daný typ prvku obsahuje viac keyoptionov ako je 6, nie je možné použiť skrátenejší zápis, ktorý umožňuje meniť maximálne 6 keyoptionov.

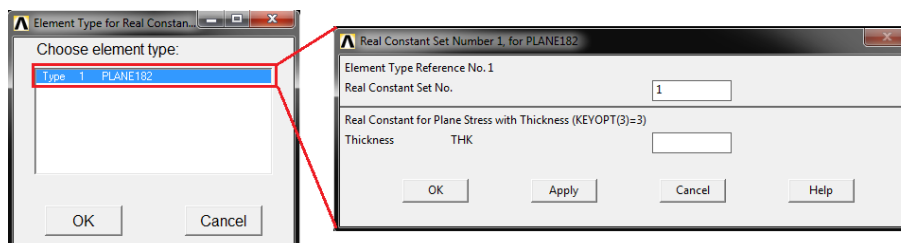
Real Constants a Sections

Táto časť obsahuje dve skupiny príkazov, ktoré sú aj v Main menu zobrazené samostatne – obr. 3.6, a to skupinu príkazov Real Constants a skupinu príkazov Sections. Dôvod, prečo sú obe tieto časti v tomto opise spojené je ten, že oba tieto parametre určitým spôsobom dopĺňajú informáciu pre daný typ prvku, napriek tomu, že nie sú explicitne naviazané na typ prvku. Real Constants sa najčastejšie využíva pri starších typoch prvkov, a najčastejšie predstavuje informáciu, ktorá bola redukciou geometrie na 2D resp. 1D úlohu odstránená z reálneho 3D systému, napr. pri nosníkoch je samotný 1D nosník reprezentovaný čiarou, avšak reálny 3D nosník má určitý prierez aj momenty zotrvačnosti prierezu k jednotlivým osiam, alebo pri redukcii na 2D úlohu je potrebné v niektorých prípadoch definovať aj hrúbku systému, ktorá pri plošnom útvare nie je geometriou modelu definovaná. Práve takéto informácie bývajú definované v položke Real Constants. Samotná voľba sa v GUI realizuje postupnosťou: Preprocessor → Real Constants → Add/Edit/Delete – obr. 3.9. Po



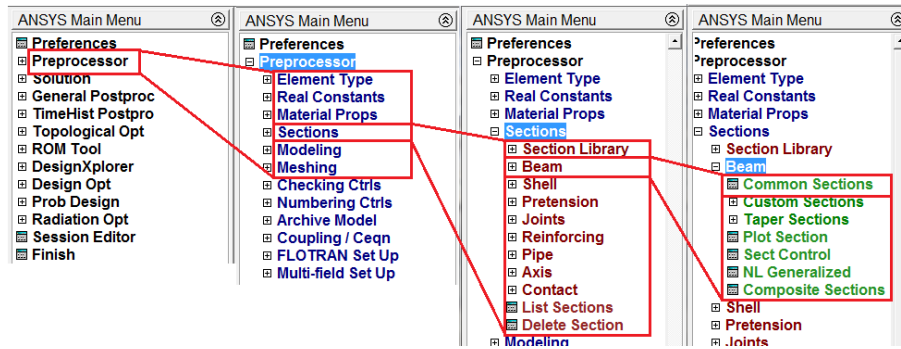
Obr. 3.9. Definovanie reálnych konštánt – stromová štruktúra výberu

stlačení tlačidla Add sa zobrazí ponuka už definovaných typov prvkov pomocou príkazu *ET*, pričom po výbere typu prvku, pre ktorý chceme definovať reálne konštanty, a po stlačení tlačidla OK sa zobrazí nové okno s možnosťou vloženia reálnych konštánt. Celý postup je zobrazený pre prvok PLANE182 na obr. 3.10. Tento postup pomocou príkazo-

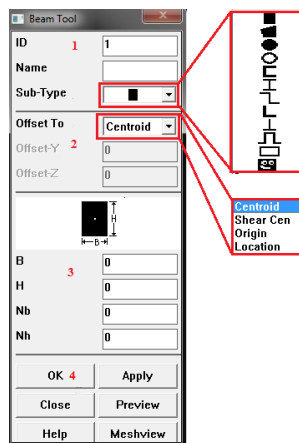


Obr. 3.10. Definovanie reálnych konštánt – výber typu prvku a vloženie reálnych konštánt

vého riadku je veľmi jednoduchý, príkaz má označenie *R* a jeho syntax vyzerá takto



Obr. 3.11. Definovanie prierezov pomocou Sections



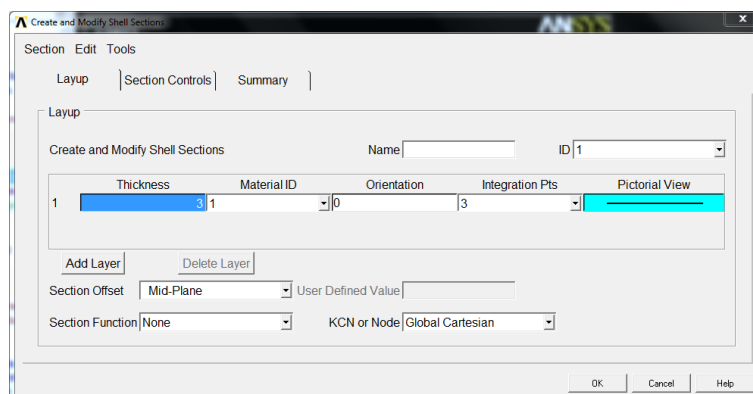
Obr. 3.12. Definovanie prierezov pomocou Sections – nosníky

$R, NSET, R1, R2, R3, R4, R5, R6$

kde $NSET$ je číselný identifikátor sady reálnych konštánt, $R1$ až $R6$ sú jednotlivé reálne konštanty, pričom význam jednotlivých konštánt je uvedený v manuálovej stránke konkrétneho prvku. Napr. pre prvok PLANE182 s nastavením správania sa „plane stress with thickness“ je potrebné definovať hrúbku prvkov, potom syntax vyzerá takto

$R, 1, 0.05$

kde 1 predstavuje sadu č. 1 reálnych konštánt (nemá nič spoločné s referenčným číslom typu prvku) a 0.05 predstavuje hrúbku, ktorá bude uvažovaná pri výpočte jednotlivých členov matice tuhosti. Pri číselnej hodnote hrúbky nie je uvedená jednotka, lebo ANSYS Classic prácu s jednotkami necháva plne v kompetencii užívateľa (na rozdiel od prostredia ANSYS Workbench). Vo všeobecnosti sa odporúča pracovať so základnými SI jednotkami (v takom prípade by číslo 0.05 predstavovalo hodnotu uvedenú v metroch), ale samozrejme sa môžu použiť aj iné jednotky, dôležité je, aby boli vzájomne kompatibilné. Definovanie iných ako základných jednotiek má veľký význam pri modelovaní MEMS systémov, kde rozmery sú rádovo v mikrometroch. V prípade, ak pre daný prvok potrebujeme definovať viac reálnych konštánt ako 6, môžeme na dodefinovanie ďalších šiestich konštánt použiť opakovane príkaz $RMORE$. Definovanie Sections má význam najmä pri nových typoch prvkov (napr. BEAM188), pričom táto položka umožňuje definovať vrstevnaté (kompo-



Obr. 3.13. Definovanie prierezov pomocou Sections – škrupiny

zité) zloženie prierezov. Základná voľba položky Sections je zobrazená na obr. 3.11. Pri definovaní prierezov pre nosníky je najjednoduchšie využiť položku Common Sections, pričom po aktivovaní tejto položky sa zobrazí menu definovania prierezu – obr. 3.12.

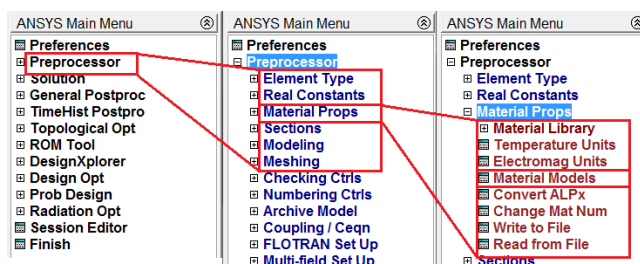
V obr. 3.12 v položke 1 sa definuje číselný identifikátor daného prierezu ID a typ prierezu (poprípade aj meno prierezu). V položke 2 sa definuje osadenie prierezu, v položke 3 sa definujú geometrické rozmery prierezu. V položke 4 sa vytvorenie daného prierezu potvrdzuje tlačidlom OK.

Pri škrupinách sa prierez definuje cez položku ... → Sections → Shell → Lay-up → Add/Edit. Tabuľka definovania prierezu pre škrupiny je zobrazená na obr. 3.13, v ktorej sa definuje hrúbka škrupiny (parameter Thickness), materiál (parameter Material ID) aj parametre pre viacvrstvé škrupiny.

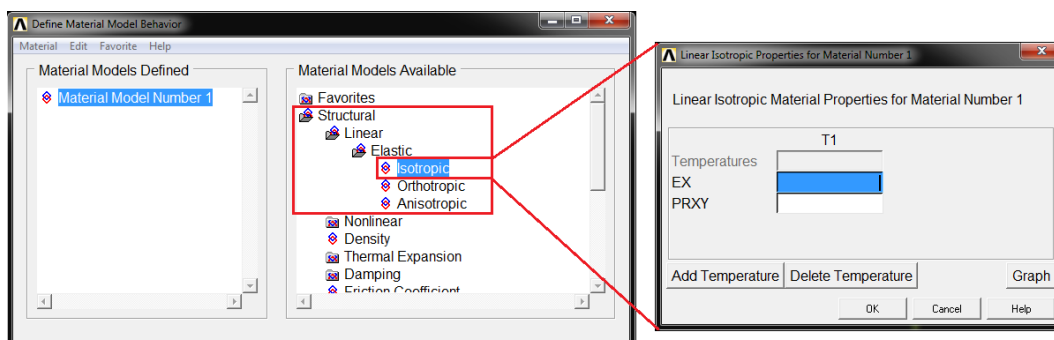
Material Props

Definovanie materiálových vlastností si vyžaduje od užívateľa znalosti o správaní sa daného systému, t. j. či pracuje v oblasti elastickej, plastickej, alebo sa zaťažovanie s časom mení a bude spôsobovať spevňovanie materiálu a podobne. V závislosti od zvoleného materiálového modelu sa následne predpisujú jednotlivé materiálové vlastnosti. My sa v našich úlohách obmedzíme na elastickejšiu oblasť zaťažovania, pričom budeme pracovať buď s izotropnými, alebo anizotropnými materiálmi, ktorých správanie sa riadi lineárnym Hookovým zákonom.

Základné definovanie materiálových vlastností cez GUI je realizované postupnosťou: Preprocessor → Material Props → Material Models → (výber materiálového modelu) – obr. 3.14 a 3.15.



Obr. 3.14. Definovanie materiálových vlastností



Obr. 3.15. Definovanie materiálových vlastností – výber materiálových modelov

Ako je vidno z obr. 3.15, na definovanie izotropného lineárneho elastického materiálu stačí zadať dve hodnoty, a to modul pružnosti (označený ako EX) a Poissonovo číslo (označené ako PRXY).

Pre definovanie materiálových vlastností pomocou príkazového riadku možno využiť viacero príkazov, ale pre lineárne elastický izotropný materiál je najjednoduchšie použiť príkaz *MP*, ktorý má syntax

MP,Lab,MAT,C0,C1,C2,C3,C4

kde *Lab* predstavuje materiálovú vlastnosť, ktorá bude príkazom definovaná (pre definovanie modulu pružnosti to je *EX*, pre Poissonovo číslo *PRXY*), *MAT* predstavuje referenčné číslo daného materiálu, *C0* je samotná materiálová vlastnosť a *C1* až *C4* sú koeficienty polynómu, ktorý opisuje materiálové správanie ako funkciu teploty.

Pre prípad, že chceme definovať materiálové vlastnosti ocele, ktorá ma modul pružnosti $2,1 \times 10^{11}$ Pa a Poissonovo číslo 0,3 a chceme, aby to bol materiál s referenčným číslom dva, potom syntax vyzerá takto

MP,EX,2,2.1E11
MP,PRXY,2,0.3

Ako je z tohto zápisu vidno, AC zapisuje desatinnú čiarku ako desatinnú bodku a exponent sa zapisuje Fortranovským zápisom, t. j. napr. $1 \times 10^6 = 1E6$

Modeling

V tejto časti opisu základných krokov pri tvorbe modelu v programe AC bude uvedená iba filozofia tvorby geometrie modelu a základné charakteristiky modelu. Jednotlivé príkazy budú vysvetlené pri konkrétnych úlohách, ktoré budú postupne riešené.

Geometria v AC predstavuje tú časť modelu, na ktorej sa vytvára sieť konečných prvkov. Samozrejme, konečné prvky možno definovať aj priamo, t. j. pomocou uzlov, avšak takýto postup je efektívne použiť iba v niektorých konkrétnych prípadoch. V prevažnej väčšine prípadov je efektívnejšie sieťovať geometriu. Táto geometria môže byť vytvorená v inom 3D CAD systéme a importovaná do AC, alebo môže byť vytvorená priamo v AC. Každý z týchto prístupov má svoje výhody aj nevýhody.

Import 3D CAD modelu do AC:

- výhody: často býva vytvorený iným pracovníkom, takže výpočtár sa nemusí zaoberať tvorbou geometrie
- nevýhody: často obsahuje detaily, ktoré nemusia byť pri MKP modeli uvažované, ich odstránenie si vyžaduje dodatočnú manipuláciu s geometriou modelu, sieťovanie takto importovaného modelu s komplexným tvarom býva často realizované pomocou tzv. tetrahedralnych prvkov, často sa v importovaných modeloch vyskytujú chyby

Tvorba vlastnej geometrie v AC:

- výhody: užívateľ si vytvára geometriu už s vedomím, že sa táto geometria bude sieťovať, a teda je schopný ju vytvoriť tak, aby bolo možné aj pri komplikovanej geometrii použiť hexahedralne prvky, vhodné pri tvorbe parametrických modelov
- nevýhody: proces tvorby geometrie, najmä komplexnej je dosť zdĺhavý v porovnaní so špecializovanými 3D CAD systémami

V ďalšom opise sa budeme venovať iba tvorbe vlastnej geometrie. Ako prvé si treba uvedomiť, že geometria je tvorená týmito entitami:

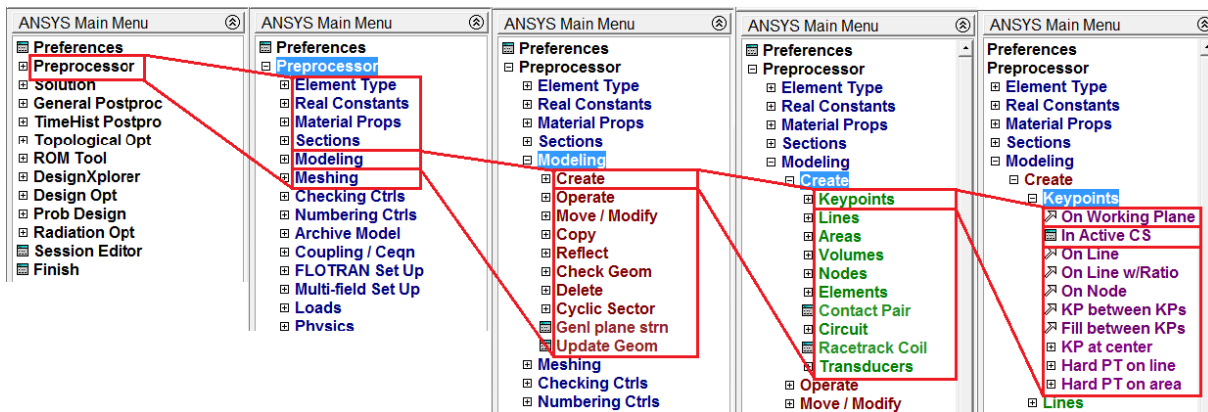
- Keypoint – predstavuje základný stavebný prvok v AC, v podstate ide o bod, je to najnižšie postavená geometrická entita (tiež ho budeme nazývať bod)
- Line – každá čiara je tvorená bodmi (Keypoint-ami)
- Area – každá plocha je tvorená čiarami (Line-ami)
- Volume – každý objem je tvorený z plôch (Area-mi), je to najvyššie postavená geometrická entita

Pri rôznych príkazoch sa využívajú predpony *K*, *L*, *A* a *V*, čo naznačuje použitie daných príkazov na bodoch, čiarami, plochách a objemoch.

Samotnú tvorbu geometrie v AC je možné uskutočniť dvoma rôznymi prístupmi:

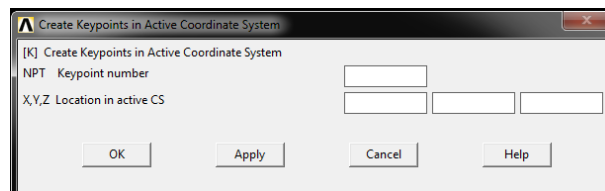
- postup zospodu hore (from bottom to up) – model je vytváraný postupe, ako prvé sú vytvárané body, nasledujú čiary, z čiar sú vytvárané plochy a nakoniec z plôch sa vytvárajú objemy. Tieto útvary sa vytvárajú v tzv. aktívnom súradnicovom systéme (v danom okamihu môže byť vždy len jeden súradnicový systém aktívny).
- postup z hora dolu (from up to bottom) – model je vytváraný z tzv. primitívnych útvarov, ktoré sú buď 2D, alebo 3D objekty, pričom vytvorením takéhoto objektu sa automaticky vytvorí aj všetky nižšie postavené entity. Primitívne útvary sa vytvárajú v tzv. pracovnej rovine (Working Plane) bez ohľadu na to, aký súradnicový systém je aktívny.

Prvý postup, zospodu hore, si ukážeme na nakreslení veľmi jednoduchého rovinného útvaru – obdĺžnika o rozmeroch 2×1 (opäť zámerne neuvádzame jednotky). Základné definovanie Keypointov cez GUI je realizované postupnosťou: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In ActiveCS – obr. 3.16.



Obr. 3.16. Definovanie Keypointov – stromová štruktúra výberu

Po aktivovaní položky *In ActiveCS* sa zobrazí tabuľka – obr. 3.17. Ako je vidno z tohto obrázku, je potrebné definovať štyri údaje: jedno číslo Keypointu a tri súradnice. Ak užívateľ nedefinuje číslo Keypointu (toto pole nechá prázdne), ANSYS na základe informácií z databázy modelu automaticky priradí najbližšie vyššie voľné číslo pre novovytvorený Keypoint. Ak užívateľ nechá prázdne niektoré políčko alebo aj všetky políčka pre definovanie súradníc Keypointu, ANSYS automaticky novovytvorenému Keypointu priradí súradnicu 0 do prázdneho políčka súradnice. Takýto spôsob priraďovania čísel jednotlivým entitám, resp. doplnenie nulových súradníc v prípade, že užívateľ políčko nechá prázdne, funguje aj pri iných príkazoch a treba na to pamätať. Takisto tu treba pamätať na rozdiel medzi príkazmi OK-Applý-Cancel, ktorý bol vysvetlený na strane 29.

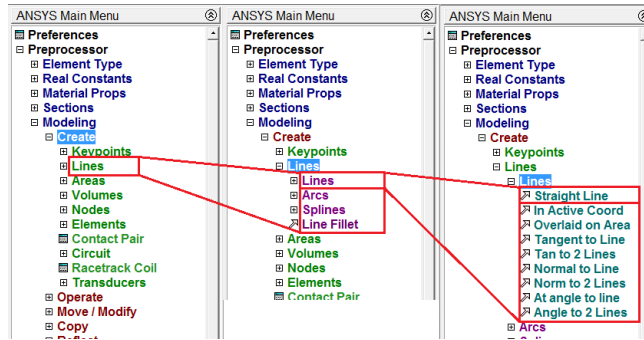


Obr. 3.17. Definovanie Keypointov – tabuľka na definovanie súradníc

Aby sme teda vytvorili obdĺžnik 2×1 , nemusíme (ale môžeme) uvádzať čísla jednotlivých Keypointov, postupne sa ich čísla budú zvyšovať o jednotku. Do položiek súradníc by sme zadali postupne súradnice štyroch rohov obdĺžnika, pričom posledné políčko (súradnica Z) ostane prázdne, teda obdĺžnik bude modelovaný v rovine $Z=0$. Pri zadávaní súradníc si treba uvedomiť, že tento príkaz pracuje s tzv. aktívnym súradnicovým systémom. Teda ak je ako aktívny súradnicový systém nastavený cylindrický, potom jednotlivé parametre X,Y,Z nepredstavujú kartézské súradnice ale cylindrické. Obdobne to platí aj s ostatnými súradnicovými systémami.

Na obr. 3.17 je pre užívateľa uvedená ešte jedna informácia a to názov príkazu, ktorý sa v skutočnosti vykonal. Je to text uvedený v ľavom hornom rohu v hranatých zátvorkách – tak je to pri všetkých príkazoch tabuľkového typu. Pri príkazoch výberového typu, táto informácia sa nachádza v Status line – pozri obr. 3.1, č. 7.

Ak by sme chceli vytvoriť Keypointy pomocou príkazového riadku, tak príkaz *K* má nasledujúcu syntax



Obr. 3.18. Definovanie čiar – stromová štruktúra výberu

K, NPT, X, Y, Z

Význam jednotlivých parametrov je jasný z obr. 3.17. Takže pre náš obdĺžnik by sme napísali

$K,$
 $K, ,2$
 $K, ,2,1$
 $K, , ,1$

Číslovanie samozrejme nemusí začať od čísla 1, závisí to od toho, aké čísla Keypointov už boli použité v modeli. Ak by sme program chceli prinútiť, aby použil čísla od 1 do 4 (tu zas hrozí riziko, že si prepíšeme Keypointy, ktoré pôvodne mali čísla od 1 do 4, preto si na vlastné definovanie čísel entít treba dávať pozor), môžeme písať

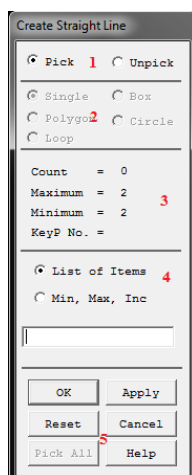
$K,1,0,0,0$
 $K,2,2,0,0$
 $K,3,2,1,0$
 $K,4,0,1,0$

Nulové súradnice samozrejme nemusia byť napísané. Ako je vidno z obr. 3.16, pri vytváraní Keypointov možno použiť aj iné príkazy, pričom každý z nich možno efektívne použiť v rozdielnych situáciách. Toto môžeme povedať o každej jednej skupine príkazov (či už slúžia na definovanie čiar, objemov alebo predpisovanie záťaže apod.). V tejto prehľadovej časti o systéme ANSYS budú prezentované vždy len tie najzákladnejšie príkazy, v prípade potreby budú ďalšie príkazy rozobraté pri riešení konkrétnej úlohy.

Vytvorenie čiar cez Keypointy sa realizuje GUI postupnosťou: Preprocessor → Modeling → Create → Lines → Lines → Straight Line – obr. 3.18.

Ako je vidno z obr. 3.18, príkaz Straight Line je príkaz výberového typu, t. j. po aktivovaní tohto príkazu cez GUI sa objaví výberové menu – obr. 3.19. Takéto výberové menu sa objaví pri každom príkaze výberového typu, preto si ho dôkladne popíšeme. Toto menu je rozdelené do piatich častí:

1. pri nastavení Pick sa pri výbere danej entity táto entita pridá do výberu entít, na ktorých bude daný príkaz vykonávaný, pri nastavení Unpick sa pri výbere danej entity táto entita odoberá z výberu entít, na ktorých bude daný príkaz vykonávaný.



Obr. 3.19. Definovanie čiar – výberové menu

Samotné prepínanie medzi **Pick** a **Unpick** možno realizovať buď výberom vo výberovom menu ľavým tlačidlom myši, alebo priamo v **Graphic window** pravým tlačidlom myši.

2. v prípade, že daný príkaz pracuje s viacerými vstupnými entitami, je možné tieto entity vyberať buď po jednom (**Single**), alebo využitím výberu viacerých entít naraz (**Box**, **Polygon**, **Circle** alebo **Loop**).
3. táto časť výberového menu je informatívna a dáva užívateľovi číselnú informáciu o uskutočňovanom výbere (počet selektovaných entít, číslo posledne selektovanej entity atď.).
4. toto pole umožňuje číselne zadať buď zoznam entít (**List of Items**) alebo rozsah entít (**Min, Max, Inc**), s ktorými bude daný príkaz vykonávaný, samotné číselné údaje sa píšú do prázdneho políčka.
5. tieto tlačidlá slúžia na uskutočnenie daného príkazu (**OK-Apply**), zrušenie celého výberu pri aktívnom zachovaní príkazu (**Reset**), zrušenie celého príkazu (**Cancel**), výber všetkých entít z danej skupiny, na ktorých daný príkaz operuje (**Pick All** – je aktívne iba pre niektoré typy príkazov a pri týchto typoch príkazov je takisto aktívna položka č. 2 z tohto menu) a nakoniec **Help**.

Na vytvorenie čiar teda postupne označíme Keypointy 1-2, 2-3, 3-4 a 4-1, čím sa vytvoria priame čiary bez ohľadu na aktívny súradnicový systém. Ak by sme použili na vytvorenie čiar príkaz **In Active Coord** – menu na obr. 3.18 celkom vpravo, potom tvar čiary medzi dvoma bodmi závisí od zvoleného aktívneho súradnicového systému.

Číslo vytváraných čiar užívateľ nedefinuje, ANSYS automaticky priradzuje jednotlivé po sebe nasledujúce čísla novovytvoreným čiaram.

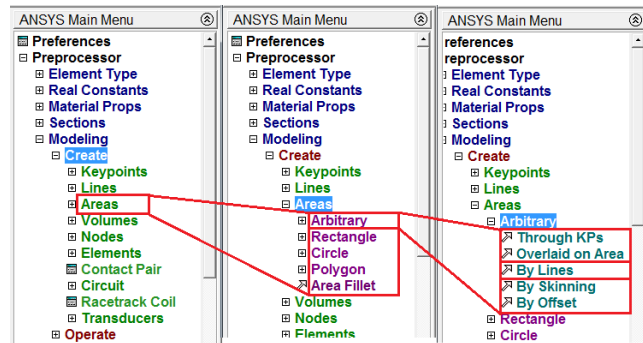
Na vytvorenie priamych čiar pomocou príkazu možno použiť príkaz **LSTR** (**Straight Line**) alebo príkaz **L** (**In Active Coord**). Pre príkaz **LSTR** je syntax takáto

LSTR,P1,P2

kde $P1$ a $P2$ sú čísla Keypointov, z ktorých bude čiara vytvorená, teda pre náš obdĺžnik by sme mohli napísať

$LSTR,1,2$
 $LSTR,2,3$
 $LSTR,3,4$
 $LSTR,4,1$

Na definovanie plochy sa použije v GUI príkaz, ktorý je prístupný cez stromovú štruktúru: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Arbitrary → By Lines – obr. 3.20.



Obr. 3.20. Definovanie plôch – stromová štruktúra výberu

Ako je vidno z obr. 3.20 (Main menu úplne vpravo), tento príkaz je príkaz výberového typu, takže po aktivovaní tohto príkazu sa objaví totožné menu, ako pri výbere Keypointov pri vytváraní čiar – obr. 3.19. Výberom jednotlivých čiar, ktoré tvoria plochu a potvrdením príkazu tlačidlom OK sa vytvorí samotná plocha.

Ak by sme chceli túto plochu vytvoriť pomocou príkazu, použili by sme príkaz AL , ktorý má syntax

$AL,L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7,L8,L9,L10$

kde parametre $L1$ až $L10$ predstavujú čísla čiar, z ktorých bude nová plocha vytvorená. Ak by teda naše štyri čiary mali čísla od 1 do 4 (v tomto poradí by aj uzatvárali obvod plochy – tvorili by slučku 1-2-3-4), potom príkaz by vyzeral takto

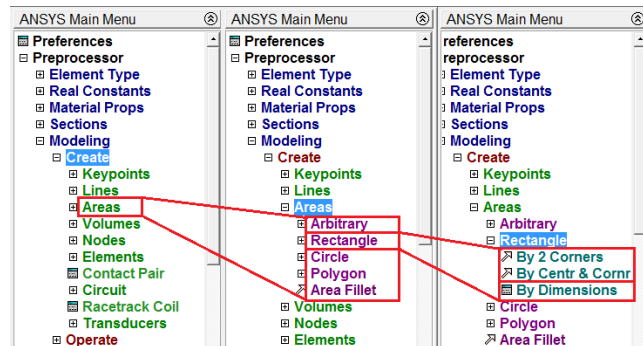
$AL,1,2,3,4$

Vytvorenie plochy je možné aj bez priameho vytvorenia čiar. Museli by sme použiť príkaz Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Arbitrary → Through KPs. Tento príkaz by od nás vyžadoval postupný výber Keypointov, ktoré budú definovať novú plochu, pričom automaticky sa vytvoria aj čiary medzi jednotlivými Keypointami. Syntax príkazu je veľmi jednoduchá

$A,P1,P2,\dots,P18$

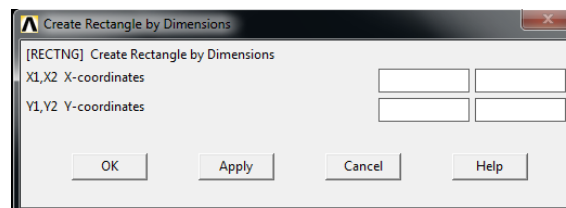
kde $P1$ až $P18$ predstavujú čísla Keypointov, z ktorých bude vytvorená plocha (a samozrejme aj jednotlivé čiary).

Ten istý obdĺžnik môžeme vytvoriť aj druhým postupom – zhora dolu. Na vytvorenie obdĺžnika využijeme iba jeden príkaz, a to Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Rectangle → By Dimensions – obr. 3.21. Po aktivovaní položky By Dimensions sa zobrazí



Obr. 3.21. Definovanie plôch pomocou primitívnych útvarov – stromová štruktúra výberu

tabuľkový príkaz – obr. 3.22, do ktorého je potrebné vpísať súradnice rohov tvoriacich uhlopriečku obdĺžnika. Pri použití tohto príkazu treba pamätať na to, že súradnice sa vzťahujú na WorkingPlane (ďalej tento špeciálny súradnicový systém bude označovaný WP). WP na začiatku práce s prázdnu databázou je stotožnený s globálnym súradnicovým systémom. Natočenie resp. posunutie WP bude ukázané pri príkladoch, ktoré si to budú vyžadovať. Syntax príkazu pre vytvorenie obdĺžnika pre využitie príkazového riadku



Obr. 3.22. Definovanie plôch pomocou primitívnych útvarov – príkaz na vytvorenie obdĺžnika

je nasledujúca

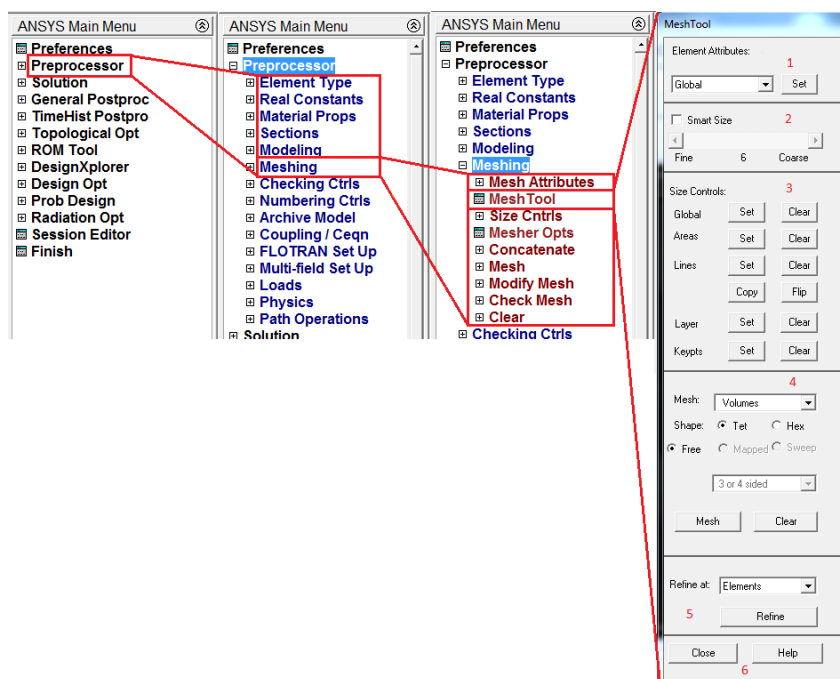
RECTNG, X1, X2, Y1, Y2

kde *X1* a *Y1* sú súradnice jedného bodu uhlopriečky a *X2* a *Y2* sú súradnice druhého bodu uhlopriečky obdĺžnika. V našom prípade by príkaz vyzeral takto

RECTNG, ,2, ,1

Meshing

Sieťovanie (po anglicky meshing) predstavuje záverečný krok Preprocessoru (do Preprocessoru sa často zaraďuje aj definovanie typu analýzy a okrajové a počiatočné podmienky, my budeme tieto kroky zaraďovať do fázy Solution). Sieťovanie, t. j. diskretizácia skúmanej oblasti na menšie podoblasti (konečné prvky resp. elementy) má kľúčovú úlohu



Obr. 3.23. Sieťovanie – stromová štruktúra

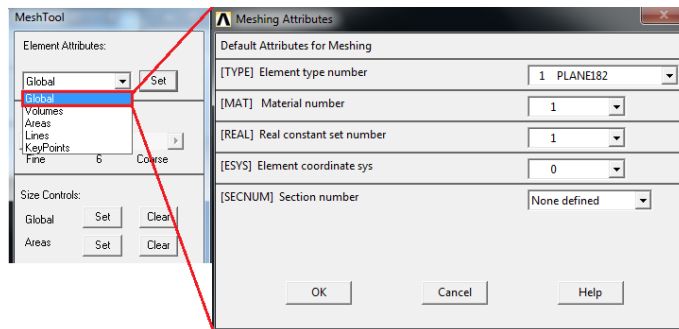
z pohľadu presnosti numerickej metódy aj z pohľadu časovej náročnosti samotného výpočtu. Ako je hneď na prvý pohľad jasné, tieto dva faktory (presnosť a rýchlosť výpočtu) sú vzájomne protichodné, t. j. čím je sieť jemnejšia, tým je riešenie presnejšie ale zároveň časovo náročnejšie a naopak, čím je sieť hrubšia, tým je výpočet síce rýchlejší ale menej presný. Preto výber vhodnej veľkosti siete aj vhodného gradovania jemnosti siete je veľmi dôležitý a veľmi citlivý na skúsenosti konkrétneho užívateľa.

Výsledkom sieťovania je vytvorenie siete konečných prvkov (skrátene len prvkov, po anglicky Elements), ktoré sú spojené v bodoch, ktoré sa nazývajú uzly (po anglicky Node). Tieto nové entity nie sú geometrické entity ale tzv. MKP entity. Pri rôznych príkazoch sa využívajú predpony E a N , čo naznačuje použitie daných príkazov na prvkoch alebo uzloch.

Najjednoduchší spôsob, ako nastaviť parametre sieťovania je využiť Sieťovacie menu, ktoré je prístupné z nasledovnej voľby: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool – obr. 3.23. Samotné sieťovacie menu (úplne vpravo na obr. 3.23) je zložené zo šiestich častí:

1. nastavenie parametrov sieťovania (obr. 3.23 vpravo – bod 1) – v tejto položke užívateľ nastavuje parametre sieťovania buď globálne (pre všetky geometrické entity), alebo len pre vybrané objemy, plochy, čiary alebo body – obr. 3.24 vľavo. Pre všetky alebo vybrané entity sa priraduje typ prvku, materiál, reálne konštanty, súradnicový systém a v prípade, že bol definovaný prierez cez Sections, tak aj tento parameter – obr. 3.24 vpravo. Všetky tieto parametre sa odkazujú na už definované typy prvkov, materiálové parametre atď. Všetky nastavenia parametrov sieťovania sa dajú realizovať aj pomocou príkazov

TYPE, ITYPE
MAT, MAT
REAL, NSET



Obr. 3.24. Nastavovanie parametrov sieťovania

ESYS, KCN
SECNUM, SECID

pričom príkaz *TYPE* nastavuje typ prvku, ktorý má referenčné číslo *ITYPE*; *MAT* nastavuje typ materiálu s referenčným číslom *MAT*; *REAL* nastavuje reálne konštanty s referenčným číslom *NSET*; *ESYS* priraduje súradnicový systém s číselným označením *KCN* novovytvoreným prvkom a *SECNUM* priraduje referenčné číslo *SECID* prierezu (Section). Samozrejme nie všetky príkazy musia byť vždy využité, napr. ak je v ANSYS-e definovaný iba jeden typ prvku, jeden materiál a jedna sada reálnych konštánt, automaticky sú tieto považované za aktívne nastavené a nie je potrebné tieto príkazy zadávať. Ak by ich ale užívateľ chcel zadať, potom by syntax vyzerala takto

TYPE, 1
MAT, 1
REAL, 1

2. nastavenie „Smart size“ veľkosti prvkov (obr. 3.23 vpravo – bod 2) – užívateľ nastavuje jeden z parametrov Smart size alebo manuálne nastavenie veľkosti prvkov (obr. 3.23 vpravo – bod 3). Pri nastavení Smart size veľkosti prvkov užívateľ nastavuje veľkosť prvkov iba relatívne v rozsahu od 1 (Fine, t. j. najjemnejšia sieť) do 10 (Coarse, t. j. najhrubšia sieť).

Tento príkaz, keď sa zadáva cez príkazový riadok, sa volá *SMRTSIZE* a má viacero parametrov nastavenia, ale to najjednoduchšie použitie je

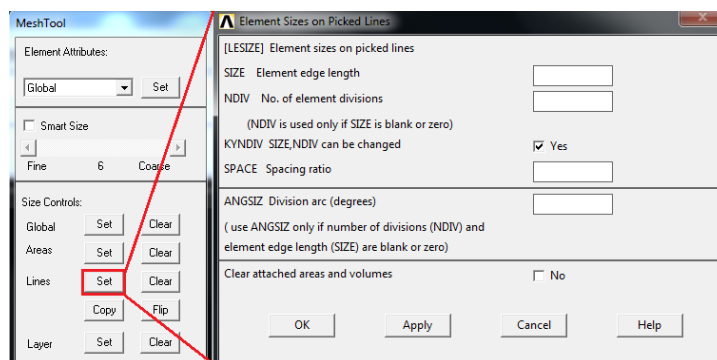
SMRTSIZE, SIZLVL

kde parameter *SIZLVL* určuje číselnú relatívnu veľkosť prvkov, ako už bolo spomínané.

3. manuálne nastavenie veľkosti prvkov (obr. 3.23 vpravo – bod 3) – pomocou manuálneho nastavenia siete užívateľ definuje veľkosť prvku na konkrétnych geometrických entitách. Tento prvý krok, výber entít, sa realizuje stlačením príslušného tlačidla Set (t. j. podľa toho, či užívateľ ide priradovať vlastnosti čiaram, plochám atď.), pričom sa zobrazí výberové menu (obr. 3.19). Po vybraní príslušnej entity sa zobrazí tabuľka, v ktorej sa definuje veľkosť prvku, napr. pre definovanie veľkosti prvkov na

čiarach sa zobrazí tabuľka – obr. 3.25, kde možno definovať buď veľkosť elementu *SIZE* alebo počet prvkov na danej čiare *NDIV*, parameter *SPACE* určuje gradovanie jemnosti siete na danej čiare. Týmto definovaním veľkosti prvkov a potvrdením tlačidlom *OK* sa sieťovanie ešte neuskutočnilo, len sa nastavila veľkosť prvkov, ktoré budú vytvorené (generované).

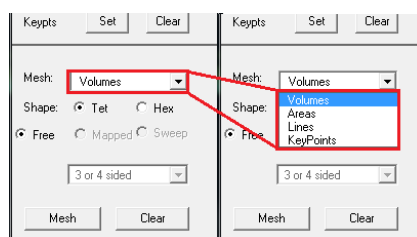
Tlačidlom *Clear* (obr. 3.25 vľavo) možno vymazať nastavené delenie pre vybrané geometrické entity, pričom pri čiarach je možné kopírovanie nastavenia delenia pomocou tlačidla *Copy* a otočiť smer gradovania delenia čiary na prvky pomocou tlačidla *Flip* – obr. 3.25 vľavo. Príkazy, ktorými sa nastavuje veľkosť elementov patria



Obr. 3.25. Definovanie veľkosti prvkov na čiarach

do kategórie tzv. *SIZE* príkazov. Patria sem napr. *ESIZE*, *LESIZE*, *AESIZE*.

- realizácia sieťovania (obr. 3.23 vpravo – bod 4) – v tejto časti sieťovacieho menu sa ako prvý vyberá druh geometrickej entity (objem, plocha, čiara, bod), ktorá sa ide sieťovať – obr. 3.26, potom nasleduje výber tvaru prvku (ak to daný typ prvku umožňuje), ktorý bude na sieťovanie použitý – položka *Tet* alebo *Hex*, ďalej nasleduje výber spôsobu tvorby samotnej siete – *Free*, *Mapped* a *Sweep*, pričom pre použitie *Mapped* a *Sweep* existujú určité pravidlá. Posledný krok tejto položky je realizácia samotného sieťovania pomocou tlačidla *Mesh*, pričom po stlačení tohto tlačidla sa objaví výberové menu (obr. 3.19), ktoré umožní výber tej entity, ktorej vysieťovanie chceme zrealizovať. Tlačidlo *Clear* odstráni sieť na vybraných entitách.



Obr. 3.26. Realizácia sieťovania

Ako už bolo uvedené, realizácia sieťovania v sebe zahŕňa nastavenie tvaru prvku, typu sieťovacieho algoritmu a samotné sieťovanie. Toto je zahrnuté v príkazoch

MSHAPE,KEY,Dimension
MSHKEY,KEY

kde príkaz *MSHAPE* definuje pomocou parametra *KEY* tvar prvkov (*0* – štvoruholníkové alebo hexa prvky, *1* – trojuholníkové alebo tetra prvky) s odkazom na *Dimension* (*2D* – 2D úloha, *3D* – 3D úloha) a príkaz *MSHKEY* definuje pomocou parametra *KEY*, či sa použije algoritmus free alebo mapový (*0* – free sieťovanie, *1* – mapové sieťovanie, *2* – ak je to možné, použije program na danú geometrickú entitu mapové sieťovanie, inak použije free sieťovanie). Samotné sieťovanie je realizované jedným z tzv. *MESH* príkazov, kde patria *KMESH*, *LMESH*, *AMESH*, *VMESH*. Napr. ak by sme chceli vysieťovať plochu č. 2, použili by sme syntax

AMESH,2

Ak by sme namiesto *2* napísali *ALL*, vysieťovali by sa všetky aktívne plochy. Ak by sme napr. príkaz *AMESH* použili v GUI rozhraní (nie v skriptovom súbore) v tvare

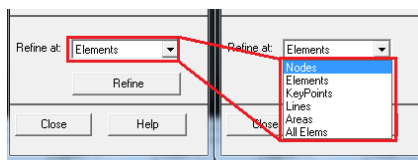
AMESH,P

potom parameter *P* znamená, že užívateľovi bude umožnené graficky (interaktívne) vybrať plochu, ktorá sa bude sieťovať. Túto možnosť niektorých príkazov možno využiť iba v GUI rozhraní.

Na využitie sweepovania pri sieťovaní (t. j. ťahania siete zo zdrojovej plochy do cieľovej plochy, musí geometria spĺňať určité podmienky, aby objem bolo možné sweepovaním vysieťovať) sa používa príkaz *VSWEEP*.

Na vyčistenie danej geometrickej entity (t. j. zmazanie už vygenerovaných prvkov) sa používajú príkazy zo skupiny tzv. *CLEAR*, t. j. *KCLEAR*, *LCLEAR*, *ACLEAR*, *VCLEAR*.

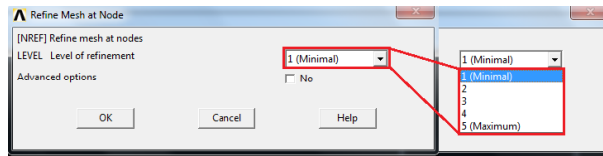
- realizácia zjemnenia siete (obr. 3.23 vpravo – bod 5) – samotný MKP výpočet sa realizuje viackrát s rôznou hustotou siete, aby bolo zabezpečené, že dosiahnuté výsledky nie sú zafažené výraznou diskretizačnou chybou. Toto zjemnenie siete môže byť rôzne v rôznych oblastiach modelu, pričom tam, kde je veľký gradient v číselných hodnotách vypočítaných veličín (napr. koncentrácia napätia), by mala byť sieť jemnejšia. Zjemňovanie sa dá realizovať na geometrických ale aj MKP entitách, t. j. na uzloch, elementoch, bodoch, čiarach, plochách a všetkých elementoch – obr. 3.27. Po vybraní typu entity, na ktorej bude zjemnenie realizované, sa zobrazí výberové



Obr. 3.27. Realizácia zjemnenia siete

menu (obr. 3.19), ktoré nám umožní výber konkrétnej entity a po potvrdení tlačidlom OK, sa zobrazí tabuľka na definovanie hodnoty zjemnenia – obr. 3.28. Ako je z tohto obrázka vidno, číslo 1 predstavuje minimálnu hodnotu zjemnenia siete a číslo 5 maximálnu hodnotu zjemnenia. Tlačidlom OK sa príkaz zjemnenia vykoná.

Zjemnenie pomocou príkazu sa realizuje niektorým príkazom z kategórie tzv. *REFINE*, t. j. *NREFINE*, *EREFINE*, *KREFINE*, *LREFINE* a *AREFINE*.



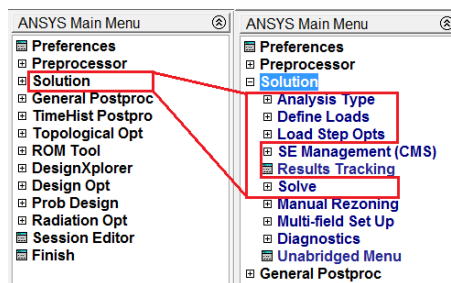
Obr. 3.28. Realizácia zjemnenia siete – výber hodnoty zjemnenia

6. ukončenie práce so sieťovacím menu a prístup k helpu (obr. 3.23 vpravo – bod 6).

3.4.2 Solution

Fáza Solution sa dá rozdeliť do štyroch základných krokov, ktoré sú zobrazené na obr. 3.29. Sú to:

1. Analysis Type – v tejto časti užívateľ volí typ analýzy, t. j. či model bude riešiť problém statiky, dynamiky, vlastných tvarov a pod. V tejto časti sa aj nastavuje správanie modelu z pohľadu geometrických nelinearít, nastavenie časových krokov pre dynamickú (prechodovú) analýzu aj metódy pre numerickú časovú integráciu;
2. Define Loads – v tejto časti fázy Solution sa definujú, modifikujú aj mažú jednotlivé záťažové podmienky, ktoré sa môžu vzťahovať tak na MKP entity (uzly a elementy), ako aj na geometrické entity (body, čiary, plochy a objemy);
3. Load Step Opts – táto časť má za úlohu napr. vytváranie tzv. súborov záťažových krokov (LS súborov), ktoré sa dajú využiť pri dynamických analýzach;
4. Solve – spustenie samotného výpočtu.

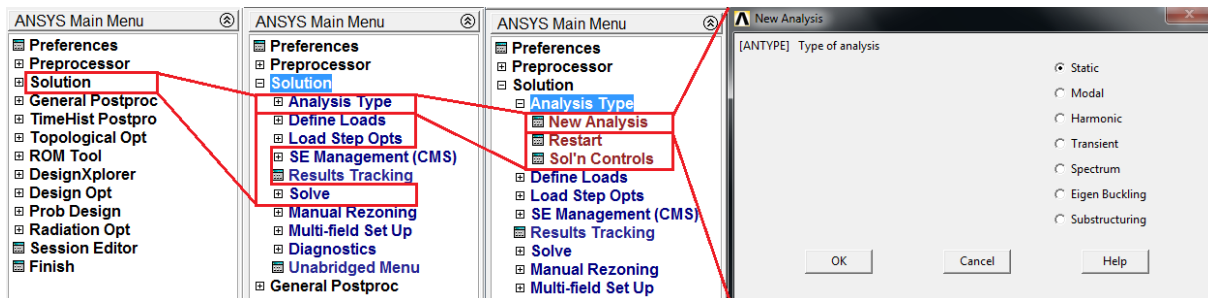


Obr. 3.29. Základné kroky v Solution

Na to, aby bolo možné použiť písané príkazy z fázy Solution, musí byť táto fáza aktivovaná, čo sa realizuje príkazom `/SOLU`. Po zadaní tohto príkazu už ANSYS nebude rozpoznávať príkazy z fázy Preprocessor (platí to samozrejme aj naopak).

Analysis Type

Výber typu analýzy sa realizuje postupnosťou krokov **Solution** → **Analysis Type** → **New Analysis** a samotný výber závisí od toho, s akými prvkami sa vykonáva samotná analýza, t. j. možnosti, ktoré sú zobrazené na obr. 3.30 závisia od toho, či použité typy prvkov patria do kategórie štruktúrne (mechanické) prvky, tepelné, elektrické, piezoelektrické apod. Výber na obr. 3.30 zodpovedá štruktúrnym prvkom, teda samotná štruktúrna



Obr. 3.30. Výber typu analýzy

analýza môže byť:

- statická (č. 0) – záťaž ani okrajové podmienky sa s časom nemenia, t. j. rieši sa ustálený stav systému, tento typ analýzy je predvolený, t. j. bez definovania typu analýzy bude vykonaná statická analýza
- modálna (č. 2) – cieľom je určiť vlastné frekvencie a vlastné tvary systému, ktoré charakterizujú dynamické vlastnosti systému
- harmonická (č. 3) – budenie systému je harmonické, odozva systému musí byť tiež harmonická s rovnakou frekvenciou ako je budiaca frekvencia a výsledkom analýzy sú amplitúdy kmitania
- prechodová (transientná, č. 4) – táto analýza rieši odozvu systému na všeobecné, časovo premenlivé zaťaženie
- spektrálna (č. 8) – používa sa na riešenie úloh, kde budenie má charakter náhodnej veličiny, napr. pri seizmických analýzách
- určenie kritickej vzpernej sily (č. 1) – úlohou tejto analýzy je stanoviť kritickú záťaž, pri ktorej prekročení nastáva strata stability
- subštruktúry (č. 7) – slúži na vytvorenie matíc sústavy (subštruktúry), ktorá sa dá využiť ako jeden superprvok pri komplexných analýzách využívajúcich daný systém ako subsystém

Príkaz, ktorý sa môže využiť namiesto GUI, má syntax

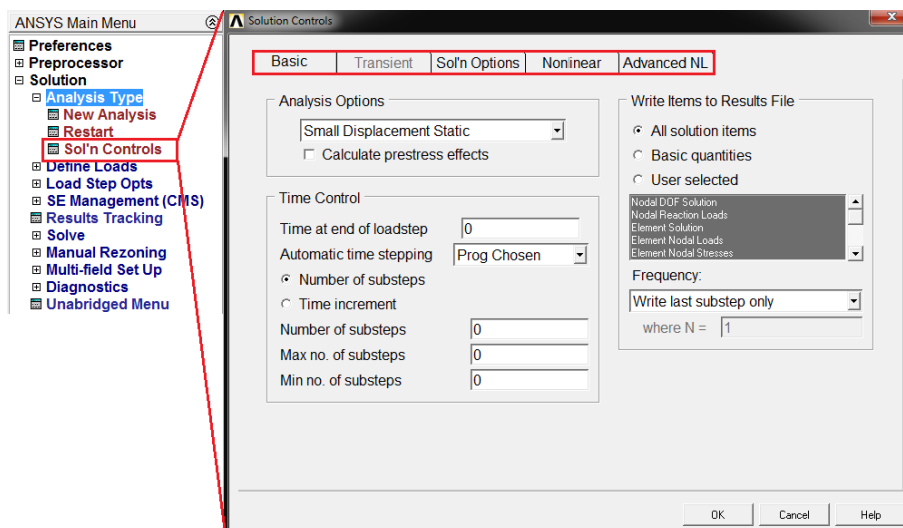
ANTYPE, Antype

kde *Antype* predstavuje číselnú skratku daného typu analýzy (číselné skratky jednotlivých analýz sú uvedené v zátvorke pri jednotlivých analýzách vyššie), samotný príkaz

môže mať aj ďalšie parametre nastavenia. Pri niektorých typoch analýzy je povinné explicitne pomocou ďalších príkazov definovať typ riešiča (napr. pri modálnej analýze), pričom tieto príkazy budú definované pri riešení konkrétnych úloh.

Pre každú z týchto štrukturálnych analýz platia určité obmedzenia súvisiace s nastavením riešiča, okrajových a počiatočných podmienok a pod.

Ďalšia dôležitá oblasť, ktorá sa nastavuje v položke Analysis Type sú doplnkové nastavenia analýzy, čo sa aktivuje postupnosťou krokov Solution → Analysis Type → Sol'n Controls – obr. 3.31.



Obr. 3.31. Doplnkové nastavenia analýzy

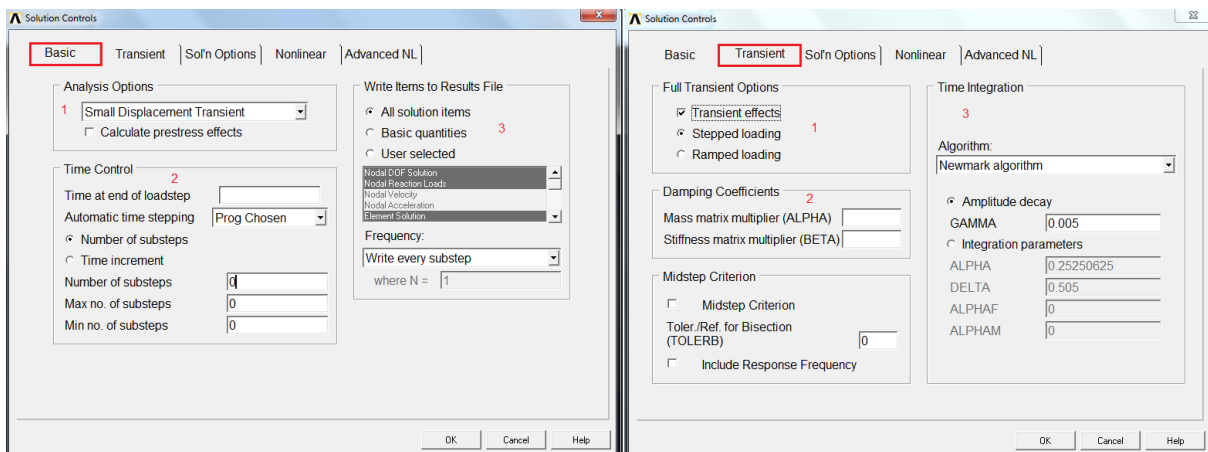
V tabuľke, ktorá sa aktivovala pomocou tohto GUI príkazu, je k dispozícii päť záložiek (obr. 3.31):

1. Basic – základné nastavenia analýzy,
2. Transient – nastavenia zaoberajúce sa prechodovou analýzou,
3. Sol'n Options – doplnkové nastavenia ohľadom použitého riešiča,
4. Nonlinear – doplnkové nastavenia nelineárneho riešiča,
5. Advanced NL – rozšírené nastavenia nelineárneho riešiča.

V ďalšom texte budú opísané iba prvé dve záložky, t. j. Basic a Transient, lebo tie majú najväčší význam a čitateľ sa práve s nimi môže s najväčšou pravdepodobnosťou stretnúť.

Záložka Basic (obr. 3.32 vľavo):

1. Analysis Options – nastavuje, či model bude pracovať s malými posunutiami a pretvoreniami (tzv. geometricky lineárna úloha) alebo veľkými posunutiami (tzv. geometricky nelineárna úloha) – viac v kapitole 5.2.2.



Obr. 3.32. Doplňkové nastavenia analýzy – záložky Basic a Transient

2. **Time Control** – pre prechodové úlohy, ale aj pre statické nelineárne úlohy (pri riešení využívajú tzv. „falošný“ čas) sa v tejto časti nastavujú veľkosti časových krokov aj samotný spôsob krokovania – viac v kapitole 9.4.1.
3. **Write Items to Results File** – definuje, čo všetko a ako často sa má zapisovať do výsledkového súboru – viac v kapitole 9.4.1.

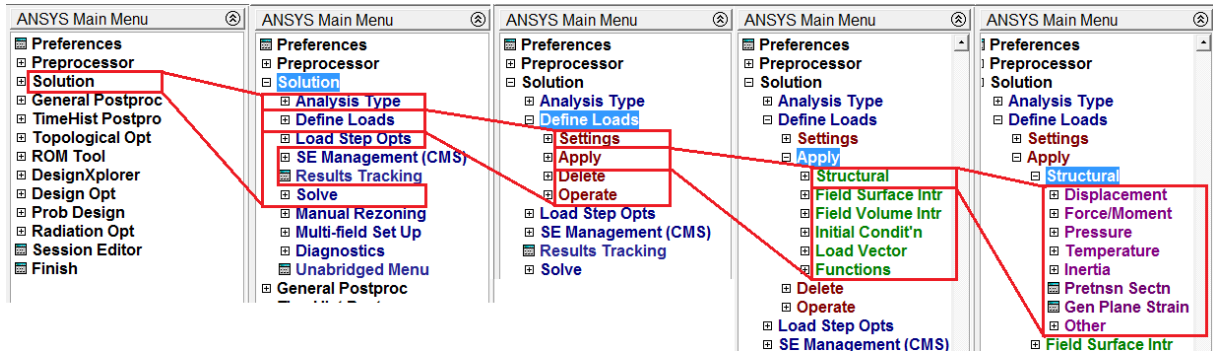
Záložka Transient (obr. 3.32 vpravo):

1. **Full Transient Options** – v tejto položke sa nastavuje, či prechodový model bude zahŕňať aj zotrvačné a viskózne sily (Transient effects zapnutý znamená, že tieto sily budú zahrnuté v modeli), takisto sa tu definuje, či zaťaženie je skokové alebo rampové – viac v kapitole 9.4.1.
2. **Damping Coefficients** – pre prechodové úlohy umožňuje definovať parametre Rayleighho tlmenia – rovnica (9.7) v kapitole 9.2.
3. **Time Integration** – definuje algoritmus použitý na časovú integráciu aj parametre daného algoritmu – viac v kapitole 9.3.

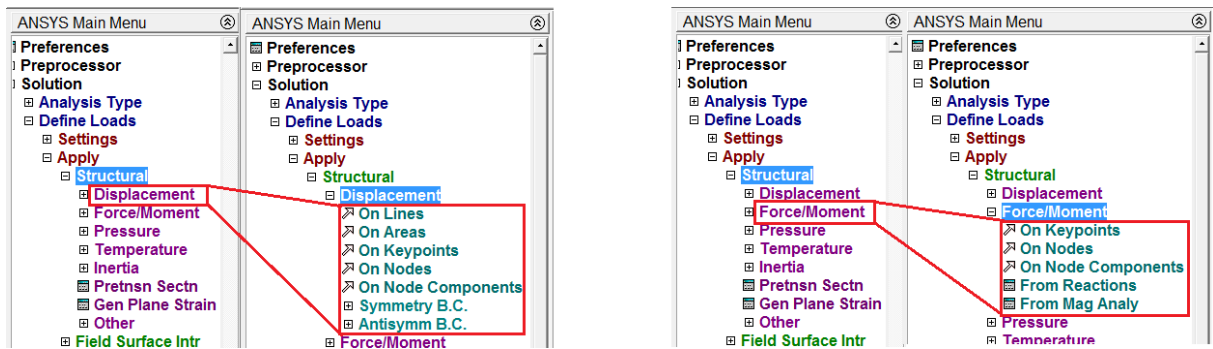
Define Loads

Definovanie okrajových podmienok (teda väzieb a záťaží) závisí od samotnej úlohy, ktorá sa rieši, aj od typu analýzy. Definovanie okrajových podmienok pre štruktúrnu (teda mechanickú) analýzu sa realizuje v položke: **Solution** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** – obr. 3.33.

Ako je vidno z tohto obrázku v menu úplne vpravo, pri výbere okrajových podmienok pre štruktúrnu analýzu je k dispozícii viacero možností, ako definovať tieto okrajové podmienky. Najdôležitejších je prvých päť položiek, t. j. definovanie posunutí (**Displacement**), síl a momentov (**Force/Moment**), tlakov (**Pressure**), teplôt (**Temperature**) a zotrvačných účinkov (**Inertia**). Na obr. 3.34 sú zobrazené ponuky iba pre posunutia, sily a momenty. Ako je z tohto obrázku vidieť, posunutia, ale aj sily a momenty, môžu byť predpisované tak na MKP entity (uzly), ako aj na geometrické entity (body, čiary a plochy). Z hľadiska MKP môžu byť všetky veličiny predpísané iba do uzlov, takže veličiny definované



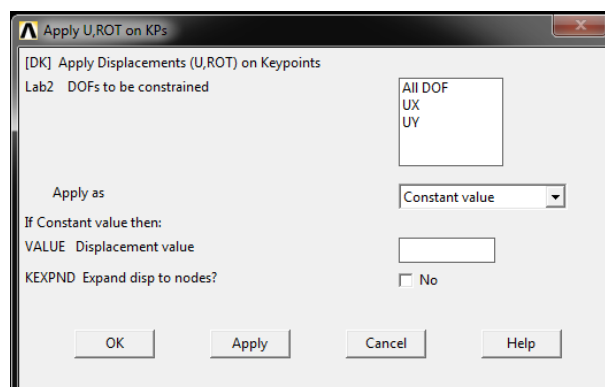
Obr. 3.33. Definovanie okrajových podmienok



Obr. 3.34. Definovanie posunutí, síl a momentov

na geometrické entity musia byť pretransformované do uzlov. Toto pretransformovanie sa uskutočňuje plne automaticky v okamihu, keď užívateľ spustí samotný výpočet (napr. príkazom *SOLVE*), ale túto transformáciu môže uskutočniť užívateľ aj pred samotným výpočtom pomocou príkazu *Solution* → *Define Loads* → *Operate* → *Transfer to FE* → *All Solid Lds*, resp. príkazom *SBCTRN*.

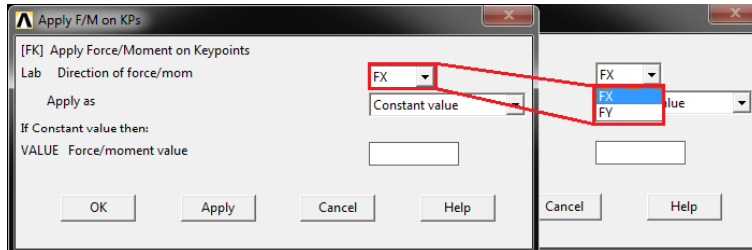
Ako príklad práce s týmito GUI príkazmi bude ukázané definovanie posunutí a síl pôsobiacich v bode (Keypoint). Po aktivovaní príkazu pre definovanie posunutia na bod (*Displacement* → *On Keypoints*) sa zobrazí výberové menu – obr. 3.19 a po výbere bodu, ktorému chceme predpísať posunutie, sa zobrazí menu – obr. 3.35. Ako je z tohto obrázku



Obr. 3.35. Definovanie posunutia na bod

vidno, v položke DOFs to be constrained sa definuje stupeň voľnosti (DOF – Degree of free-

dom), ktorému bude predpísaná určitá číselná hodnota. Vybraný DOF musí byť označený a tým aj vysvietený na modro. Samotná číselná hodnota sa predpisuje do políčka VALUE. Ak sa toto políčko nechá prázdne, danému DOF sa predpisuje automaticky hodnota 0. Pri definovaní posunutí na iné geometrické entity je postup veľmi podobný. Pri aktivovaní definovania sily pôsobiacej v bode (Force/Moment → On Keypoints) sa opäť zobrazí výberové menu – obr. 3.19 a po výbere bodu, ktorému chceme predpísať silu sa zobrazí menu – obr. 3.36. Aj v tomto menu sa predpisuje smer pôsobenia sily a samotná



Obr. 3.36. Definovanie sily na bod

hodnota sily.

Ak by sme chceli definovať posunutia pomocou príkazov, využili by sme príkazy z kategórie *D* v závislosti na entite, pre ktorú chceme definíciu uskutočniť, t. j. *D*, *DK*, *DL*, *DA*. Napr. pri predpísaní posunutia pre uzol č. 2 v smere X na hodnotu 0,2 (opäť úmyselne bez jednotiek) by sme napísali

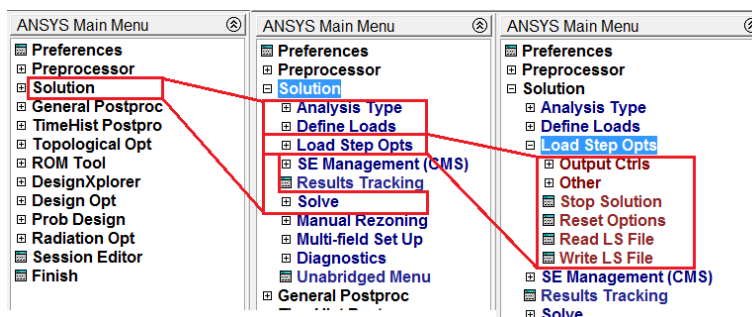
D,2,UX,0.2

Pri definovaní síl a momentov môžeme použiť príkazy z kategórie *F*, t. j. *F* a *FK*, resp. pri predpisovaní tlakov sú to príkazy z kategórie *SF*, t. j. *SF*, *SFE*, *SFL*, *SFA*. Napr. pri definovaní tlaku 0,8 pre plochu č. 6 by sme do príkazového riadku napísali

SFA,6, ,PRES,0.8

Load Step Opts

Položka Load Step Opts sa aktivuje pomocou Solution → Load Step Opts – obr. 3.37. Z danej voľby je veľmi užitočná možnosť zápisu súboru so záťažami (tzv. LS súbor, t. j.



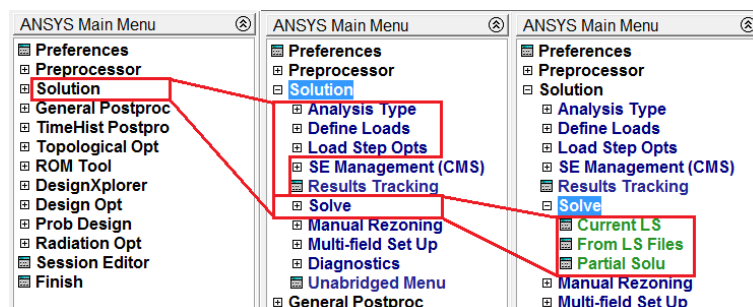
Obr. 3.37. Možnosti položky Load Step Options

Load Step súbor) – príkaz Write LS File a čítanie z tohto súboru Read LS File. Tieto dva

príkazy sa dajú využiť pri viackrokových zaťaženiach, ktoré sa môžu vyskytovať tak pri statických, ako aj pri dynamických úlohách.

Solve

Posledný krok, ktorý je potrebný v rámci fázy Solution vykonať, je spustenie samotného výpočtu. Tento krok sa aktivuje príkazmi Solution → Solve – obr. 3.38. Spustenie výpočtu



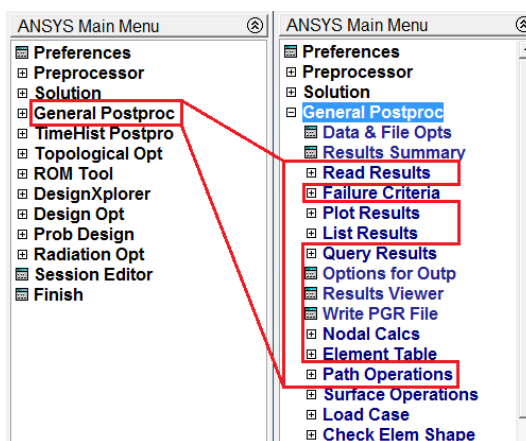
Obr. 3.38. Možnosti položky Solve

sa realizuje pomocou aktivovania príkazu Current LS (t. j. výpočet pre aktuálny záťažový krok), alebo pomocou From LS File. Pri tomto druhom variante spustenia riešiča sa do novootvoreného okna vpisujú čísla LS súborov, ktoré sa použijú vo výpočte.

Ak by sme chceli aktivovať výpočet pomocou príkazového riadku, najjednoduchšie je napísať príkaz *SOLVE* bez parametrov.

3.4.3 General Postprocessor

Táto fáza sa aktivuje otvorením General Postproc alebo pomocou príkazu */POST1* – obr. 3.39. Základné funkcie, ktoré sa využívajú v položke General Postproc sú:



Obr. 3.39. Hlavné kroky v General Postprocessore

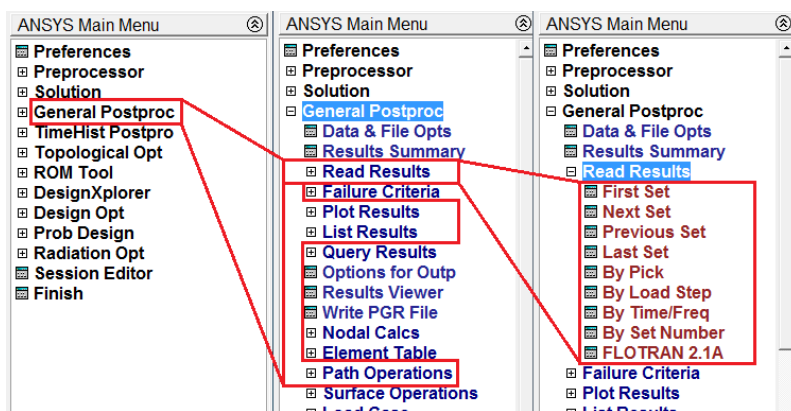
1. Read Results – načítanie výsledkov, tento krok má význam vtedy, ak záťaž resp. okrajové podmienky sú definované ako viackrokové, potom v závislosti od nastavenia parametrov vo fáze Solution, je vytvorených niekoľko sád (v angličtine set) výsledkov (všetky ale v jednom výsledkovom súbore).

2. Plot Results – vykreslenie výsledkov, pre zvolenú výsledkovú sadu umožňuje vykresliť zvolené fyzikálne veličiny.
3. List Results – číselné zobrazenie výsledkov, pre zvolenú výsledkovú sadu umožňuje číselne vypísať výsledky zvolených fyzikálnych veličín.
4. Path Operations – vykreslenie výsledkov na určitej ceste, pre zvolenú výsledkovú sadu umožňuje graficky aj číselne zobraziť zvolenú fyzikálnu veličinu na predom definovanej geometrickej ceste.

Ostatné príkazy, ktoré sa využívajú pri analýze výsledkov, budú prezentované postupne pri riešení jednotlivých príkladov.

Read Results

Ako už bolo naznačené, výber tejto položky má význam iba vtedy, keď výsledkový súbor obsahuje viac výsledkových sád. Ak bola realizovaná simulácia iba v rámci jedného záťažového kroku bez tzv. substepov (o týchto pojmoch sa bližšie zmiňuje kapitola 9), potom je k dispozícii iba jedna výsledková sada a tento krok sa môže vynechať. Ak ale je k dispozícii viacero výsledkových sád, užívateľ v tomto kroku vyberá tú výsledkovú sadu, pre ktorú budú následne vykonané ďalšie príkazy v Postprocesore. Položka načítavania výsledkových sád sa aktivuje takto: General Postproc → Read Results – obr. 3.40.



Obr. 3.40. Ponuka položky Read Results

Ak chceme využiť príkazový riadok, príkaz na načítanie jednotlivých výsledkových sád sa volá *SET*. Má viacero parametrov, ale to najjednoduchšie použitie je

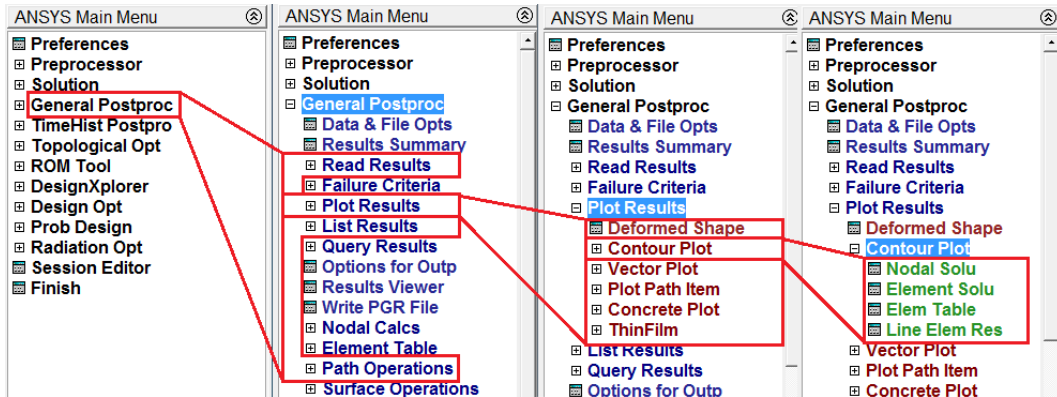
SET, Lstep, Sbstep

kde *Lstep* je číslo záťažového kroku a *Sbstep* je číslo podkroku (tzv. substepu). Napr. ak by sme chceli načítať výsledkovú sadu pre druhý zaťažovací krok a posledný podkrok v tomto kroku, príkaz by mal tvar

SET, 2, LAST

Plot Results

Táto časť General Postprocessoru je najdôležitejšia, lebo poskytuje užívateľovi široké možnosti zobrazenia dosiahnutých výsledkov. Aktivovanie tejto položky spolu s možnosťami vykreslenia obrysových výsledkov (Contour Plot) je zobrazené na obr. 3.41.



Obr. 3.41. Možnosti vykreslenia kontúr pre danú fyzikálnu veličinu

Základné príkazy položky Plot Results, ktoré užívateľ najčastejšie využíva, sú:

- **Deformed Shape** – v štruktúrnych analýzach umožňuje zobraziť zdeformovaný tvar modelovaného systému, slúži na veľmi rýchlu orientáciu užívateľa, ako sa systém deformuje, či sú dobre predpísané okrajové podmienky apod. Textový príkaz sa volá *PLDISP* a má syntax

PLDISP, KUND

kde *KUND* je číselný parameter 0, 1 alebo 2 podľa toho, či chceme zobraziť iba deformovanú štruktúru (0), deformovanú aj nedeformovanú štruktúru (1) alebo deformovanú štruktúru a hlavné obrysy nedeformovaného systému (2)

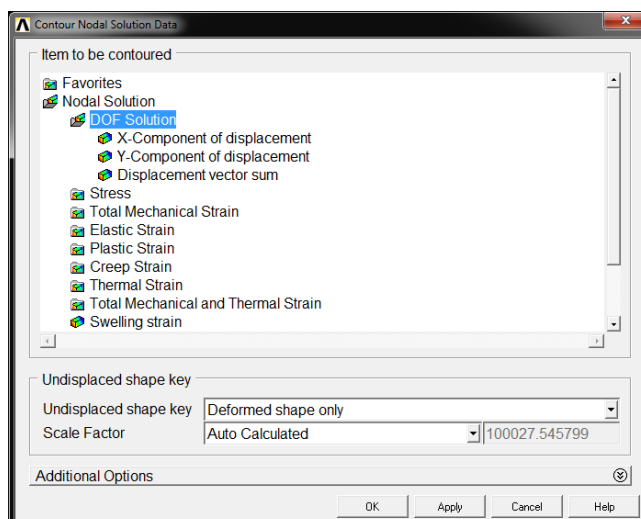
- **Contour Plot** – umožňuje grafické zobrazenie sledovanej fyzikálnej veličiny vo forme farebnej mapy s kontúrami. Ako je vidno na obr. 3.41, táto voľba má ďalšie položky, ktoré budú vysvetlené nižšie.
- **Vector Plot** – umožňuje graficky zobraziť vektorové fyzikálne veličiny. Príkaz sa volá *PLVEC* a najjednoduchšie použitie má syntax

PLVEC, Item

kde *Item* predstavuje fyzikálnu veličinu, ktorá bude zobrazená, napr. pre vektorové zobrazenie posunutí sa realizuje príkazom

PLVEC, U

Položka Contour Plot obsahuje najvyužívanejšiu sadu príkazov pre grafické zobrazenie výsledkov – obr. 3.41 úplne vpravo. Obsahuje štyri základné príkazy:



Obr. 3.42. Možnosti zobrazenia uzlových riešení

1. Nodal Solu – predstavujú tzv. uzlové riešenia a po aktivovaní tejto položky sa objaví menu – obr. 3.42. V tomto okne si užívateľ zvolí tú fyzikálnu veličinu, ktorú chce vykresliť, pričom ak daná veličina má vektorový (napr. posunutie) alebo tenzorový (napr. napätie) charakter, musí zvoliť aj zložku, ktorú chce vykresliť. Príkaz je možné vykonať aj pomocou textového príkazu *PLNSOL*, kde najzákladnejšie parametre tohto príkazu sú

PLNSOL,Item,Comp

kde *Item* predstavuje skúmanú fyzikálnu veličinu a *Comp* jej zložku. Napr. ak chceme vykresliť posunutie v smere osi Y globálneho súradnicového systému, potom príkaz zapíšeme takto

PLNSOL,U,Y

2. Element Solu – predstavuje tzv. prvkové (elementové) riešenia. Aktivácia ako aj ponuka na výber je veľmi podobná ako pri uzlových riešeniach. Vykonanie zobrazenia prvkových riešení je možné aj pomocou príkazu *PLESOL* s podobným nastavením parametrov ako je pri *PLNSOL*. Napr. pre zobrazenie napätí v smere osi X globálneho súradnicového systému by príkaz mal tvar

PLESOL,S,X

Najväčší rozdiel medzi Nodal Solu a Element Solu spočíva vo význame jednotlivých výsledkov. V MKP sa samotné výsledky (resp. neznáme) rozdeľujú do dvoch hlavných kategórií: primárne a sekundárne. Primárne neznáme predstavujú fyzikálne veličiny, ktoré sú priamo (primárne) počítané z MKP rovníc. Primárne veličiny sú priamo obsiahnuté v položke Nodal Solu. O tom, ktoré veličiny sú primárne neznáme, rozhoduje formulácia MKP ako aj samotná fyzikálna úloha. Napr. pri riešení problémov mechaniky pri deformačnej formulácii MKP sú primárne neznáme posunutia v jednotlivých uzloch systému a pri tepelnej analýze sú primárne neznáme teploty v

jednotlivých uzloch. Sekundárne veličiny predstavujú také fyzikálne veličiny danej úlohy, ktoré sa vypočítajú pomocou primárnych veličín. Napr. v mechanike sú to mechanické napätia a v tepelnej analýze je to hustota tepelného toku. Na základe analýzy bolo dokázané [1], že výpočet sekundárnych veličín je o jeden rád presnejší v špeciálne zvolených bodoch prvku, ktoré sa volajú Gaussove body (v niektorej literatúre sa tiež nazývajú Barlowove body). Tieto body ležia vo vnútri prvku, t. j. nezhodujú sa s uzlovými bodmi. Tieto sekundárne veličiny sa počítajú pre každý prvok samostatne a tým, že sa počítajú v Gaussovych bodoch, sekundárne veličiny na hranici jednotlivých prvkov vykazujú nespojitosť. Takto nespojité vypočítané sekundárne veličiny sa nachádzajú v položke **Element Solu**. Nespojité veličiny sa numericky vyhladzujú tak, aby nastala spojitosť danej fyzikálnej veličiny na hranici prvkov. Takto vyhladené spojité sekundárne veličiny sa nachádzajú v položke **Nodal Solu**.

Prvkové riešenia (t. j. nespojité – **Element Solu**) majú význam najmä pri určovaní, či hustota siete v danej oblasti je dostatočná alebo nie. Ak v skúmanej časti na niektorých prvkoch je gradient skúmanej veličiny príliš veľký, táto oblasť by mala byť zjemnená.

3. **Elem Table** – cez túto položku užívateľ môže pristupovať k ďalším výsledkom, ktoré nie sú iným spôsobom prístupné. Pre každý prvok je v jeho manuálovej stránke uvedené, aké veličiny a za akých podmienok (napr. špeciálne nastavené keyoptions daného prvku) možno pristupovať k týmto výsledkom, ktoré ale najskôr musia byť zadané cez **General Postproc** → **Element Table** → **Define Table**. Syntax textového príkazu na zadanie veličín je

ETABLE,Lab,Item,Comp

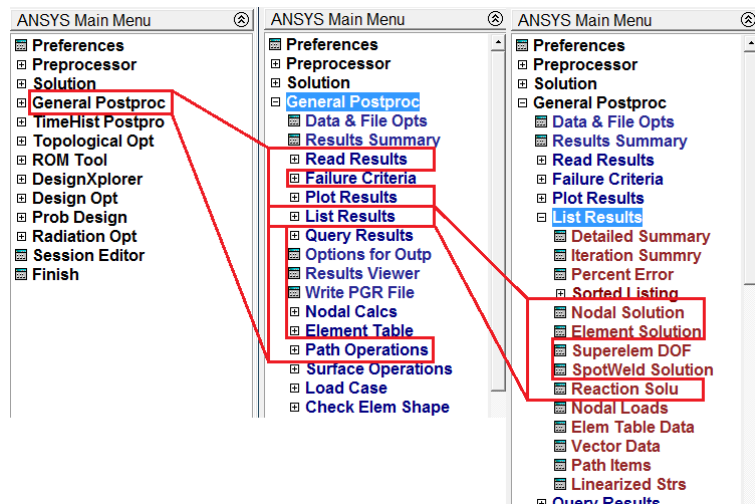
kde parameter *Lab* je užívateľom definovaný názov pre danú veličinu, parametre *Item* a *Comp* závisia od typu prvku. Samotné vykreslenie veličiny s názvom *Lab* sa realizuje pomocou príkazu

PLETAB,Lab,Avglab

kde parameter *Avglab* definuje, či elementová veličina bude spriemerovaná, alebo nie.

4. **Line Elem Res** – je to špeciálna voľba pre zobrazovanie výsledkov na čiarových prvkoch. Podobne ako pri predchádzajúcom príkaze, aj tu musia byť veličiny najskôr zadané pomocou príkazu *ETABLE*, a až následne môžu byť tieto veličiny vykreslené cez položku **Line Elem Res**. Tento príkaz vyžaduje zadanie až dvoch veličín, t. j. veličiny v uzle *i* a v uzle *j*, pričom každá z nich má vlastný užívateľom definovaný názov, napr. *LabI* a *LabJ*. Potom textová verzia príkazu na vykreslenie týchto veličín je

PLLS,LabI,LabJ



Obr. 3.43. Možnosti zobrazenia výsledkov v textovej forme

List Results

Táto časť General Postprocessor zabezpečuje zobrazenie požadovaných výsledkov v textovej, resp. tabuľkovej forme. Možnosti tejto položky sú zobrazené na obr. 3.43. Medzi najčastejšie používané položky patria:

- Nodal Solution – táto položka je prakticky zhodná s položkou Nodal Solu v Contour Plot zobrazenej na obr. 3.42. Cieľom tejto položky je vypísať výsledky riešenia v aktívnych uzloch v textovej forme, pričom tieto hodnoty sa dajú následne exportovať do súboru a v prípade potreby, spracovať pomocou externých programov. Syntax príkazu je

PRNSOL,Item,Comp

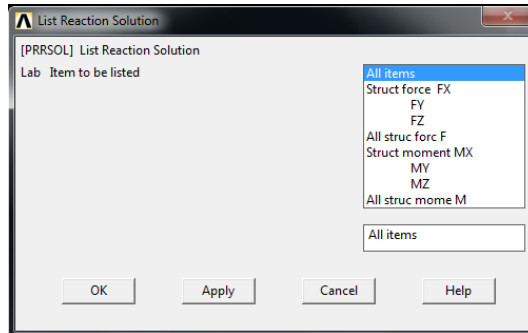
kde *Item* definuje skúmanú fyzikálnu veličinu a *Comp* jej zložku.

- Element Solution – predstavuje textovú verziu príkazu na vykreslenie prvkových riešení. Syntax príkazu je rovnaká ako pri uzlových riešeniach (*PRNSOL*), jediné čo sa mení je názov príkazu: *PRESOL*.
- Reaction Solu – táto položka umožňuje zobraziť v textovej forme reakcie, t. j. hodnoty veličín (napr. v mechanike sú to sily, v termomechanike tepelný tok, v elektrickej prúdovej analýze prúdy apod.) v miestach, kde sú predpísané veličiny vo forme okrajových podmienok (v mechanike sú to posunutia, v termomechanike teploty, v elektrickej prúdovej analýze elektrické napätia). Po aktivovaní tejto položky sa zobrazí menu – obr. 3.44.

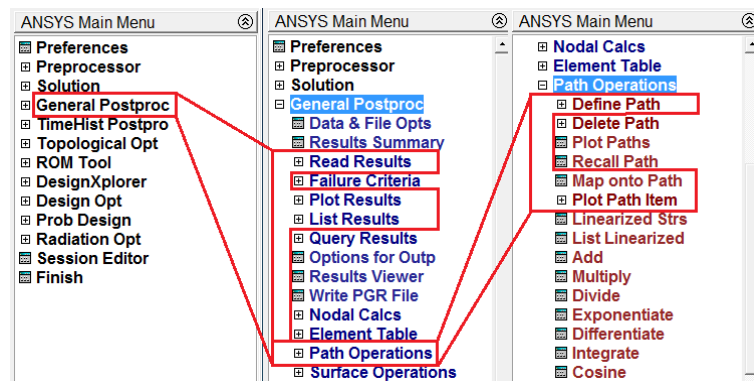
Príkaz možno aktivovať aj pomocou textovej formy, a to takto

PRRSOL,Lab

kde *Lab* predstavuje názov reakčnej položky, ktorý chceme vylistovať, napr. pri zobrazení zložky reakčných síl v smere osi X má príkaz syntax



Obr. 3.44. Možnosti zobrazenia reakcií



Obr. 3.45. Zobrazenie položky Path Operations

PRRSOL,FX

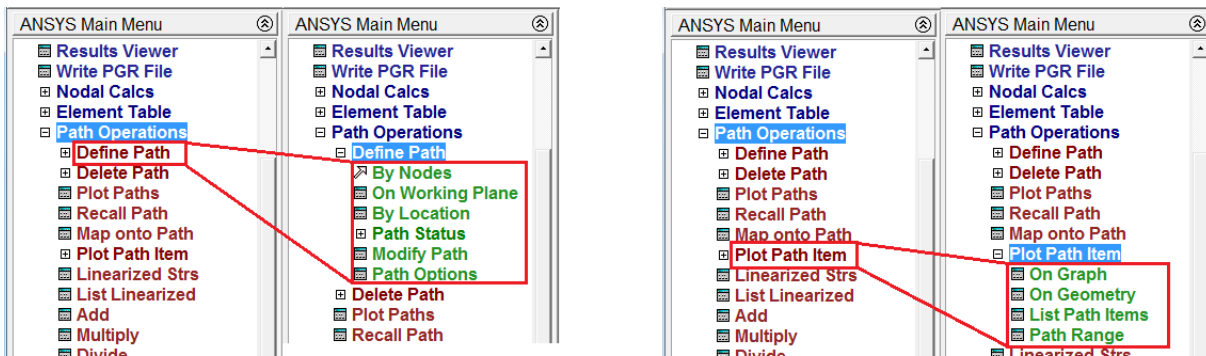
Path Operations

Položka **Path Operations** (tiež budeme ďalej používať názov cesta) je veľmi užitočná pri analyzovaní výsledkov na určitej podoblasti z celého systému – napr. na určitej čiare alebo oblúku. Najdôležitejšie položky tejto skupiny príkazov sú zobrazené na obr. 3.45.

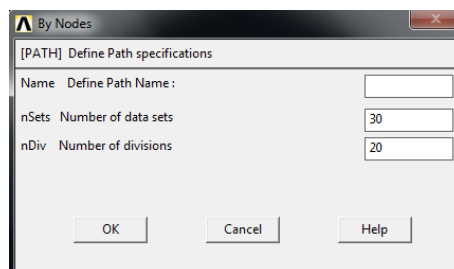
Základné operácie, ktoré sú potrebné pri práci s cestou vykonať, možno rozdeliť do troch krokov:

- **Define Path** – táto položka slúži na definovanie cesty, na ktorej chceme zobraziť výsledky. Jednotlivé spôsoby definovania samotnej cesty sú zobrazené na obr. 3.46 vľavo.

Najjednoduchší spôsob definovania cesty je pomocou položky **By Nodes**, ktorá aktívuje výberové menu na uzly – obr. 3.19. Pomocou tohto menu vyberieme uzly, ktoré budú definovať cestu. V prípade, že cesta bude priama čiara, stačí vybrať iba prvý a posledný uzol cesty. Po výbere týchto bodov a stlačení tlačidla **OK** sa zobrazí menu definovania cesty – obr. 3.47. Do položky **Name** v tomto menu je potrebné napísať názov cesty (napr. *c1*), položka **nSets** definuje koľko rôznych parametrov môže byť do cesty namapovaných. Najzaujímavejší parameter tohto menu je **nDiv**, ktorý hovorí o tom, koľko bodov bude automaticky vytvorených medzi dvoma susednými bodmi, ktoré vytvoril užívateľ na definovanie cesty. Po stlačení tlačidla **OK** je cesta



Obr. 3.46. Definovanie cesty – vľavo, zobrazenie výsledkov na ceste – vpravo



Obr. 3.47. Menu definovania cesty

napr. s názvom *c1* vytvorená. Samotná cesta môže byť vytvorená aj pomocou príkazov, tu sú ale potrebné dva príkazy, a to nasledujúco definované

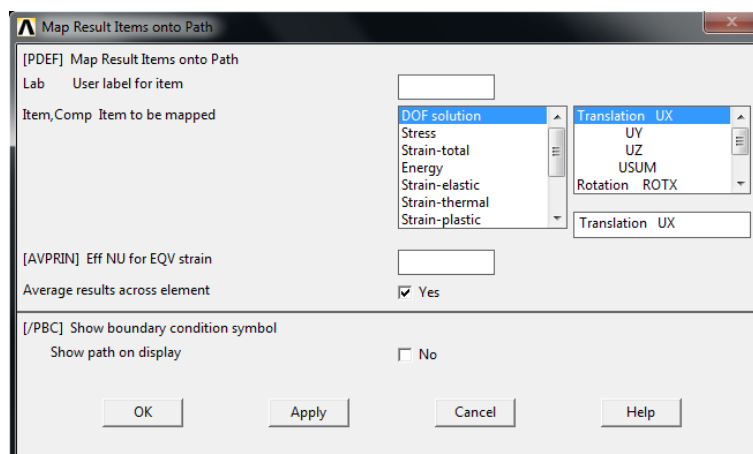
PATH,NAME,nPts,nSets,nDiv
PPATH,POINT,NODE

Príkaz *PATH* má položky *NAME*, *nSets* a *nDiv* zhodné s opisom týchto položiek pri príkaze definovanom cez GUI, nová položka je *nPts*, ktorá definuje počet bodov, pomocou ktorých je cesta definovaná. Za týmto príkazom nasleduje príkaz *PPATH*, ktorý definuje jednotlivé body cesty a musí byť toľkokrát použitý, koľkými bodmi je cesta definovaná. Položka *POINT* určuje, ktorý bod cesty ideme definovať (prvý, druhý atď.) a položka *NODE* určuje číslo uzla, ktorý je priradený danému bodu cesty. Takže napr. ak je cesta s názvom *c1* definovaná pomocou dvoch uzlov (uzol č. 3 a 2) a chceli by sme medzi týmito dvoma bodmi mať vytvorených ďalších 40 bodov cesty, syntax by vyzerala takto

PATH,c1,2, ,40
PPATH,1,3
PPATH,2,2

- Map onto Path – táto položka slúži na priradenie (mapovanie) fyzikálnych veličín do jednotlivých bodov definovanej cesty. Po aktivovaní tejto položky sa zobrazí výberové menu – obr. 3.48.

Do položky *Lab* užívateľ zadáva názov, pod ktorým je daná fyzikálna veličina namapovaná do jednotlivých bodov cesty. Čo sa reálne mapuje do cesty, sa vyberá



Obr. 3.48. Priradenie (mapovanie) fyzikálnych veličín do jednotlivých bodov definovanej cesty

cez položky *Item* a *Comp*, teda aká fyzikálna veličina a v prípade vektorovej alebo tenzorovej veličiny, ktorá jej zložka. Po stlačení tlačidla **OK** je mapovanie ukončené. Textová forma tohto príkazu vyzerá takto

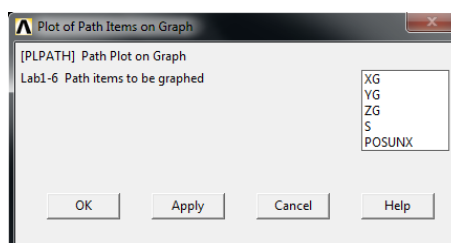
PDEF,Lab,Item,Comp

Význam jednotlivých položiek je rovnaký ako pri definovaní príkazu pomocou GUI. Napr. pri mapovaní posunutí v smere osi *X* s označením *POSUNX* bude mať príkaz tvar

PDEF,POSUNX,U,X

- **Plot Path Item** – posledný krok, ktorý je potrebné vykonať, je vykreslenie alebo vylistovanie výsledkov pre danú cestu. Možnosti tejto položky sú zobrazené na obr. 3.46 vpravo. Najčastejšie sa používa zobrazenie výsledkov cesty do grafu – **On Graph** a vylistovanie – **List Path Item**.

Pri aktivovaní položky **On Graph** sa zobrazí výberové menu – obr. 3.49.



Obr. 3.49. Zobrazenie mapovaných veličín, ktoré je možné zobraziť

Po vybraní veličiny, ktorú chceme zobraziť v grafe a stlačení tlačidla **OK**, sa zobrazí priebeh skúmanej veličiny ako funkcia polohy na definovanej ceste. Syntax príkazu je

PLPATH,Lab1,...,Lab6

kde *Lab1* až *Lab6* predstavuje názvy mapovaných veličín. Teda súčasne je možné v jednom grafe zobraziť až šesť veličín definovaných pomocou príkazu *PDEF*. Napr. pri grafickom zobrazení veličiny *POSUNX* príkaz vyzerá takto

PLPATH,POSUNX

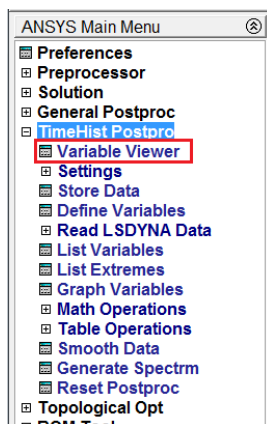
Pri aktivovaní položky *List Path Item* sa zobrazí rovnaké výberové menu ako pri príkaze *On Graph*. Výberom veličiny a potvrdením sa zobrazí skúmaná veličina v textovej forme, ktorú možno exportovať. Textová forma tohto príkazu vyzerá takto

PRPATH,Lab1,...,Lab6

kde význam parametrov *Lab1* až *Lab6* je rovnaký ako pri príkaze *PLPATH*.

3.4.4 Time History Postprocessor

Ako už bolo spomenuté, Time History Postprocessor je postprocesor, ktorý sa využíva pri vykreslení časového (alebo frekvenčného) priebehu sledovanej fyzikálnej veličiny v danom skúmanom uzle. Základné položky, ktoré tento postprocesor ponúka, sú zobrazené na obr. 3.50.

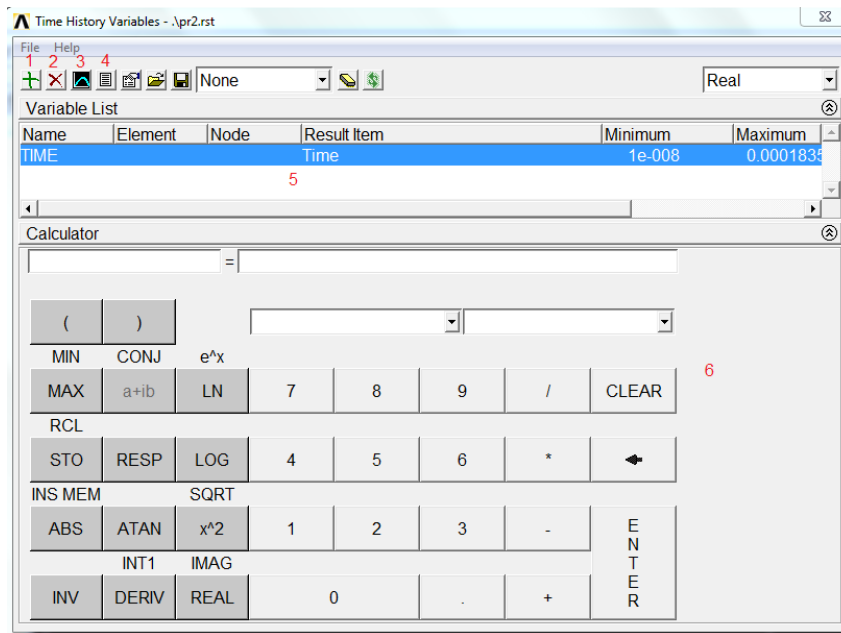


Obr. 3.50. Možnosti položky Time History Postprocessor

Aktivovanie tohto postprocesoru je buď v GUI otvorením položky *TimeHist Postpro* alebo pomocou príkazu */POST26*.

Najviac využívaná položka je *Variable Viewer*. Po aktivovaní tohto príkazu sa zobrazí ponuková tabuľka Time History Variables tohto príkazu – obr. 3.51. Najdôležitejšie položky z tabuľky Time History Variables sú:

1. *Add Data* (obr. 3.51 – číslo 1) – pomocou tejto položky pridávame jednotlivé fyzikálne veličiny skúmaných bodov do položky *Variable List*, ktorá nám umožňuje vykreslenie, vylistovanie alebo iné spracovanie časovo závislých vypočítaných výsledkov. Po aktivovaní tejto položky sa zobrazí ponuková tabuľka – obr. 3.52, kde je potrebné vybrať fyzikálnu veličinu (v prípade vektorovej a tenzorovej veličiny aj jej zložku), ktorú budeme chcieť zobraziť (či už v grafickej alebo textovej forme), v položke *Variable Name* definovať užívateľský názov tejto veličiny a po stlačení tlačidla *OK* sa zobrazí výberové menu, ktoré nám umožní graficky vybrať príslušný

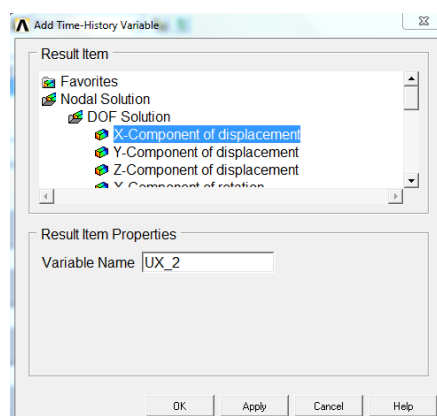


Obr. 3.51. Tabuľka príkazu Variable Viewer

uzol, ktorého veličinu chceme pridať do spomínanej položky Variable List. Textový príkaz, ktorý je možné použiť na definovanie týchto dát je *NSOL*, pričom syntax tohto príkazu je

NSOL,NVAR,NODE,Item,Comp,Name

kde *NVAR* je číselný identifikátor premennej (musí sa rovnať alebo byť väčší ako 2, jednotka je rezervovaná pre premennú čas resp. frekvenciu), *NODE* je číslo uzla, s ktorého fyzikálnymi dátami sa bude ďalej pracovať, *Item* a *Comp* predstavuje samotnú fyzikálnu veličinu a jej zložku (pri vektorových a tenzorových veličinách) a *Name* je už spomínaný užívateľom definovaný názov.



Obr. 3.52. Výberové okno položky Add Data

2. Delete Data (obr. 3.51 – číslo 2) – táto položka slúži na zmazanie dát, ktoré boli vytvorené prostredníctvom Add Data.

3. **Graph Data** (obr. 3.51 – číslo 3) – tento GUI príkaz vykresľuje danú časovo závislú fyzikálnu veličinu vybranú zo zoznamu **Variable List**. Textový príkaz sa volá *PLVAR* a má syntax

PLVAR, NVAR1, až NVAR10

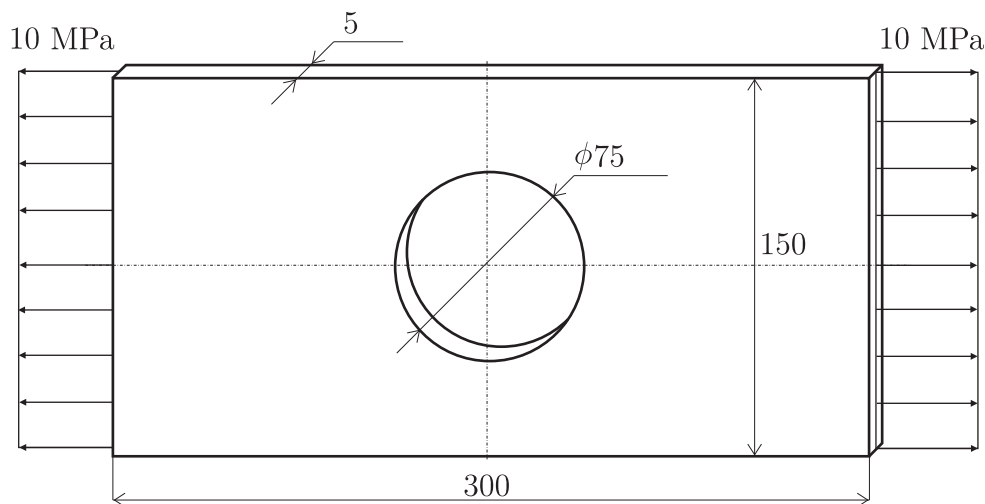
kde parametre *NVAR1* až *NVAR10* predstavujú čísla premenných definovaných pomocou príkazu *NSOL*.

4. **List Data** (obr. 3.51 – číslo 4) – umožňuje číselne vylisovať hodnoty definovaných premenných. Textový príkaz je *PRVAR* a syntax je rovnaká ako pri príkaze *PLVAR*, jediný rozdiel je v tom, že pri vylisovaní je možné naraz vylisovať iba šesť premenných.
5. položka **Variable List** (obr. 3.51 – číslo 5) – zobrazuje definované premenné.
6. položka **Calculator** (obr. 3.51 – číslo 6) – slúži na matematické operácie s premennými.

3.5 Príklad tvorby modelu

Zadanie

Na prvé oboznámenie sa užívateľov s programom ANSYS Classic, bola vybraná veľmi jednoduchá úloha – obr. 3.53.



Obr. 3.53. Príklad tvorby modelu – doska s otvorom, rozmery sú v [mm]

Ide o dosku 300×150 mm hrúbky 5 mm, ktorá má v prostriedku otvor priemeru 75 mm. Doska je vyrobená z ocele, ktorej vlastnosti sú: modul pružnosti v ťahu 210 GPa a Poissonovo číslo 0,3, t. j. materiál je izotropný. Doska je namáhaná na ťah spojitým zaťažením 10 MPa. Cieľom je stanoviť deformáciu a napätosť dosky.

Riešenie

Ako je vidno z obr. 3.53, geometria aj záťaž je symetrická vzhľadom na obe roviny symetrie, takže nie je potrebné modelovať celý systém, ale len jeho jednu štvrtinu. Samotná záťaž je aplikovaná na vonkajších hranách, pričom je umožnená deformácia v smere kolmom na plochu dosky, čo samozrejme spôsobí rovinnú napätosť ale priestorové pretvorenie. Takéto správanie sa systému možno modelovať ako problém rovinnej napätosti.

Ako bolo uvedené v kapitole 3.4, celý proces simulácie je rozdelený do troch krokov: Preprocessor, Solution a Postprocessor.

Preprocessor

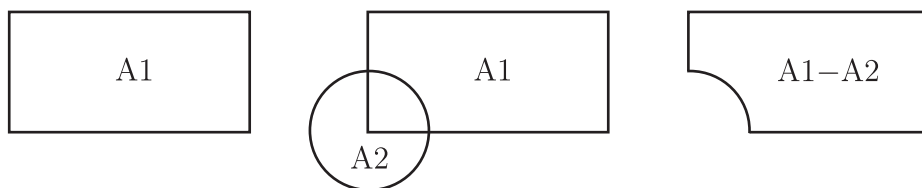
1. Definovanie typu prvku: ak nevieme, aký typ prvku je vhodný na danú analýzu, musíme vhodný prvok vybrať z knižnice pomocou manuálu. Napr. v tomto prípade musíme vybrať prvok, ktorý umožňuje riešiť rovinné úlohy a bude určený na riešenie mechanických úloh s potrebnými stupňami voľnosti. Najjednoduchšia orientácia v manuáli prvkov je podľa geometrie prvku – príkaz *HELP,PLANE*, ktorý zobrazí všetky rovinné prvky v programe ANSYS. Z ponúkanej databázy sú pre nás vhodné také, ktoré majú zároveň DOF UX a UY. Po krátkom prezretí možností zistíme, že vhodný prvok je PLANE182 (ale aj PLANE183, ten je ale kvadratický, t. j. na hranách obsahuje nie dva uzly ale až tri). Ak užívateľ sa s daným prvkom stretol prvýkrát, odporúča sa dôkladne preštudovať vlastnosti a správanie sa daného prvku v manuáli prvkov. Tam by sme tiež zistili, že pre tento prvok rovinná napätosť sa nastavuje prepínačom KEYOPT(3), ktorý má mať hodnotu 3 (detailné informácie o rovinných prvkoch sú uvedené v kapitole 5). Tento prvok sa pridáva buď cez GUI: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → PLANE182 s príslušným nastavením KEYOPT(3) → Plane stress with thickness, alebo jednoduchšie cez príkaz:
/PREP7
ET,1,182, , ,3

2. Definovanie reálnych konštánt: pre toto nastavenie správania sa prvku (KEYOPT(3)=3) je potrebné definovať hrúbku, ktorá bude použitá pri jednotlivých prvkoch. Definovať ju môžeme cez GUI: Preprocessor → Real Constants → Add/Edit/Delete → PLANE182 → 0.005 alebo pomocou príkazu:
R,1,0.005

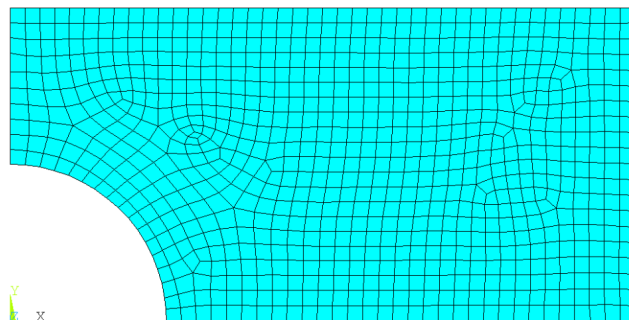
3. Definovanie materiálových vlastností: materiál je možné definovať cez GUI: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → (EX=2.1E11, PRXY=0.3) alebo pomocou príkazov:
MP,EX,1,2.1E11
MP,PRXY,1,0.3

4. Geometria: najjednoduchší spôsob vytvorenia štvrtinovej geometrie je využitie primitívnych útvarov a Booleanovských operácií. Konkrétne tu bude využitý nasledovný postup: vytvorenie plochy obdĺžnika A1, vytvorenie plochy kruhu A2 a odčítanie plochy kruhu A2 od plochy obdĺžnika A1 – obr. 3.54.
Postup vytvorenia geometrie cez GUI:

- vytvorenie plochy obdĺžnika A1: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Rectangle → By Dimensions → (X1=0, X2=0.15, Y1=0, Y2=0.075)



Obr. 3.54. Príklad tvorby modelu – postupnosť tvorby geometrie



Obr. 3.55. Príklad tvorby modelu – vygenerovaná sieť

- vytvorenie plochy kruhu A2: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Circle → By Dimensions → (RAD1=0.0375)
- odčítanie plochy kruhu A2 od plochy obdĺžnika A1: Preprocessor → Modeling → Operate → Booleans → Subtract → Areas → (výber obdĺžnika 1 → Apply výber kruhu 2 → OK)

Ak by sme použili priamo príkazy, syntax by vyzerala takto:

RECTNG, ,0.15, ,0.075

PCIRC,0.0375, ,0,360

ASBA,1,2

5. Sieťovanie: najjednoduchší spôsob sieťovania je využitie tzv. „smartsize“ nastavenia, kde užívateľ nastavuje iba relatívnu jemnosť siete. Cez GUI by sme zadali: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (Sieťovacie menu: Smart size zaškrtnúť a nastaviť na hodnotu 2, stlačiť Mesh) → (výberové menu: zvoliť Pick All).

Pomocou príkazov by sme napísali:

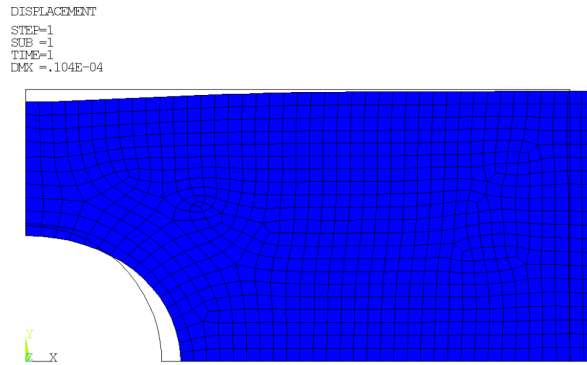
SMRT,2

AMESH,ALL

Vygenerovaná sieť je zobrazená na obr. 3.55.

Solution

1. Definovanie typu analýzy: keďže ide o lineárnu statickú analýzu, nie je potrebné nič nastavovať a tento krok môže byť vynechaný. Ak sme ale mali v predchádzajúcej analýze nastavený iný typ analýzy, musíme spätne nastaviť statickú analýzu, t. j. cez GUI nastaviť: Solution → Analysis Type → New Analysis → Static, alebo cez príkaz:



Obr. 3.56. Príklad tvorby modelu – deformácia

```
/SOLU
ANTYPE,0
```

- Definovanie záťaže: pri tejto úlohe okrem záťaže, ktorá je definovaná priamo v zadaní (10 MPa – obr. 3.53), musia byť do modelu vložené okrajové podmienky, ktoré zabezpečia, že 1/4 model sa bude deformovať rovnako ako celý model. Táto podmienka je splnená odobratím DOF na horizontálnej symetrickej čiare v smere Y a na vertikálnej symetrickej čiare v smere osi X. Cez GUI môžeme spojitú záťaž 10 MPa predpísať takto: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Pressure → On Lines → (výberové menu: vybrať vertikálnu čiaru, na ktorej pôsobí záťaž 10 MPa, OK) → (VALUE=-10E6). Definovanie symetrických okrajových podmienok na čiaru symetrie je cez GUI najjednoduchšie realizovať takto: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → Symmetry B.C. → On Lines → (výberové menu: vybrať obe symetrické čiaru, t. j. čiaru 9 a 10, OK). Alebo pomocou príkazov:


```
SFL,2,PRES,-10E6
DL,9, ,SYMM
DL,10, ,SYMM
```

Čísla jednotlivých čiar sa dajú jednoducho zobrazit takto: Utility Menu → PlotCtrls → Numbering... → (zaškrtnúť políčko LINE), alebo príkazom:


```
/PNUM,LINE,1
```

- Spustenie riešenia: cez GUI sa riešenie aktivuje takto: Solution → Solve → Current LS → OK alebo jednoducho pomocou príkazu:


```
SOLVE
```

Postprocessor

- Zobrazenie zdeformovaného tvaru: zdeformovaný tvar a nedeformovaný obrys sa zobrazí cez GUI: General Postproc → Plot Results → Deformed Shape → (zvoliť Def+undef edge, OK), alebo pomocou príkazov:

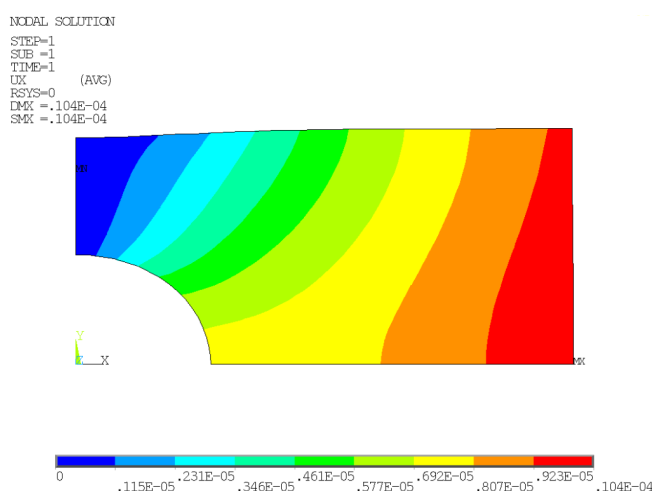

```
/POST1
PLDISP,2
```

Výsledok je zobrazený na obr. 3.56.

Ako je z tohto obrázku vidno, zobrazený je len zdeformovaný tvar, pričom tenkými čiarami je naznačený pôvodný nezdeformovaný tvar telesa. V ľavom hornom rohu sa zobrazuje informácia o zobrazenom výsledku, t. j. na ktorý krok (STEP), podkrok (SUB) a čas (TIME) sa dané výsledky vzťahujú. Takisto sa tam nachádza informácia o maximálnom posunutí (DMX).

- Zobrazenie posunutí a napätí: posunutia v smere X sa zobrazujú cez GUI takto: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (zvoliť DOF Solution → X-Component of displacement, OK), alebo zadaním príkazu: *PLNSOL,U,X*

Výsledné zobrazenie posunutí v smere osi X je zobrazené na obr. 3.57.



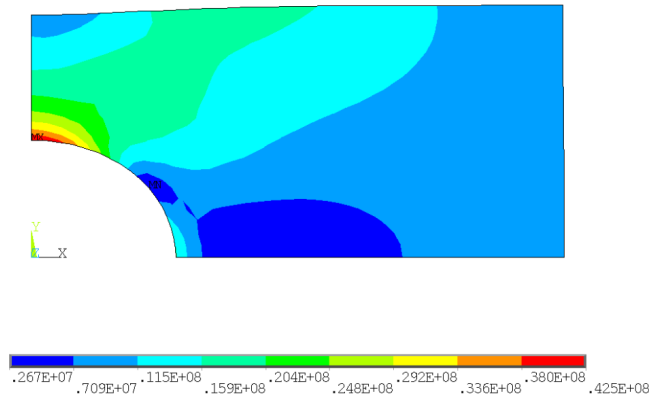
Obr. 3.57. Príklad tvorby modelu – posunutie v smere osi X v [m]

Okrem už definovaných informácií sa v ľavom hornom rohu nachádza základná informácia – ide o NODAL SOLUTION, t. j. pri niektorých výsledkoch (napr. napätia) sú hodnoty určitým spôsobom spriemerované. Tento fakt je zvýraznený označením priemerný AVG v zátvorke vedľa názvu veličiny, ktorá je vykreslená: *UX (AVG)*. Takisto je v tejto časti grafického okna uvedená maximálna hodnota veličiny (SMX), minimálna hodnota veličiny (SMN, tá v obr. 3.57 chýba, lebo je nulová) a maximálne posunutie (DMX). V spodnej časti je farebná aj číselná stupnica, ktorá slúži na orientáciu v obrázku.

Na zobrazenie spriemerovaných (t. j. uzlových) napätí (napr. von Misesových) použijeme GUI postupnosť: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (zvoliť Stress → von Mises stress, OK), alebo: *PLNSOL,S,EQV*

Von Misesove spriemerované napätie je zobrazené na obr. 3.58.

Ak by sme zobrazili nespriemerované (t. j. elementové) napätia, použili by sme GUI postupnosť: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Element Solu → (zvoliť Stress → von Mises stress, OK), alebo: *PLESOL,S,EQV*



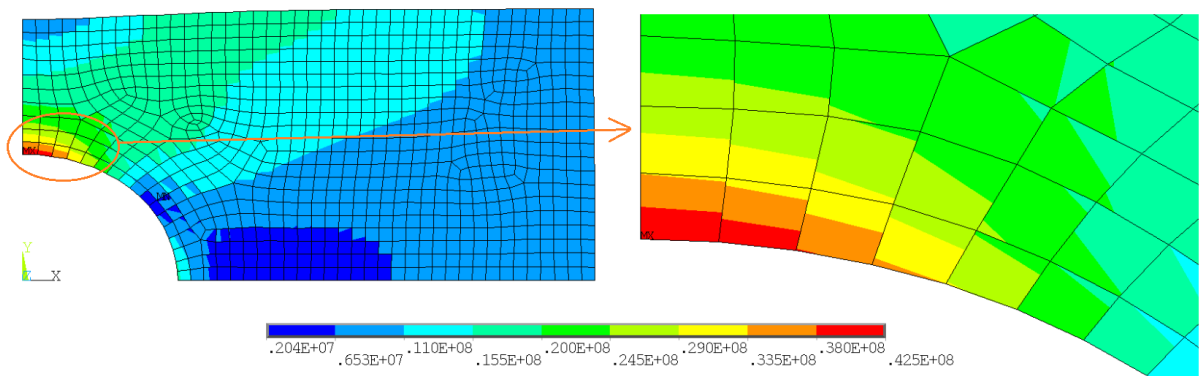
Obr. 3.58. Príklad tvorby modelu – von Misesove spriemerované napätie v [Pa]

Von Misesove nespriemerované napätie spolu s detailom v oblasti maximálnych napätí je zobrazené na obr. 3.59.

Keď porovnáme nespriemerované a spriemerované napätia, je vidno, že napätia dosahujú v oboch prípadoch hodnotu 42,5 MPa. Detailný pohľad na oblasť maximálnych nespriemerovaných napätí – obr. 3.59 vpravo odhalí, že v tejto oblasti sú prvky príliš veľké a treba ich zmenšiť.

Na realizáciu zjemnenia je potrebné odstrániť všetky MKP zaťaženia, t. j. zaťaženia na prvky a uzly. Napriek tomu, že sme žiadne zaťaženia nedefinovali na MKP model ale iba na geometriu, pri spustení riešenia sa tieto zaťaženia prepočítajú na MKP zaťaženia, ktoré spôsobujú komplikácie pri zjemňovaní siete. Odstránenie MKP zaťaženia sa realizuje cez GUI: Solution → Define Loads → Delete → All Load Data → All F.E. Loads, alebo pomocou príkazu:

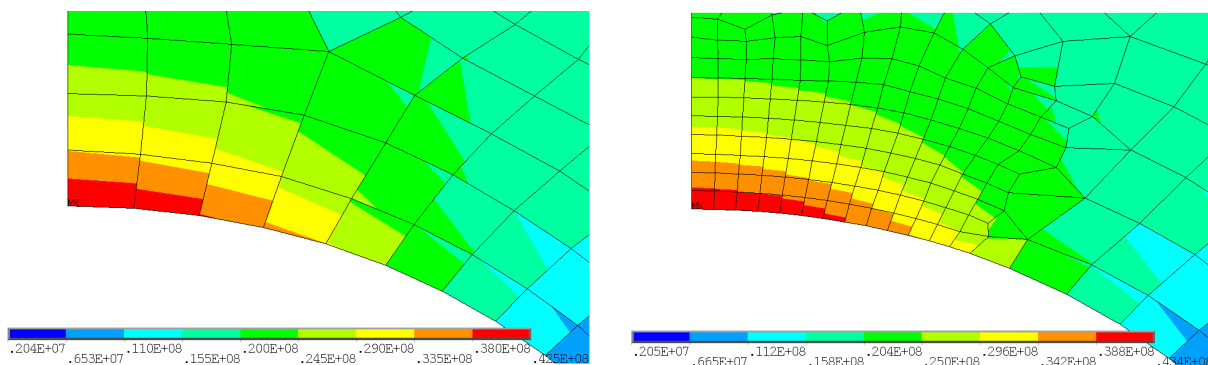
LSCLEAR,FE



Obr. 3.59. Príklad tvorby modelu – von Misesove nespriemerované napätie v [Pa]

Samotné zjemnenie na určitých prvkoch sa výhodne realizuje cez GUI (nie je potrebné poznať čísla prvkov): Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (Sieťovacie menu: zjemnenie nastaviť na Elements a stlačiť Refine) → (výberové menu: výber prvkov, ktoré budú zjemnené, OK).

Po opätovnom vyriešení systému sa maximálne hodnoty napätí zmenili – obr. 3.60, kde je takisto vidno zjemnenie siete. Maximálne von Misesovo napätie po zjemnení siete dosahuje hodnotu 43,4 MPa.



Obr. 3.60. Príklad tvorby modelu – porovnanie výsledkov na pôvodnej a zjemnenej sieti, von Misesove napätia v [Pa]

3. Vylistovanie napätí: pre vylistovanie von Misesových napätí použijeme GUI príkaz: General Postproc → List Results → Element Solution → (v zobrazenej tabuľke zvolíť Element Solution → Stress → von Mises stress), alebo pomocou príkazu: *PRESOL,S,PRIN*

Ukážka výpisu napätí je zobrazená na obr. 3.61.

```

PRESOL Command
File
PRINT S  PRIN ELEMENT SOLUTION PER ELEMENT
***** POST1 ELEMENT NODAL STRESS LISTING *****
LOAD STEP=  0  SUBSTEP=  1
TIME=  1.0000  LOAD CASE=  0
THE FOLLOWING X,Y,Z VALUES ARE IN GLOBAL COORDINATES
ELEMENT=  1  PLANE182
NODE  S1  S2  S3  SINT  SEQV
121  0.17683E+08  0.0000  -0.10591E+07  0.18743E+08  0.18236E+08
293  0.17771E+08  0.0000  -0.80353E+06  0.18575E+08  0.18186E+08
231  0.17930E+08  0.0000  -0.67220E+06  0.18602E+08  0.18275E+08
122  0.17939E+08  0.0000  -0.92362E+06  0.18863E+08  0.18419E+08
ELEMENT=  2  PLANE182
NODE  S1  S2  S3  SINT  SEQV
337  0.17162E+08  0.0000  -0.63529E+06  0.17797E+08  0.17488E+08
293  0.17986E+08  0.0000  -0.33651E+06  0.18323E+08  0.18157E+08
121  0.17820E+08  0.0000  -0.75098E+06  0.18571E+08  0.18207E+08
336  0.17029E+08  0.0000  -0.10334E+07  0.18062E+08  0.17569E+08

```

Obr. 3.61. Príklad tvorby modelu – ukážka vylistovaných napätí v [Pa]

Kapitola 4

Statická analýza nosníkových štruktúr

4.1 Cieľ kapitoly

Cieľom tejto kapitoly je oboznámiť čitateľa so spôsobom modelovania systémov, ktoré sú tvorené z nosníkov. V teoretickej časti je opísaný Euler-Bernoulliho model nosníka. V praktickej časti sú riešené tri príklady, pričom v poslednom je ukázané modelovanie nosníka, ktorý je tvorený z dvoch rôznych materiálov, a jeho deformácia je spôsobená predpísanou zmenou teploty a rôznymi koeficientmi teplotnej rozťažnosti oboch materiálov.

4.2 Matematické modely nosníkov

Nosníky sú telesá, ktorých rozmery prierezu sú výrazne menšie v porovnaní s dĺžkou, pričom sú schopné prenášať nie len osovú zaťaženie popr. zaťaženie krutom, ale aj priečne zaťaženia (na rozdiel od prútov, ktoré prenášajú iba osovú zaťaženie).

Nosníky rozdeľujeme na:

- priestorové nosníky – priečna záťaž pôsobí v ľubovoľnom smere vzhľadom na prierez, nosník môže byť zaťažený aj osovými silami a krútiacim momentom
- rovinné nosníky – priečna záťaž pôsobí iba v jednej rovine, nosník môže byť zaťažený aj osovými silami

Matematické modely, ktoré opisujú správanie sa takýchto štruktúr, sa nazývajú nosníkové teórie, pričom cieľom týchto teórií je zjednodušiť opis v skutočnosti 3D telesa. Medzi dve najzákladnejšie teórie, ktoré sa uplatňujú pri riešení nosníkových úloh, sú:

- Euler-Bernoulliho teória – táto teória sa tiež nazýva klasická nosníková teória
- Timošenkova teória – ktorá na rozdiel od Euler-Bernoulliho teórie nepredpokladá zachovanie kolmosti prierezu na zdeformovanú pozdĺžnu os nosníka

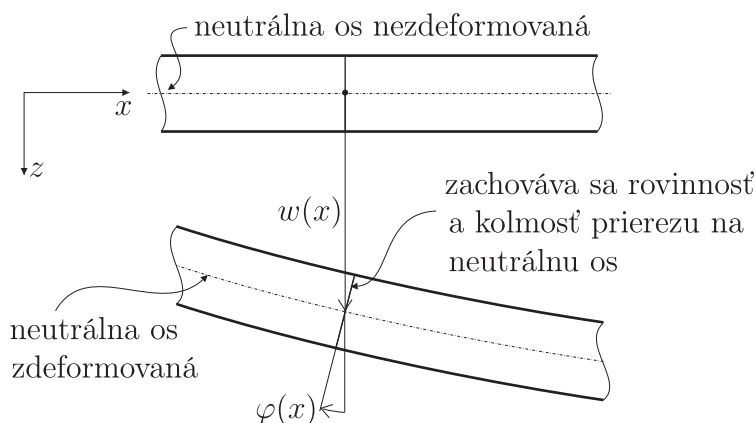
Obe tieto teórie môžu byť použité pri MKP formulácii nosníkových prvkov. V ďalšom texte budú ukázané teoretické vzťahy platné pre Euler-Bernoulliho teóriu popisujúcu ohyb rovinného nosníka.

4.3 Euler-Bernoulliho teória

Základné predpoklady pre použitie Euler-Bernoulliho teórie pre nosníky sú:

- pozdĺžna os nosníka (tiež sa nazýva neutrálna os, lebo pri iba ohybovom namáhaní vlákna v horizontálnej rovine, ktorá je určená pozdĺžnou osou, majú nulové normálové napätia) je priama a prierez nosníka je symetrický okolo pozdĺžnej vertikálnej roviny nosníka
- prierez nosníka je buď konštantný, alebo sa mení pozvoľne po dĺžke nosníka
- rovina prierezu, ktorá bola pôvodne kolmá na pozdĺžnu os nosníka ostáva rovinná a kolmá na zdeformovanú os nosníka
- priehyb, rotácia a pretvorenie sú malé, t. j. môže byť použitý predpoklad nekonečne malých posunutí
- materiálové správanie sa predpokladá elastické a izotropné

Najčastejšie sa rovnice rovinných nosníkov uvádzajú v rovine $x - z$ – obr. 4.1 (mierka deformácie je úmyselne zväčšená kvôli čitateľnosti obrázku). Pri MKP formuláciách rovinných nosníkov sa následne prechádza do roviny $x - y$.



Obr. 4.1. Euler-Bernoulliho nosník – rovinnosť a kolmosť prierezu

4.3.1 Kinematické rovnice

Pohyb ľubovoľného bodu (x, z) rovinného nosníka s príslušnými väzbami, ktorý je spôsobený vonkajším zaťažením, je vo všeobecnosti opísaný dvoma veličinami: $u(x, z)$ – osový pohyb daného bodu a $w(x, z)$ – priečný (transverzálny) pohyb daného bodu. Pohyb v smere osi y je spôsobený previazaním pozdĺžneho a priečného pretvorenia pomocou Poissonovho čísla, ale pri nosníkoch nemá zásadný význam, preto sa s ním neuvažuje. Podmienka zachovania rovinnosti a kolmosti prierezu na zdeformovanú os sa matematicky dá vyjadriť takto

$$u(x, z) = -z \frac{dw(x)}{dx} = -z\varphi(x) \quad (4.1)$$

V rovnici (4.1) výraz $dw(x)/dx$ predstavuje sklon (natočenie) prierezu okolo osi y a označuje sa ako uhol natočenia (rotácia) prierezu $\varphi(x)$.

Základom Euler-Bernoulliho teórie je predpoklad, že nosníky sú namáhané iba osovými (normálovými) napätiami σ . Ako je ukázané v kapitole 5, miera zmeny vzájomnej vzdialenosti dvoch bodov pri osovom namáhaní, ktorá sa nazýva osové (resp. normálové) pretvorenie, je definovaná pomocou výrazu

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.2)$$

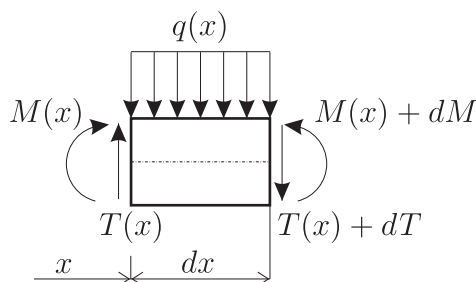
Využitím rovnice (4.1) môže byť vzťah (4.2) upravený na tvar

$$\varepsilon = -z \frac{d^2 w}{dx^2} = -z\kappa \quad (4.3)$$

Veličina $\kappa = d^2 w/dx^2$ sa nazýva krivosť zdeformovanej osi nosníka.

4.3.2 Rovnice silovej rovnováhy

Silové rovnice rovnováhy sa zostavujú na základe analýzy diferenciálneho úseku nosníka o dĺžke dx , na ktorý pôsobí vonkajšia spojité sila $q(x)$. Vnútorne silové účinky sú reprezentované tak priečnou silou $T(x)$ ako aj ohybovým momentom $M(x)$ – obr. 4.2. Na základe



Obr. 4.2. Euler-Bernoulliho nosník – silové veličiny

silovej a momentovej rovnováhy môžeme písať

$$\frac{dT}{dx} = -q(x) \quad (4.4)$$

$$\frac{dM}{dx} = T(x) \quad (4.5)$$

pričom vzťah medzi vnútorným ohybovým momentom $M(x)$ a vnútorným osovým napätím je

$$M(x) = \int_A z\sigma(x, z)dA \quad (4.6)$$

kde A je plocha prierezu nosníka.

4.3.3 Konštitutívny zákon

Vzťah medzi osovým napätím σ a osovým pretvorením ε je definovaný pre lineárne správanie sa materiálu pomocou Hookovho zákona a môžeme ho napísať v tvare

$$\sigma = E\varepsilon = -Ez\frac{d^2w}{dx^2} = -Ez\kappa \quad (4.7)$$

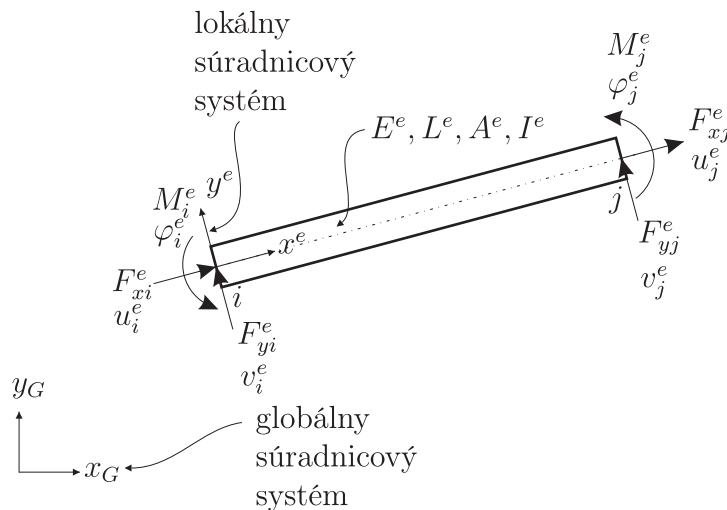
Dosadením konštitutívnej rovnice (4.7) do rovnice (4.6) a využitím vzťahov (4.4) a (4.5) dostávame rovnovážnu rovnicu, ktorá definuje vzťah medzi priehybom $w(x)$ a spojitým zaťažením $q(x)$

$$EI\frac{d^4w(x)}{dx^4} = q(x) \quad (4.8)$$

kde $I = \int_A z^2 dA$ je moment zotrvačnosti prierezu k osi y . Na jednoznačné riešenie tejto diferenciálnej rovnice je potrebné stanoviť štyri okrajové podmienky, ktoré opisujú väzby ako aj záťaž na oboch koncoch nosníka.

4.4 MKP formulácia Euler-Bernoulliho 2D nosníka

Pri MKP formulácii Euler-Bernoulliho 2D nosníkového prvku je prvková matica tuhosti zložená z dvoch častí – časť popisujúca správanie sa prvku pri namáhaní na tlak alebo ťah a časť popisujúca správanie sa prvku pri ohybovom namáhaní. Tieto časti sa teoreticky odvádzajú samostatne. Napr. časť pre namáhanie na ťah a tlak je uvedená v kapitole 2. Typický 2D nosníkový prvok spolu so silovými aj deformačnými veličinami je zobrazený na obr. 4.3. Najčastejšie sa pracuje s dvojuzlovou formuláciou, t. j. prvok je tvorený dvoma



Obr. 4.3. 2D Euler-Bernoulliho nosníkový prvok

uzlami – uzol i a j . Prvok je charakterizovaný prierezovými charakteristikami – prierezová plocha A^e a moment zotrvačnosti prierezu I^e , dĺžka prvku L^e a materiálou vlastnosťou – modul pružnosti v ťahu E^e . Silové veličiny (t. j. osovú silu F_{xi}^e a F_{xj}^e , priečne sily F_{yi}^e a F_{yj}^e a momenty M_i^e a M_j^e) aj deformačné veličiny (t. j. osovú posunutie u_i^e a u_j^e , priečne posunutie v_i^e a v_j^e a natočenie prierezu φ_i^e a φ_j^e) sú definované v tzv. lokálnom (t.

j. prvkovom) súradnicovom systéme $x^e - y^e$ a musia byť pretransformované do globálneho súradnicového systému $x_G - y_G$.

MKP rovnice pre namáhanie na ťah-tlak využívajú lineárne tvarové funkcie (2.19) a výsledný tuhostný vzťah vyzerá takto

$$\frac{E^e A^e}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ u_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{xj}^e \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Pri MKP formulácii ohybových členov sa ako tvarové funkcie používajú tzv. Hermiteove interpolačné polynómy, ktoré na interpoláciu využívajú okrem funkčných hodnôt v uzlových bodoch aj hodnoty derivácie funkcie v týchto bodoch. Potom MKP rovnice pre ohybové namáhanie vyzerá takto

$$\frac{E^e I^e}{L^e} \begin{bmatrix} \frac{12}{(L^e)^2} & \frac{6}{L^e} & -\frac{12}{(L^e)^2} & \frac{6}{L^e} \\ \frac{6}{L^e} & 4 & -\frac{6}{L^e} & 2 \\ -\frac{12}{(L^e)^2} & -\frac{6}{L^e} & \frac{12}{(L^e)^2} & -\frac{6}{L^e} \\ \frac{6}{L^e} & 2 & -\frac{6}{L^e} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^e \\ \varphi_i^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{yi}^e \\ M_i^e \\ F_{yj}^e \\ M_j^e \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Spojením rovníc (4.9) a (4.10) dostávame lokálne MKP rovnice pre 2D Euler-Bernoulliho nosníkový prvok v tvare

$$\begin{bmatrix} \frac{E^e A^e}{L^e} & 0 & 0 & -\frac{E^e A^e}{L^e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^e I^e}{(L^e)^3} & \frac{6E^e I^e}{(L^e)^2} & 0 & -\frac{12E^e I^e}{(L^e)^3} & \frac{6E^e I^e}{(L^e)^2} \\ 0 & \frac{6E^e I^e}{(L^e)^2} & \frac{4E^e I^e}{L^e} & 0 & -\frac{6E^e I^e}{(L^e)^2} & \frac{2E^e I^e}{L^e} \\ -\frac{E^e A^e}{L^e} & 0 & 0 & \frac{E^e A^e}{L^e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^e I^e}{(L^e)^3} & -\frac{6E^e I^e}{(L^e)^2} & 0 & \frac{12E^e I^e}{(L^e)^3} & -\frac{6E^e I^e}{(L^e)^2} \\ 0 & \frac{6E^e I^e}{(L^e)^2} & \frac{2E^e I^e}{L^e} & 0 & -\frac{6E^e I^e}{(L^e)^2} & \frac{4E^e I^e}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^e \\ v_i^e \\ \varphi_i^e \\ u_j^e \\ v_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xi}^e \\ F_{yi}^e \\ M_i^e \\ F_{xj}^e \\ F_{yj}^e \\ M_j^e \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

resp. v maticovom tvare

$$\mathbf{K}^e \mathbf{x}^e = \mathbf{F}^e \quad (4.12)$$

Tento lokálny MKP vzťah musí byť pretransformovaný do globálneho súradnicového systému a následne sa vytvorí výsledný MKP systém rovníc rovnakým spôsobom ako bol opísaný v kapitole 2.

4.5 Riešené príklady

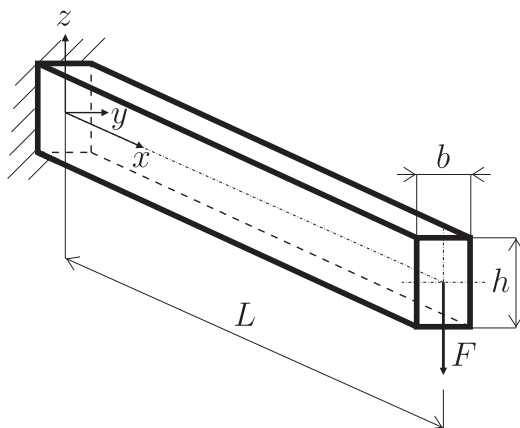
V rámci tejto kapitoly budú prezentované úlohy, ktoré svojou geometriou sú veľmi efektívne riešené pomocou nosníkových prvkov. V programe ANSYS od verzie 13 a vyššie sú

podporované len nosníkové prvky typu BEAM188 a BEAM189, ktoré môžu byť využité aj pri modelovaní vrstevnatých nosníkových štruktúr.

4.5.1 Príklad 1 – votknutý nosník

Zadanie

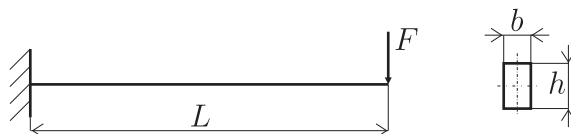
Prípad namáhania votknutého nosníka so sústredenou silou je zobrazený na obr. 4.4. Nosník obdĺžnikového prierezu má dĺžku $L = 1,5$ m, výška prierezu je $h = 0,1$ m a šírka prierezu $b = 0,05$ m. Nosník je vyrobený z ocele, t. j. $E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa a $\mu = 0,3$. Zťažený je na voľnom konci priečnou silou $F = 500$ N. Cieľom tejto úlohy má byť stanovenie maximálneho priehybu nosníka aj zistenie rozloženia napätia v nosníku.



Obr. 4.4. Príklad 1 – geometria a zaťaženie nosníka

Riešenie

Ako je vidno z obr. 4.4, z geometrických parametrov a spôsobu zaťaženia, systém možno zjednodušiť a modelovať pomocou jednorozmerných prvkov v rovine. V takom prípade sa bude modelovať nasledovná 1D úloha – obr. 4.5.



Obr. 4.5. Príklad 1 – 1D model

Preprocessor

1. Definovanie typu prvku: vhodný prvok je nosníkový prvok BEAM188 (v starších verziách programu ANSYS bolo možné použiť aj prvok BEAM3, ten ale v novších verziách už nie je podporovaný), teda cez GUI: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → BEAM188, resp. pomocou príkazov:

```
/PREP7  
ET,1,188
```


2. Definovanie materiálových vlastností: materiál je podľa zadania izotropný a môžeme ho definovať cez GUI: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → (EX=2.1E11, PRXY=0.3), alebo pomocou príkazov:


```
MP,EX,1,2.1E11
MP,PRXY,1,0.3
```
3. Definovanie prierezu: najjednoduchší spôsob definovania prierezu je cez GUI využitím preddefinovaných prierezov: Preprocessor → Sections → Beam → Common Sections → (výber obdĺžnikového prierezu → definovanie B=0.05, H=0.1), alebo pomocou príkazov:


```
SECTYPE,1,BEAM,RECT
SECDATA,0.05,0.1
```
4. Geometria: v tomto prípade je geometria veľmi jednoduchá a na jej vytvorenie postačuje vytvoriť dva keypointy a pomocou nich jednu čiaru. Teda cez GUI: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → (prvý keypoint → X=0, druhý keypoint → X=1.5). Čiara sa vytvorí grafickým výberom oboch keypointov: Preprocessor → Modeling → Create → Lines → Lines → Straight Line. Alebo pomocou príkazov:


```
K,1,0,0,0
K,2,1.5,0,0
L,1,2
```
5. Sieťovanie: keďže pracujeme iba s jedným typom prvku a iba s jedným materiálom a prierezom, nemusíme nastavovať tieto parametre. Pri sieťovaní najskôr nastavíme počet (resp. veľkosť) prvkov na danej čiare a následne túto čiaru vysieťujeme. Teda cez GUI nastavenie sieťovania: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (v Size Controls sa pre čiary nastaví cez položku Set počet prvkov → NDIV=20). Samotné sieťovanie čiar sa realizuje takto: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (v položke Mesh sa sieťovanie aktivuje tlačidlom Mesh → po zobrazení výberového menu sa aktivuje Pick All), alebo pomocou príkazov:


```
LESIZE,1, , ,20
LMESH,ALL
```

Solution

1. Definovanie typu analýzy: tento krok možno vynechať, lebo statická analýza je automaticky preddefinovaná.
2. Definovanie záťaže a okrajových podmienok: nosník je na jednom konci votknutý a druhý koniec je zaťažený silou 500 N. Votknutie sa definuje takto: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Keypoints → (výberové menu: vybrať keypoint 1 a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať All DOF). Záťaž je definovaná pomocou GUI: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Keypoints → (výberové menu: vybrať keypoint 2 a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať Lab=FZ a VALUE=-500), alebo jednoduchšie pomocou príkazu:


```
/SOLU
```

DK,1,ALL
FK,2,FZ,-500

3. Spustenie riešenia: riešenie sa spúšťa takto: Solution → Solve → Current LS → OK, alebo jednoducho pomocou príkazu:
SOLVE

Postprocessor

1. Zobrazenie zdeformovaného tvaru: jedna z výhod prvkov BEAM188 a BEAM189 v porovnaní s pôvodnými nosníkovými prvkami BEAM3 a BEAM4 je aj v 3D zobrazení nosníkov, ktoré sa aktivuje: Utility Menu → PlotCtrls → Style → Size and Shape... → Display of element ON → OK alebo jednoducho:

/ESHAPE,1

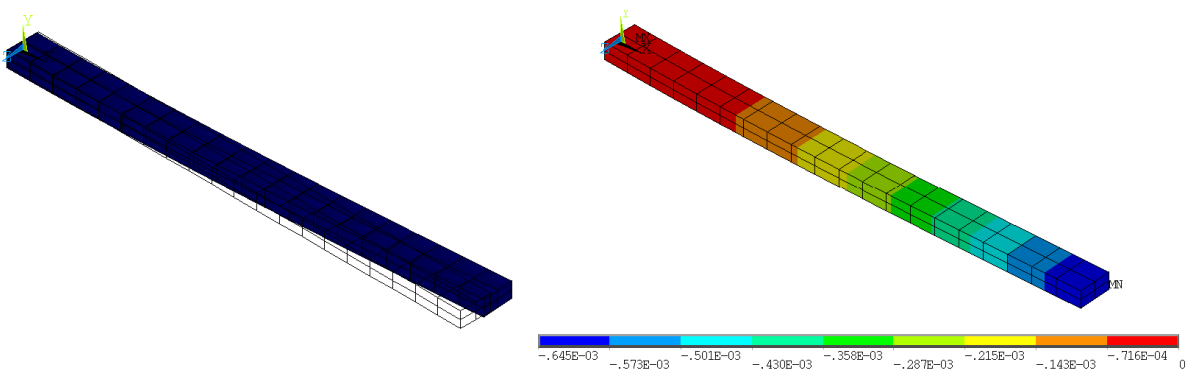
Najjednoduchšie je zobrazenie zdeformovaného tvaru pomocou príkazu:

/POST1
PLDISP,2

Zobrazenie posunutí v smere osi Z:

PLNSOL,U,Z

Zdeformovaný tvar ako aj hodnoty posunutí v smere osi Z sú zobrazené na obr. 4.6.



Obr. 4.6. Príklad 1 – zdeformovaný tvar (vľavo) a posunutia v smere osi Z (vpravo) v [m]

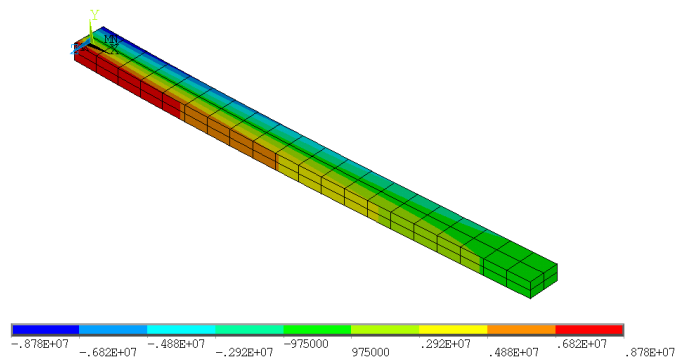
2. Zobrazenie napätí: pri nosníkoch má najväčší význam normálové napätie v smere pozdĺžnej osi nosníka, čo sa pomocou príkazu zobrazí takto:
PLNSOL,S,X

Priebeh týchto napätí je zobrazený na obr. 4.7.

4.5.2 Príklad 2 – mikronosníková konštrukcia

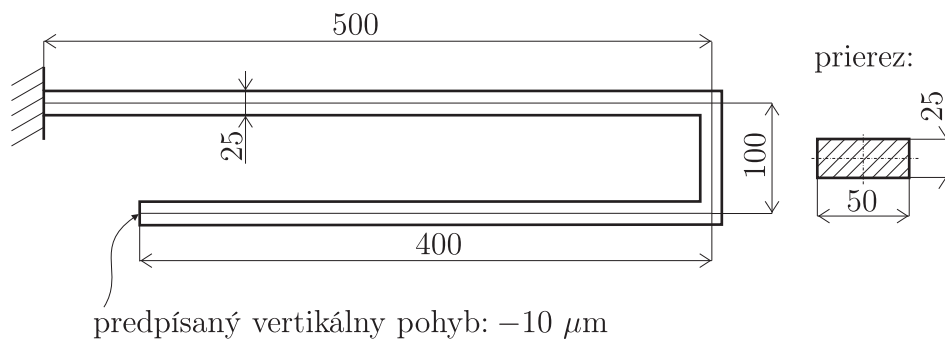
Zadanie

Mikronosníkový systém je zobrazený na obr. 4.8. Tento systém je vyrobený z karbidu kremíka (SiC) s materiálovými vlastnosťami: $E = 420$ GPa, $\mu = 0,14$. Systém má v



Obr. 4.7. Príklad 1 – rozloženie normálových napätí (v smere osi X) v [Pa]

zdeformovanom tvare vykazovať posunutie koncového bodu (voľný koniec) $10 \mu\text{m}$ vo vertikálnom smere. Geometrické rozmery systému ako aj prierezu sú uvedené na obr. 4.8. Cieľom tejto statickej úlohy je určiť zdeformovaný tvar, stanoviť maximálne napätia a určiť, aká veľká sila pôsobiaca na voľnom konci vyvodí takúto deformáciu.



Obr. 4.8. Príklad 2 – geometria a záťaž mikronosníkovej konštrukcie, rozmery sú v $[\mu\text{m}]$

Riešenie

Keďže rozmery riešeného systému sú veľmi malé, z hľadiska numerickej stability výpočtu je výhodnejšie použiť konzistentný systém jednotiek μMKS , kde dĺžka je definovaná v μm , tlak v MPa a sila v μN .

Geometria riešeného systému má typický tvar na použitie nosníkových prvkov, takže z pohľadu geometrie budeme vytvárať čiarový model – strednicová čiara na obr. 4.8.

Preprocessor

1. Definovanie typu prvku: cez GUI: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → BEAM188, resp. pomocou príkazov:


```
/PREP7
ET,1,188
```
2. Definovanie materiálových vlastností: cez GUI: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → (EX=420E3, PRXY=0.14),

alebo pomocou príkazov:

```
MP,EX,1,420E3
```

```
MP,PRXY,1,0.14
```

3. Definovanie prierezu: cez GUI: Preprocessor → Sections → Beam → Common Sections → (výber obdĺžnikového prierezu → definovanie B=25, H=50), alebo pomocou príkazov:

```
SECTYPE,1,BEAM,RECT
```

```
SECDATA,25,50
```

4. Geometria: vytvorí sa pomocou štyroch keypoints a troch čiar, teda v GUI: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → (prvý keypoint → X=0, Y=0, druhý keypoint → X=500, Y=0, tretí keypoint → X=500, Y=-100, štvrtý keypoint → X=100, Y=-100) a Preprocessor → Modeling → Create → Lines → Lines → Straight Line → (prvá čiara medzi keypointsami 1-2, druhá medzi 2-3 a tretia medzi 3-4), alebo pomocou príkazov:

```
K,1,0,0,0
```

```
K,2,500,0,0
```

```
K,3,500,-100,0
```

```
K,4,100,-100,0
```

```
L,1,2
```

```
L,2,3
```

```
L,3,4
```

5. Sieťovanie: cez GUI: nastavenie siete: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (v Size Controls sa pre čiary nastaví cez položku Set a výbere všetkých čiar pomocou Pick All, veľkosť prvkov → SIZE=10). Samotné sieťovanie čiary sa realizuje takto: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (v položke Mesh sa sieťovanie aktivuje tlačidlom Mesh → po zobrazení výberového menu sa aktivuje Pick All), alebo pomocou príkazov:

```
LESIZE,ALL,10
```

```
LMESH,ALL
```

Solution

1. Definovanie typu analýzy: tento krok možno vynechať, lebo statická analýza je automaticky preddefinovaná.
2. Definovanie okrajových podmienok: votknutie ľavého konca sa definuje takto: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Keypoints → (výberové menu: vybrať keypoint 1 a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať All DOF). Predpísané posunutie keypointu 4 sa definuje takto: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Keypoints → (výberové menu: vybrať keypoint 4 a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať UY a v položke VALUE predpísať posunutie -10). Alebo pomocou príkazov:

```
/SOLU
```

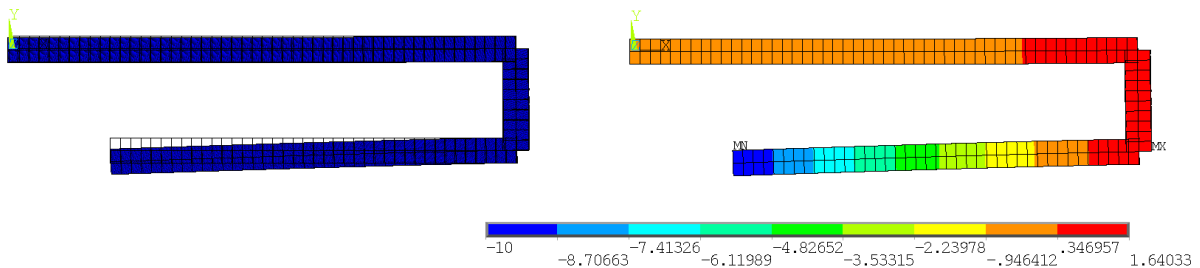
```
DK,1,ALL
```

```
DK,4,UY,-10
```

- Spustenie riešenia: cez GUI: Solution → Solve → Current LS → OK alebo pomocou príkazu:
SOLVE

Postprocessor

- Zobrazenie zdeformovaného tvaru a posunutí: zdeformovaný tvar (zobrazený ako 3D



Obr. 4.9. Príklad 2 – zdeformovaný tvar mikronosníka (vľavo) a posunutia v smere osi Y (vpravo) v $[\mu\text{m}]$

objekt pomocou funkcie */ESHAPE,1*) sa cez GUI zobrazí: General Postproc → Plot Results → Deformed Shape → (v ponuke zvolíť Def+undef edge), alebo pomocou príkazu:

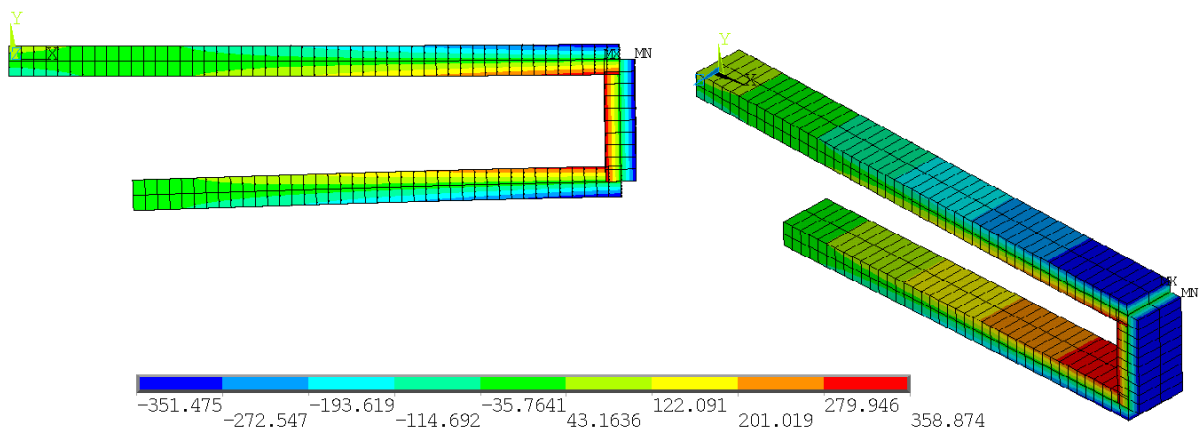
```
/POST1  
PLDISP,2
```

Posunutie v smere osi Y sa cez GUI zobrazí: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (v ponuke zvolíť DOF Solution → Y Component), alebo pomocou príkazu:

```
PLNSOL,U,Y
```

Oba grafické výstupy sú zobrazené na obr. 4.9.

- Zobrazenie napätí: normálové napätie v smere osi nosníka možno cez GUI zobrazíť:



Obr. 4.10. Príklad 2 – rozloženie normálových napätí (v smere osi nosníka) v $[\text{MPa}]$

General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (v ponuke zvolíť

Stress \rightarrow X Component), alebo pomocou príkazu:
PLNSOL,S,X

Normálové napätia na mikronosníku sú zobrazené na obr. 4.10.

3. Veľkosť sily pôsobiacej na voľnom konci potrebnej na vyvodenie predpísaného posunutia: hodnota sily, ktorá spôsobí predpísané posunutie, predstavuje reakčnú silu a môžeme ju zobraziť pomocou GUI: General Postproc \rightarrow List Results \rightarrow Reaction Solu \rightarrow (v ponuke potvrdiť OK), alebo jednoduchšie:

PRRSOL

Výsledná reakčná sila v mieste posunutia je $-4624,7 \mu\text{N}$.

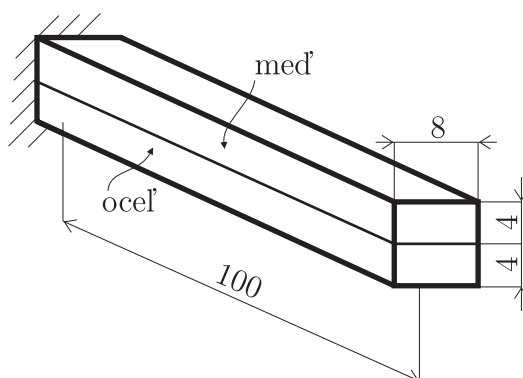
4.5.3 Príklad 3 – bimetalový pásik

Zadanie

Bimetalový pásik o dĺžke 100 mm je zobrazený na obr. 4.11. Je zložený z ocele a medi, pričom ich materiálové vlastnosti sú definované v tab. 4.1. Pásik sa ohreje o $100 \text{ }^\circ\text{C}$.

Tabuľka 4.1. Príklad 3 – materiálové vlastnosti

Materiál	Modul pružnosti v ťahu [GPa]	Poissonovo číslo [-]	koeficient teplotnej rozťažnosti [$\mu\text{m}/\text{mK}$]
ocel	210	0,3	10
meď	120	0,34	16,5



Obr. 4.11. Príklad 3 – geometria a záťaž bimetalového pásika, rozmery sú v [mm]

Cieľom analýzy je stanoviť veľkosť deformácie pásika, ktorá je spôsobená rozdielnymi koeficientmi teplotnej rozťažnosti materiálov bimetalového pásika.

Riešenie

Úlohu možno riešiť tak rovinnými (telesovými) prvkami, ako aj nosníkovými prvkami. Príklad je zameraný na definovanie prierezu pre nosníkový prvok, ktorý je zložený z dvoch rôznych materiálov.

Preprocessor

1. Definovanie typu prvku: okrem definovania nosníkového prvku BEAM188 je nutné definovať aj prvok MESH200, ktorý bude využitý pri vytváraní vlastného prierezu nosníka. GUI definovanie: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → (postupne treba definovať oba typy prvkov: BEAM188, MESH200 → Options...: K1 → QUAD 8-NODE), resp. pomocou príkazov:

```
/PREP7  
ET,1,188  
ET,2,200  
KEYOPT,2,1,7
```

2. Definovanie materiálových vlastností: cez GUI: materiál č. 1 (ocel'): Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → (EX=2.1E11, PRXY=0.3) a Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Thermal Expansion → Secant Coefficient → Isotropic → (ALPX=10E-6), následne vytvoriť materiálový model č. 2 (meď): Preprocessor → Material Props → Material Models → (v hornej záložke zvoliť Material → New Model → Define Material ID: 2) a zopakovať definovanie všetkých troch materiálových vlastností pre meď. Jednoduchší je zápis pomocou príkazov:

```
MP,EX,1,2.1E11  
MP,PRXY,1,0.3  
MP,ALPX,1,10E-6  
MP,EX,2,1.2E11  
MP,PRXY,2,0.34  
MP,ALPX,2,16.5E-6
```

3. Definovanie prierezu: keďže tento prierez je zložený z dvoch materiálov, je potrebné vytvoriť prierez pomocou plôch (dá sa využiť aj preddefinovaný prierez a jeho následná úprava, ale postup vytvorenia prierezu z plôch je univerzálnejší), priradenie príslušného materiálu a typu prvku daným plochám, nastavenie delenia čiar prierezovej plochy a nakoniec uloženie vytvoreného prierezu do súboru a načítanie prierezových charakteristík z tohto súboru do modelu. Takže postupne:

- vytvorenie plôch prierezu: cez GUI: prvý obdĺžnik Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Rectangle → By Dimensions → (X1=4E-3, Y1=8E-3) a následne druhý obdĺžnik úplne rovnako len so zmenenými hodnotami (X1=4E-3, X2=8E-3, Y1=8E-3). Tieto dve plochy musia byť spojené pomocou Boolovských operácií: Preprocessor → Modeling → Operate → Booleans → Glue → Areas → (následne sa vyberú obe plochy určené na zlepenie, t. j. fyzicky pôjde o dve rozdielne plochy, ktoré ale budú mať spoločnú čiaru a príslušné keypoints). Cez príkazy:

```
RECTNG,4E-3, ,8E-3  
RECTNG,4E-3,8E-3,8E-3  
AGLUE,ALL
```

- priradenie vlastností jednotlivým plochám: cez GUI: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (v sieťovacom menu v položke Element Attributes zvoliť Areas

a po stlačení **Set** vybrať príslušnú plochu a vo vyvolanom menu nastaviť predanú plochu príslušný materiál – č. 1 alebo č. 2 a typ prvku – MESH200). Cez príkazy:

ASEL,S,AREA, ,1

AATT,1, ,2

ASEL,S,AREA, ,2

AATT,2, ,2

- nastavenie delenia čiar: jednotlivé čiary, ktoré definujú prierez musia mať nastavené delenie (napr. veľkosť 1 mm), cez GUI: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (v sieťovacom menu v položke Size Controls zvoliť Lines a po stlačení **Set** vybrať príslušnú čiaru a nastaviť veľkosť delenia), cez príkaz:

LESIZE,ALL,1

- uloženie prierezu do súboru: cez GUI: Preprocessor → Sections → Beam → Custom Sections → Write From Areas → (z výberového menu vybrať Pick All a v novootvorenom menu zadať názov súboru, ktorý definuje prierez). Alebo pomocou príkazu:

SECWRITE,prierez

Názov súboru je *prierez.sect* a je umiestnený v pracovnom adresári. Následne je najlepšie odstrániť všetky geometrické entity, ktoré súvisia s prierezom – napr. pomocou príkazu:

ADELE,ALL, , ,1

- načítanie prierezových charakteristík: následne je potrebné údaje uložené v súbore *prierez.sect* načítať ako prierezovú charakteristiku, cez GUI: Preprocessor → Sections → Beam → Custom Sections → Read Sect Mesh → (v novootvorenom menu zadať názov súboru, ktorý definuje prierez), alebo pomocou príkazov:

SECTYPE,1,BEAM,MESH

SECREAD,prierez

4. Geometria: vytvorí sa pomocou dvoch keypointov a jednej čiary, teda v GUI: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → (prvý keypoint → X=0, Y=0, druhý keypoint → X=0.1, Y=0) a Preprocessor → Modeling → Create → Lines → Lines → Straight Line → (čiara medzi keypointami 1-2) alebo pomocou príkazov:

K,1,0,0,0

K,2,0.1,0,0

L,1,2

5. Sieťovanie: cez GUI: nastavenie siete: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (v Size Controls sa pre čiary nastaví cez položku **Set** a výbere všetkých čiar – Pick All veľkosť prvkov → SIZE=0.1/25). Samotné sieťovanie čiary sa realizuje takto: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (v položke Mesh sa sieťovanie aktivuje tlačidlom Mesh → po zobrazení výberového menu sa aktivuje Pick All), alebo pomocou príkazov:

LESIZE,ALL,0.1/25

LMESH,ALL

Solution

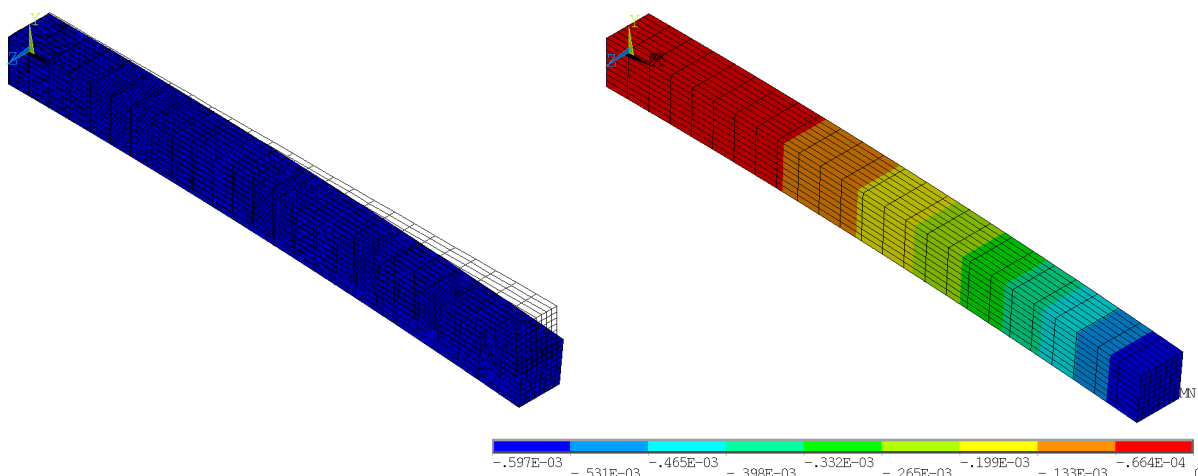
1. Definovanie typu analýzy: tento krok je možné vynechať, lebo statická analýza je automaticky preddefinovaná.
2. Definovanie záťaže: votknutie sa definuje takto: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Keypoints → (výberové menu: vybrať keypoint 1 a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať All DOF). Predpísané oteplenie o 100 °C sa realizuje v GUI takto: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Temperature → Uniform Temp → (v zobrazenej tabuľke zadať teplotu 100). Alebo pomocou príkazov:

```
/SOLU  
DK,1,ALL  
TUNIF,100
```
3. Spustenie riešenia: riešenie sa spúšťa Solution → Solve → Current LS → OK alebo pomocou príkazu:

```
SOLVE
```

Postprocessor

1. Zobrazenie zdeformovaného tvaru a posunutí: zdeformovaný tvar (zobrazený ako 3D



Obr. 4.12. Príklad 3 – zdeformovaný tvar bimetalu (vľavo) a posunutia v smere osi Y (vpravo) v [m]

objekt pomocou funkcie `/ESHAPE,1`) sa cez GUI zobrazí: General Postproc → Plot Results → Deformed Shape → (v ponuke zvoliť Def+undef edge), alebo pomocou príkazu:

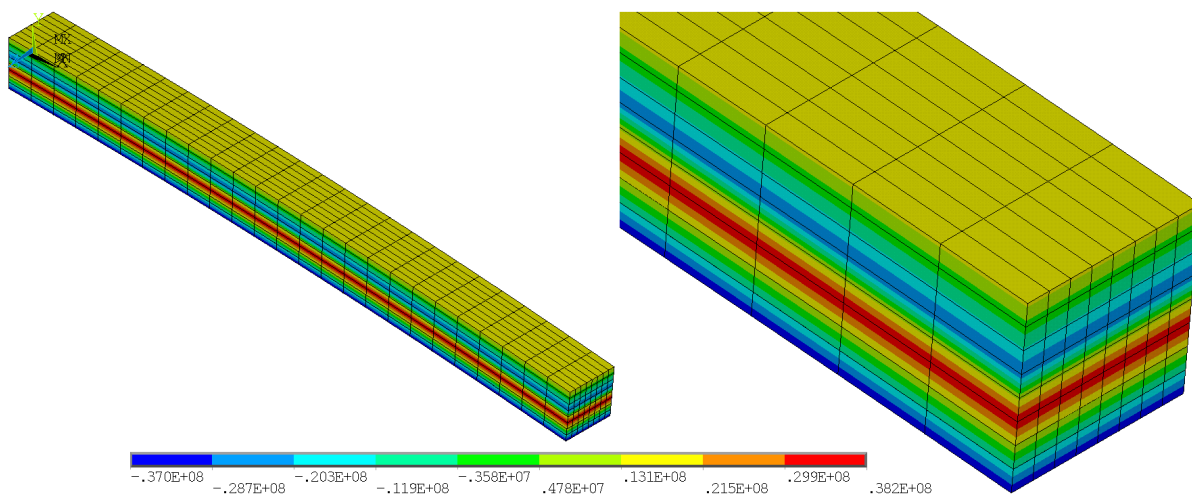
```
/POST1  
PLDISP,2
```

Posunutie v smere osi Y sa cez GUI zobrazí: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (v ponuke zvoliť DOF Solution → Y Component), alebo pomocou príkazu:

```
PLNSOL,U,Y
```

Oba grafické výstupy sú zobrazené na obr. 4.12. Ako je z tohto obrázku vidno, napriek tomu, že systém nie je zaťažovaný priečnymi silami ani ohybovým momentom, nastala deformácia v priečnom smere, čo je spôsobené rozdielnymi koeficientmi teplotnej rozťažnosti materiálov, z ktorých je nosník vytvorený.

2. Zobrazenie napätí: normálové napätie v smere osi nosníka je možné cez GUI zobrazit: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (v ponuke zvolit Stress → X Component), alebo pomocou príkazu:
PLNSOL,S,X



Obr. 4.13. Príklad 3 – rozloženie normálových napätí (v smere osi nosníka) v [Pa]

Kapitola 5

Úlohy rovinnej napätosti a rovinnej deformácie

5.1 Cieľ kapitoly

Veľké množstvo úloh, s ktorými sa môžeme stretnúť v inžinierskej praxi, je možné zjednodušiť a modelovať ich ako rovinné úlohy. Z pohľadu MKP ide o výrazné zjednodušenie samotného výpočtu. Cieľom tejto kapitoly je predstavenie jednotlivých typov rovinných úloh ako aj základných rovníc popisujúcich tieto úlohy. Na dvoch príkladoch – rovinná napätosť a rovinné pretvorenie, je predstavené modelovanie rovinných úloh v programe ANSYS.

5.2 Základné rovnice pružnosti

Rovinné úlohy v problémoch elasticity vzniknú redukciou všeobecných priestorových úloh elasticity, preto je nevyhnutné najskôr poznať všeobecné rovnice elasticity a až následne z nich vytvorené rovnice popisujúce špeciálne prípady, ako sú napr. rovinné úlohy. Základné rovnice elasticity je možné rozdeliť do troch skupín:

- rovnice silovej rovnováhy
- kinematické rovnice
- konštitutívne rovnice

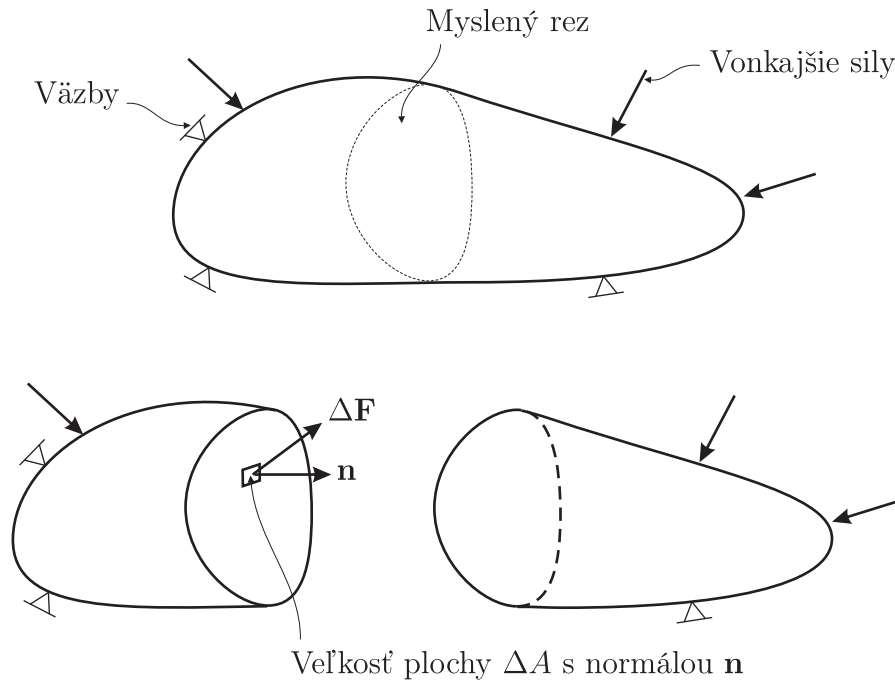
Tieto rovnice tvoria základ špeciálnej časti mechaniky, ktorá sa volá mechanika kontinua.

5.2.1 Rovnice silovej rovnováhy

Rovnice silovej rovnováhy predstavujú rovnice rovnováhy medzi vnútornými a vonkajšími silovými veličinami, pričom pre prípady elasticity sa neuvažuje so zotrvačnými a viskóznymi silovými účinkami.

Ústredná fyzikálna veličina, ktorá vystupuje v silových rovniciach rovnováhy je tenzor napätia. Táto veličina vychádza z konceptu vektora napätia vo vybranom bode rezovej plochy telesa. Vektor napätia predstavuje vnútornú silu v mieste mysleného rezu cez skúmané teleso zaťažované vonkajšími silami, vzťahnutú na jednotkovú plochu tohto rezu –

obr. 5.1, inými slovami tento vektor napätia predstavuje silový účinok jednej časti telesa odrezanej myslenným rezom na druhú časť telesa vzťahnutý na jednotkovú plochu rezu.



Obr. 5.1. Vektor napätia a myslenný rez

Ako je z obr. 5.1 jasné, veľkosť aj orientácia vektora napätia je funkciou zvoleného bodu, cez ktorý sa vedie myslenný rez, ako aj orientácie (sklon) rezovej roviny, ktorá prechádza cez zvolený bod. Vektor napätia σ je vo všeobecnosti definovaný

$$\sigma^n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} \quad (5.1)$$

kde horný index \mathbf{n} definuje normálu (sklon) rezovej roviny, $\Delta \mathbf{F}$ predstavuje výsledný silový účinok na ploche ΔA jednej časti telesa odrezanej myslenným rezom (ktorého normála je určená vektorom \mathbf{n}) na druhú časť telesa.

Ak normála \mathbf{n} , ktorá definuje orientáciu (sklon) plôšky ΔA prechádzajúcu cez zvolený bod, je stotožnená s niektorou z osí súradnicového systému, napr. osou x_1 , ktorej jednotkový vektor je \mathbf{i} , potom vektor napätia $\sigma^{\mathbf{i}}$ je možné vyjadriť pomocou zložiek definovaných jednotkovými vektormi (\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k})

$$\sigma^{\mathbf{i}} = \sigma_{11}\mathbf{i} + \sigma_{12}\mathbf{j} + \sigma_{13}\mathbf{k} \quad (5.2)$$

Avšak plôška ΔA prechádzajúca cez zvolený bod môže byť orientovaná aj v smere jednotkového vektora \mathbf{j} alebo \mathbf{k} , potom vektor napätia v tom istom bode ale vzťahnutý na plôšku ΔA s jednotkovou normálou \mathbf{j} resp. \mathbf{k} má tvar

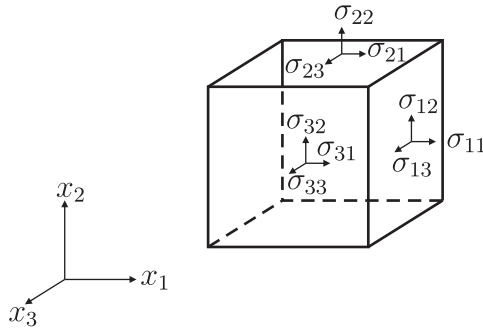
$$\sigma^{\mathbf{j}} = \sigma_{21}\mathbf{i} + \sigma_{22}\mathbf{j} + \sigma_{23}\mathbf{k} \quad (5.3)$$

$$\sigma^{\mathbf{k}} = \sigma_{31}\mathbf{i} + \sigma_{32}\mathbf{j} + \sigma_{33}\mathbf{k} \quad (5.4)$$

Napätostný stav vo zvolenom bode je teda jednoznačne určený deviatimi zložkami σ_{ij} , ktoré často bývajú zapísané v tvare matice

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

a nazýva sa tenzor napätia – obr. 5.2 (táto fyzikálna veličina patrí medzi tenzory preto, lebo spĺňa transformačné pravidlá, ktorými sú tenzory definované, viac sa možno dočítať o tejto problematike napr. v [5]) a je to tenzor druhého rádu obsahujúci 9 zložiek (3×3). V skutočnosti sa v tenzore napätia nenachádza deväť nezávislých zložiek ale len šesť, lebo



Obr. 5.2. Zložky tenzora napätia

tenzor napätia má symetrické vlastnosti, teda pre zložky platí $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. Zložky σ_{11} , σ_{22} a σ_{33} sa nazývajú normálové napätia a zložky σ_{12} , σ_{13} a σ_{23} sa nazývajú šmykové napätia. Vzťah medzi vektorom napätia vztiahnutým na plošku definovanú normálou \mathbf{n} (zložky normály \mathbf{n} plošky predstavujú smerové kosínusy označené n_1 , n_2 a n_3) a tenzorom napätia (teda deviatimi zložkami tenzora napätia) je pri využití indexovania a Einsteinovho sumačného pravidla zapísaný v tvare

$$\sigma_i^{\mathbf{n}} = \sigma_{ij}n_j \quad \text{pre } i = 1, 2, 3 \quad (5.6)$$

Rovnice statickej silovej rovnováhy môžu byť odvodené na základe rovnováhy síl pôsobiacich na infinitezimálny element – obr. 5.3, kde sú zobrazené iba sily pôsobiace v smere osi x_1 . Pre rovnováhu síl v smere osi x_1 (pozri obr. 5.3) dostávame

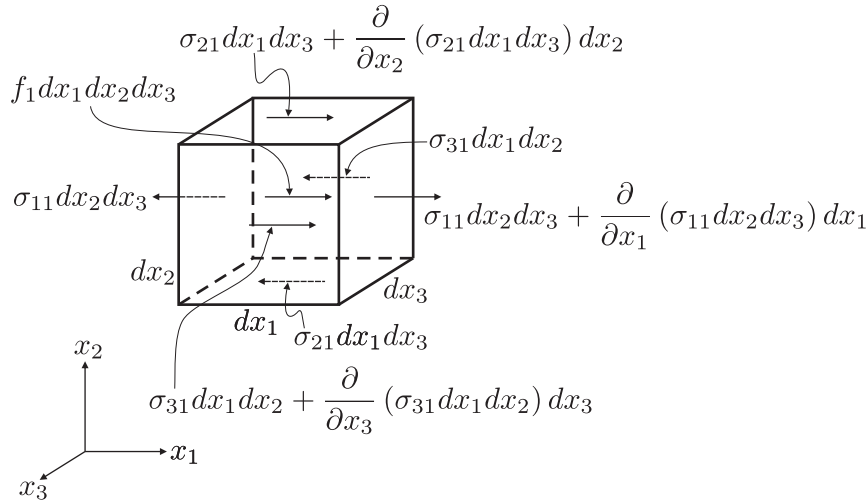
$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = -f_1 \quad (5.7)$$

kde f_1 predstavuje objemovú silu pôsobiacu v smere osi x_1 .

Obdobne môžeme zostaviť sily pre smer osi x_2 resp. x_3 , pričom rovnováha síl v smere osi x_2 resp. x_3 má tvar

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = -f_2 \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = -f_3 \quad (5.9)$$



Obr. 5.3. Sily pôsobiace na infinitezimálny element

5.2.2 Kinematické rovnice

Posunutie ľubovoľného bodu, ktorý v pôvodnej konfigurácii (nezdeformovaný stav) mal súradnice (x_1, x_2, x_3) , je všeobecne vyjadrené v tvare

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = u_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i} + u_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{j} + u_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{k} \quad (5.10)$$

Samotné posunutie môže obsahovať jednak pretvorenie skúmaného telesa aj tuhý pohyb. Na meranie pretvorenia telesa je potrebný vzťah, ktorý bude schopný merať zmenu dĺžky ľubovoľných dvoch materiálových bodov skúmaného telesa. Jedným z takýchto predpisov umožňujúci meranie pretvorenia je Lagrangeov tenzor pretvorenia (opäť je to tenzor druhého rádu, t. j. obsahuje 9 zložiek), ktorého zložky môžu byť vyjadrené pomocou indexovania a Einsteinovho sumačného pravidla takto

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad \text{pre } i, j = 1, 2, 3 \quad (5.11)$$

Táto rovnica je platná aj pre veľké posunutia aj rotácie, t. j. ak sa pretvorenie počíta z rovnice (5.11), potom hovoríme o tzv. geometricky nelineárnych úlohách, ktoré v MKP vedú na iteračné riešenie.

Veľké množstvo praktických úloh spadá do kategórie, kde nie sú prítomné veľké posunutia ani rotácie, vtedy je výhodné (a z hľadiska presnosti riešenia akceptovateľné) zjednodušiť vzťah (5.11) zanedbaním nelineárnych členov. Výsledkom je tzv. lineárny tenzor pretvorenia, ktorého zložky majú tvar

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{pre } i, j = 1, 2, 3 \quad (5.12)$$

Tento tenzor je podobne ako tenzor napätia symetrický, teda platí $e_{ij} = e_{ji}$.

5.2.3 Konštitutívne rovnice

Konštitutívne rovnice vyjadrujú vzťah medzi napätím a pretvorením. Ak materiál uvažujeme iba v lineárnej oblasti zaťažovania, tak najjednoduchší vzťah medzi tenzorom napätia

a tenzorom pretvorenia vyjadruje tzv. Hookov zákon, ktorý má tvar

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \quad (5.13)$$

Veličina C_{ijkl} predstavuje zložky tenzora elasticity, pričom tento tenzor je štvrtého rádu, t. j. je tvorený 81 zložkami ($3 \times 3 \times 3 \times 3$). V rovnici (5.13) sa opäť uplatňuje Einsteinovo sumačné pravidlo, takže pravá strana predstavuje lineárnu kombináciu všetkých zložiek pretvorenia a príslušných zložiek tenzora elasticity.

Keďže oba tenzory druhého rádu, t. j. tenzor napätia aj tenzor lineárneho pretvorenia sú symetrické (a prakticky v každom z nich je len 6 nezávislých zložiek), potom aj tenzor štvrtého rádu – tenzor elasticity vykazuje symetrické vlastnosti. V inžinierskej praxi sa zaužívalo zapisovanie rovnice (5.13) v maticovom tvare, pričom sa pracuje iba so 6 zložkami tenzora pretvorenia a napätia. Potom vzťah (5.13) má tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

alebo skrátene

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.15)$$

Ako je z predchádzajúcej rovnice vidno, celkový počet materiálových konštánt môže dosiahnuť počet 21.

V rovnici (5.14) bolo zmenené označovanie tak, ako je to bežné v inžinierskej praxi (zatiaľ čo číselné označovanie je bežné a výhodné v mechanike kontinua). Vzťah medzi inžinierskym a číselným označovaním jednotlivých zložiek je nasledujúci:

- normálové napätia: $\sigma_{11} = \sigma_x$, $\sigma_{22} = \sigma_y$, $\sigma_{33} = \sigma_z$
- šmykové napätia: $\sigma_{12} = \tau_{xy}$, $\sigma_{23} = \tau_{yz}$, $\sigma_{31} = \tau_{zx}$
- ťahové (normálové) pretvorenia: $e_{11} = \varepsilon_x$, $e_{22} = \varepsilon_y$, $e_{33} = \varepsilon_z$
- šmykové pretvorenia: $2e_{12} = \gamma_{xy}$, $2e_{23} = \gamma_{yz}$, $2e_{31} = \gamma_{zx}$

Pre posunutia u_1 , u_2 a u_3 sa v inžinierskej praxi zaužívali označenia u , v a w .

Rovnica (5.14) opisuje tzv. anizotropný materiál (deformácia materiálu bude pri danom zaťažení záležať na orientácii materiálu). Táto rovnica je najvšeobecnejšia pri opise lineárneho správania sa materiálu, avšak bežné materiály nevykazujú previazanie šmykového pretvorenia a normálového napätia. Častý prípad pri anizotropnom materiáli je prípad, keď materiál vykazuje tri navzájom kolmé roviny symetrie – vtedy takýto materiál voláme ortotropný. Potom matica \mathbf{C} z rovnice (5.15) má tvar

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Ako je z rovnice (5.16) vidno, nezávislých materiálových parametrov je len 9. Často sa môžeme stretnúť buď s definovaním koeficientov C_{ij} , tak ako to je v (5.16), to býva častý prípad najmä pri materiáloch využívaných v MEMS systémoch, alebo pomocou modulov pružnosti v ťahu v jednotlivých smeroch E_i , modulov pružnosti v šmyku G_{ij} a Poissonovým číslom μ_{ij} – to býva najčastejší prípad pri makrosystémoch. V takom prípade sa môžeme stretnúť nie s definovaním matice \mathbf{C} ale s inverznou maticou $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$, ktorá vyjadruje inverzný vzťah medzi napätím a pretvorením

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} \quad (5.17)$$

a samotná matica \mathbf{S} má potom tvar

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\mu_{yx}/E_y & -\mu_{zx}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_y & -\mu_{zy}/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & S & & 1/G_{yz} & 0 & 0 \\ & & Y & & 1/G_{zx} & 0 \\ & & & M & & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Pri definovaní materiálových parametrov pomocou matice \mathbf{S} si treba uvedomiť, že $\mu_{xy} \neq \mu_{yx}$, ale platí $\mu_{xy}/E_x = \mu_{yx}/E_y$, preto ak platí $E_x > E_y$, potom $\mu_{xy} > \mu_{yx}$. Väčšie Poissonovo číslo μ_{xy} sa po anglicky nazýva „major“ Poissonovo číslo a menšie Poissonovo číslo μ_{yx} „minor“ Poissonovo číslo (v programe ANSYS sa s týmito rozdielnymi Poissonovými číslami môžeme stretnúť pod označením PRXY a NUXY).

Ak materiál nevykazuje zmenu správania sa pri otočení okolo jednej osi rotácie, potom takýto materiál voláme transverzálne symetrickým. Ide o veľmi častý prípad pri MEMS systémoch, kde os rotácie býva spojená so smerom rastu materiálu. Matica \mathbf{C} z rovnice (5.15) má potom tvar

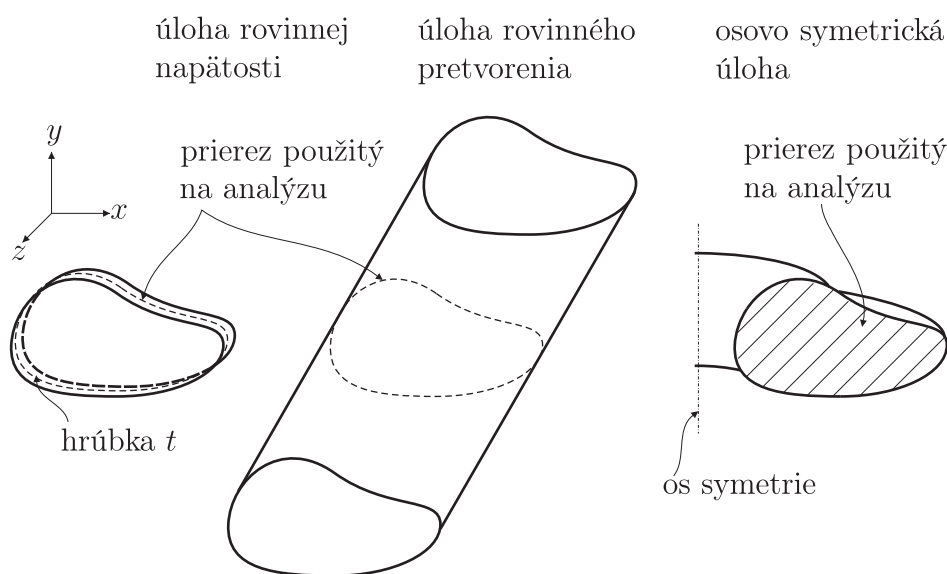
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & S & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & Y & & C_{44} & 0 \\ & & & M & & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Najbežnejší materiál je tzv. izotropný materiál, u ktorého orientácia materiálu nemá žiadny vplyv na deformáciu materiálu pri danom zaťažení. Pri takomto materiáli sa počet materiálových konštánt zredukuje na 2: modul pružnosti E a Poissonovo číslo μ . Potom matica \mathbf{C} z rovnice (5.15) má tvar

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \begin{bmatrix} 1 - \mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 - \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 - \mu & 0 & 0 & 0 \\ & S & & \frac{1}{2} - \mu & 0 & 0 \\ & & Y & & \frac{1}{2} - \mu & 0 \\ & & & M & & \frac{1}{2} - \mu \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

5.3 Rovinné úlohy

Medzi základné rovinné úlohy (resp. úlohy, ktoré sa modelujú rovinnými prvkami), patria: úloha rovinatej napätosti (v angličtine plane stress), úloha rovinného pretvorenia (plane strain) a úloha osovej symetrie (axisymmetric). Na to, aby sme úlohu mohli považovať buď za úlohu rovinatej napätosti, rovinného pretvorenia, alebo osovej symetrie, musia byť splnené určité podmienky, kladené nielen na geometriu úlohy, ale aj na zaťaženie a väzby. Podmienky kladené na zaťaženie a väzby sú uvedené nižšie pri jednotlivých typoch úloh. Všetky tri prípady rovinných úloh z pohľadu geometrie sú zobrazené na obr. 5.4. Ako je



Obr. 5.4. Typy rovinných úloh

vidno z obr. 5.4, ten istý prierez môže byť použitý na riešenie rovinatej napätosti, rovinného pretvorenia alebo osovej symetrie (pri splnených podmienkach kladených na zaťaženie a väzby), ale vždy fyzikálne predstavuje úplne inú úlohu.

V nasledujúcich častiach tejto kapitoly budú odvodené základné rovnice pre úlohu rovinatej napätosti a rovinného pretvorenia.

5.3.1 Rovinná napätosť

Ako je vidno z obr. 5.4, úloha rovinatej napätosti predstavuje dosku s hrúbkou t , pričom táto hrúbka je výrazne menšia ako rozmery dosky v ostatných dvoch smeroch. V analýzach sa často pracuje s jednotkovou hrúbkou ($t = 1$). Prierez, s ktorým sa pracuje pri úlohe rovinatej napätosti, leží uprostred hrúbky dosky – strednicový prierez. Najčastejšie sa za rovinu strednicového prierezu volí rovina $x - y$. Všetky vonkajšie zaťaženia a väzby (teda okrajové podmienky) musia byť rovnobežné so strednicovým prierezom a musia byť okolo neho symetricky rozložené (t. j. v kolmom smere na strednicový prierez – os z). Pri splnení týchto podmienok možno danú priestorovú úlohu redukovať na 2D problém, t. j. problém

rovinnej napätosti a pre napätia neležiace v rovine $x - y$ môžeme písať

$$\sigma_z = 0 \quad (5.21)$$

$$\tau_{xz} = 0 \quad (5.22)$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad (5.23)$$

Nenulové napätia pri úlohe rovinného napätia sú σ_x , σ_y a τ_{xy} a nenulové pretvorenia sú ε_x , ε_y , γ_{xy} ale aj ε_z . Zložka ε_z je nenulová z toho dôvodu, že ε_z je previazané s ε_x a ε_y pomocou konštitutívneho vzťahu, v ktorom vystupuje podmienka $\sigma_z = 0$.

Využitím týchto podmienok sa rovnice silovej rovnováhy zredukujú na dve a majú tvar

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -f_1 \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -f_2 \quad (5.25)$$

Pole posunutí je opísané veličinami u a v .

Využitím faktu, že pre rovinnú napätosť platí, že $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $\gamma_{xz} = 0$ a $\gamma_{yz} = 0$, môžeme maticovú rovnicu (5.14) (v skutočnosti ide o 6 rovníc) pre ortotropný materiál (5.16) prepísať na 4 rovnice zapísané v maticovom zápise

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ S & C_{22} & C_{23} & 0 \\ Y & C_{33} & 0 & \\ M & C_{66} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Využitím faktu, že pri úlohe rovinnej napätosti je napätie $\sigma_z = 0$, môžeme systém 4 rovníc zredukovať na systém 3 rovníc. Ak by sme uvažovali izotropné vlastnosti, potom tento systém 3 rovníc zapísaný maticovo má tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 - \mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \mu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

5.3.2 Rovinné pretvorenie

Úlohu rovinného pretvorenia predstavuje dlhá tyč ľubovoľného prierezu, ktorý sa po dĺžke tyče nemení – obr. 5.4. Os tyče býva najčastejšie orientovaný v smere osi z a prierez tyče v rovine $x - y$. Všetky zaťaženia a väzby (teda všetky okrajové podmienky) musia ležať v rovine $x - y$ a musia byť nezávislé od súradnice z , t. j. tieto zaťaženia a väzby musia byť aplikované po celej dĺžke tyče. Ak sú splnené tieto podmienky, potom možno danú priestorovú úlohu redukovať na 2D úlohu rovinného pretvorenia, pričom je analyzovaný iba prierez v rovine $x - y$ a pre pretvorenia mimo roviny $x - y$ môžeme písať

$$\varepsilon_z = 0 \quad (5.28)$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad (5.29)$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad (5.30)$$

Nenulové pretvorenia sú ε_x , ε_y a γ_{xy} a nenulové napätia sú σ_x , σ_y a τ_{xy} ale aj σ_z . Rovnice silovej rovnováhy sú rovnaké, ako pre úlohu rovinnej napätosti, t. j. (5.24) a (5.25). Pole

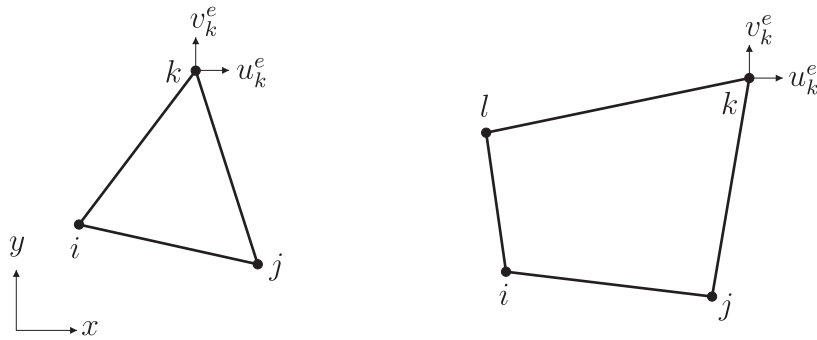
posunutí je opísané veličinami u a v .

Pri konštitutívnom vzťahu sa tu takisto vychádza z rovnice (5.26), lebo platia tie isté podmienky, t. j. $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0, \gamma_{xz} = 0$ a $\tau_{yz} = 0$, avšak redukcia zo 4 rovníc na 3 rovnice sa realizuje využitím rovnice $\varepsilon_z = 0$. Potom pre problém rovinného pretvorenia a pre izotropný materiál má redukovaný konštitutívny vzťah tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \begin{bmatrix} 1 - \mu & \mu & 0 \\ \mu & 1 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 - \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

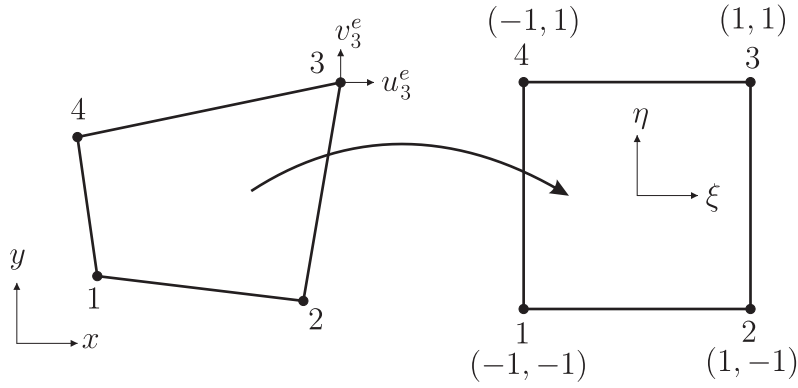
5.4 Rovinné prvky

Na riešenie rovinných úloh pomocou MKP sa používajú tzv. rovinné prvky, ktoré z hľadiska geometrie môžu byť buď trojuholníkové, ale štvoruholníkové. Pri oboch spomínaných typoch existuje viacero variánt podľa počtu uzlov na hrane, pričom najjednoduchšia reprezentácia obsahuje uzly iba v rohoch daného prvku. Z pohľadu numerického výpočtu je efektívnejší štvoruholníkový prvok, avšak z pohľadu jednoduchosti generovania siete na všeobecnej ploche má svoje prednosti trojuholníkový prvok. Oba tieto typy prvkov s tromi resp. štyrmi uzlami sú zobrazené na obr. 5.5. Rovinné prvky majú v každom uzle



Obr. 5.5. Typické 2D prvky – trojuholníkový trojuzlový a štvoruholníkový štvoruzlový prvok

dva stupne voľnosti – posunutie v smere osi x a v smere osi y . Keďže výpočet členov matice tuhosti rovinných prvkov si vyžaduje integráciu cez plochu prvku, s výhodou sa pri týchto prvkoch (a samozrejme aj pri 3D a škrupinových prvkoch) uplatnila transformácia skutočnej geometrie na jednotkovú geometriu, ktorá je jednoduchšia z pohľadu tvarových funkcií. Každú transformáciu geometrie charakterizuje tzv. Jakobiho determinant ($\det J$) – tiež sa nazýva Jakobián, ktorý dáva informáciu o tom, ako sa infinitezimálna ploška pôvodnej geometrie v danom bode transformuje do jednotkovej oblasti. Ak by sa takáto ploška transformovala do jediného bodu, potom v danom bode by bol Jakobián nulový, čo z pohľadu transformácie je neprípustné. Aby nenastalo pretočenie geometrie pôvodnej a jednotkovej, vyžaduje sa, aby Jakobián bol v každom bode transformovanej oblasti väčší ako nula. Takáto transformácia na jednotkovú oblasť je naznačená na obr. 5.6. Najčastejší spôsob transformácie skutočnej geometrie prvku na jednotkovú geometriu prvku využíva tie isté náhradné funkcie, ktoré sa používajú pri opise posunutí u a v . V takom prípade takéto prvky nazývame izoparametrické. Súradnice jednotkovej geometrie $\xi - \eta$ nazývame



Obr. 5.6. Typické 2D prvky – transformácia na jednotkovú oblasť

priradené súradnice. Takisto označovanie uzlov sa pri 2D a 3D izoparametrických prvkoch zvyčajne realizuje pomocou čísel.

Tvarové funkcie sú definované v priradených súradniciach, a napr. pre štvoruholníkový štvoruzlový prvok majú tvar

$$\phi_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (5.32)$$

$$\phi_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (5.33)$$

$$\phi_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (5.34)$$

$$\phi_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (5.35)$$

Pomocou týchto tvarových funkcií môžeme pre štvoruzlový prvok vyjadriť izoparametrickú transformáciu oblasti takto

$$x = \sum_{k=1}^4 x_k^e \phi_k(\xi, \eta) \quad (5.36)$$

$$y = \sum_{k=1}^4 y_k^e \phi_k(\xi, \eta) \quad (5.37)$$

Následne možno vyjadriť pomocou transformácie (5.36) a (5.37) tvarové funkcie (5.32) až (5.35) v pôvodnom súradnicovom systéme $x - y$, čím dostávame tvarové funkcie $\phi_1^e(x, y)$, $\phi_2^e(x, y)$, $\phi_3^e(x, y)$ a $\phi_4^e(x, y)$ pre každý prvok. Potom pre náhradné riešenie môžeme písať

$$u^e(x, y) = \sum_{k=1}^4 u_k^e \phi_k^e(x, y) \quad (5.38)$$

$$v^e(x, y) = \sum_{k=1}^4 v_k^e \phi_k^e(x, y) \quad (5.39)$$

alebo v maticovom zápise

$$\mathbf{u}^e = \boldsymbol{\phi}^e \mathbf{x}^e \quad (5.40)$$

kde vektor uzlových posunutí \mathbf{x} má tvar

$$\mathbf{x}^{eT} = \begin{bmatrix} u_1^e & v_1^e & u_2^e & v_2^e & u_3^e & v_3^e & u_4^e & v_4^e \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

a matica ϕ^e má tvar

$$\phi^e = \begin{bmatrix} \phi_1^e & 0 & \phi_2^e & 0 & \phi_3^e & 0 & \phi_4^e & 0 \\ 0 & \phi_1^e & 0 & \phi_2^e & 0 & \phi_3^e & 0 & \phi_4^e \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Aj pre rovinné prvky môžeme výsledný tuhostný vzťah písať v tvare

$$\mathbf{K}^e \mathbf{x}^e = \mathbf{F}^e \quad (5.43)$$

pričom vektor uzlových záťaží má tvar

$$\mathbf{F}^{eT} = \begin{bmatrix} F_{1x}^e & F_{1y}^e & F_{2x}^e & F_{2y}^e & F_{3x}^e & F_{3y}^e & F_{4x}^e & F_{4y}^e \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Matica tuhosti \mathbf{K}^e môže byť vyjadrená v tvare

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^{eT} \mathbf{C}^e \mathbf{B}^e \det J d\xi d\eta \quad (5.45)$$

Matica \mathbf{C}^e vyjadruje vzťah medzi zložkami tenzora napätia a tenzora pretvorenia (napr. pre úlohy rovinnnej napätosti ide o vzťah (5.27)) a matica \mathbf{B}^e vyjadruje vzťah medzi zložkami pretvorenia a posunutiami obsahujúca derivácie tvarových funkcií a má tvar

$$\mathbf{B}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_3^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_4^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_2^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_3^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_4^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1^e}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1^e}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2^e}{\partial y} & \frac{\partial \phi_2^e}{\partial x} & \frac{\partial \phi_3^e}{\partial y} & \frac{\partial \phi_3^e}{\partial x} & \frac{\partial \phi_4^e}{\partial y} & \frac{\partial \phi_4^e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Samotný výpočet matice tuhosti (5.45) sa realizuje numericky, pričom najčastejšie sa využíva Gaussova kvadratura.

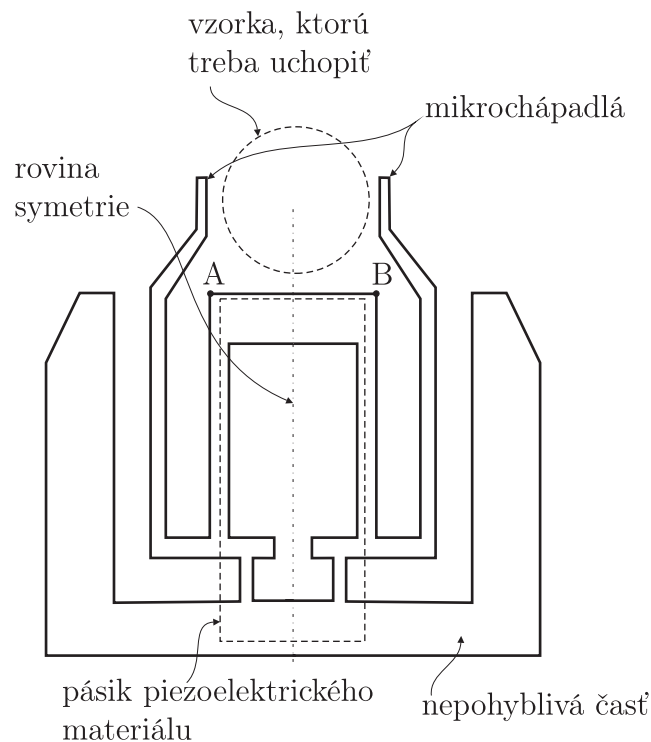
5.5 Riešené príklady

5.5.1 Príklad 1 – Mikroaktuátor

Zadanie

Na obr. 5.7 je zobrazený mikroaktuátor, ktorého úlohou je uchopiť vzorku. Reálne tento aktuátor vyvodzuje akčný posun pomocou piezoelektrického materiálu umiestneného na vrhnej časti mikroaktuátora, čo je zobrazené na obr. 5.7 čiarkovanou čiarou. Pri aplikovanom elektrickom napätí na piezovrstve sa vyvodí akčný pohyb vo vertikálnom smere a body A a B sa v tomto smere posunú o hodnotu 0,005 mm. Hrúbka systému je 0,2 mm. Materiálové vlastnosti sú izotropné a sú definované pomocou modulu pružnosti $E = 140$ GPa a Poissonovým číslom $\mu = 0,23$.

Cieľom je stanoviť posunutie mikrochápadiel pri predpísanom akčnom pohybe a vyšetriť napätosť systému.



Obr. 5.7. Príklad 1 – MEMS chápadlo

Riešenie

Pri modelovaní možno využiť fakt, že ide o systém, ktorý má konštantnú hrúbku, pričom záťaž je predpísaná len v rovine kolmej na hrúbku systému. Teda samotný systém možno modelovať ako úlohu rovinnej napätosti s predpísanou hrúbkou. Keďže geometria aj záťaž sú symetrické vzhľadom na rovinu symetrie (obr. 5.7), možno modelovať iba symetrickú časť mikrochápadla pri predpísaní príslušných symetrických okrajových podmienok. Geometria rovinného symetrického modelu je zobrazená na obr. 5.8.

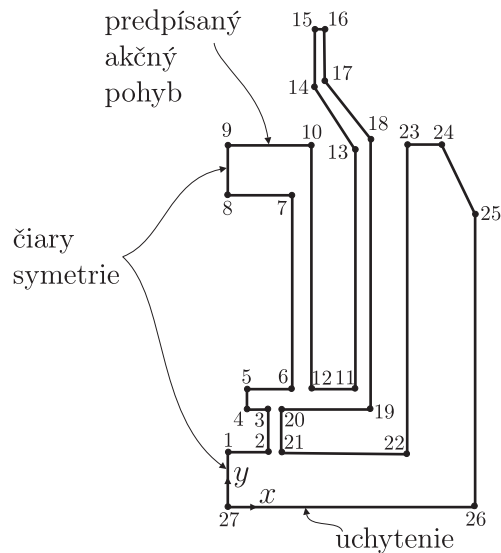
Geometria rovinného symetrického modelu je definovaná pomocou bodov 1 až 27, ktorých súradnice x a y sú uvedené v tab. 5.1.

Tabuľka 5.1. Príklad 1 – súradnice jednotlivých bodov geometrie

bod	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x [mm]	0	0,4	0,4	0,2	0,2	0,8	0,8	0	0	1	1	1,8	1,8	1
y [mm]	1	1	1,8	1,8	2,2	2,2	6	6	7	7	2,2	2,2	7	8
bod	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
x [mm]	1	1,2	1,2	2,2	2,2	0,6	0,6	3	3	3,3	4	4	0	
y [mm]	9	9	8	7	1,8	1,8	1	1	7	7	6	0	0	

Preprocessor

1. Definovanie typu prvku: vhodný prvok na túto analýzu je prvok PLANE182 s nastavením na riešenie rovinnej napätosti. Teda cez GUI zadefinujeme: Preprocessor



Obr. 5.8. Príklad 1 – symetrický model mikrochápada

→ Element Type → Add/Edit/Delete → (PLANE182 s príslušným nastavením KEY-OPT(3) → Plane stress with thickness), alebo jednoduchšie cez príkaz:

```
/PREP7
ET,1,182,,3
```

2. Definovanie reálnych konštánt: hrúbka systému pri nastavení rovinnej napätosti s hrúbkou sa definuje pomocou reálnych konštánt. Keďže rozmery nie sú mikrometrické, stále môžeme použiť systém základných jednotiek, t. j. hrúbka aj celá geometria sa bude definovať v metroch. Cez GUI ju môžeme definovať takto: Preprocessor → Real Constants → Add/Edit/Delete → PLANE182 → 0.2E-3, alebo pomocou príkazu:

```
R,1,0.2E-3
```

3. Definovanie materiálových vlastností: materiál je podľa zadania izotropný a môžeme ho definovať cez GUI: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → (EX=140E9, PRXY=0.23) alebo pomocou príkazov:

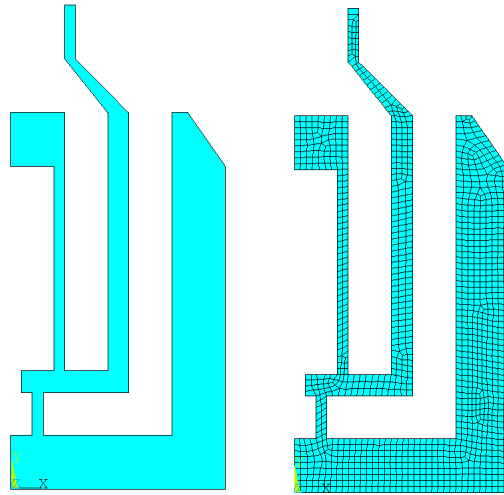
```
MP,EX,1,140E9
MP,PRXY,1,0.23
```

4. Geometria: pri vytváraní geometrie sa ako prvé vytvoria keypoints pomocou GUI: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → (definovanie jednotlivých keypoints podľa tab. 5.1), alebo pomocou príkazu:

napr. keypoint č. 1:

```
K,1,0,1
```

Následne sa vytvorí plocha z jednotlivých keypoints pomocou GUI príkazov: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Through KPs → (vo výberovom menu vybrať položku Min,Max,Inc a do voľného poľa zadať čísla keypoints, t. j. 1,27,1). Vytvorená geometria je zobrazená na obr. 5.9 vľavo.



Obr. 5.9. Príklad 1 – vytvorená geometria (vľavo) a sieť konečných prvkov (vpravo)

5. Sietovanie: najjednoduchšie sietovanie je realizované pomocou automatického nastavenia veľkosti prvkov, t. j. cez GUI: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (sietovacie menu: **Smart size** zaškrtnúť a nastaviť na hodnotu 1, stlačiť Mesh) → (výberové menu: zvoliť Pick All), alebo pomocou príkazov:

```
SMRT,1
AMESH,ALL
```

Vytvorená sieť konečných prvkov je zobrazená na obr. 5.9 vpravo.

Solution

1. Definovanie typu analýzy: tento krok je možné vynechať, lebo statická analýza je automaticky preddefinovaná.
2. Definovanie záťaže a okrajových podmienok: zaťaženie je v tomto prípade realizované pomocou predpísaného posunutia na čiary medzi bodmi 9 a 10 (obr. 5.8) čo je cez GUI realizované: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Lines → (výberové menu: vybrať čiaru medzi keypointami 9 a 10 a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať DOF UY a predpísať posunutie 0.005E-3 a potvrdiť OK). Následne sa predpíšu rovnakým spôsob symetrické podmienky na čiary medzi bodmi 8-9 a 1-27, t. j. ... → Displacement → Symmetry B.C. → On Lines → (výberové menu: výber dvoch čiar medzi keypointami 8-9 a 1-27). Obdobným spôsobom sa predpíše uchytenie čiary medzi bodmi 26-27, teda cez GUI: ... → Displacement → On Lines → (výberové menu: vybrať čiaru medzi keypointami, potvrdiť OK a vybrať All DOF zo zobrazenej tabuľky, pričom políčko VALUE musí ostať prázdne alebo s predpísanou hodnotou 0). Alebo pomocou príkazov:

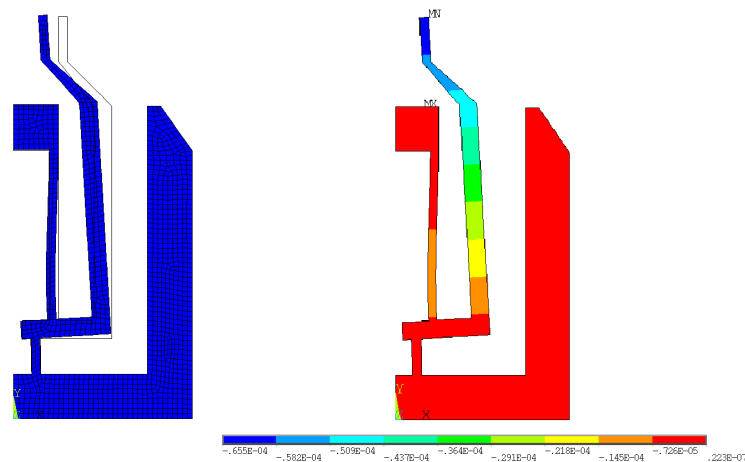
```
/SOLU
DL,9, UY,0.005E-3
DL,8, SYMM
DL,27, SYMM
DL,26, ALL
```


- Spustenie riešenia: riešenie sa spúšťa `Solution` → `Solve` → `Current LS` → `OK`, alebo pomocou príkazu:
`SOLVE`

Postprocessor

- Zobrazenie zdeformovaného tvaru: najjednoduchšie je zobrazenie zdeformovaného tvaru pomocou príkazov:
`/POST1`
`PLDISP,2`

Zdeformovaný tvar je zobrazený na obr. 5.10 vľavo. Na zobrazenie posunutí v smere



Obr. 5.10. Príklad 1 – zdeformovaný tvar (vľavo) a posunutia v smere osi X (pravo) v [m]

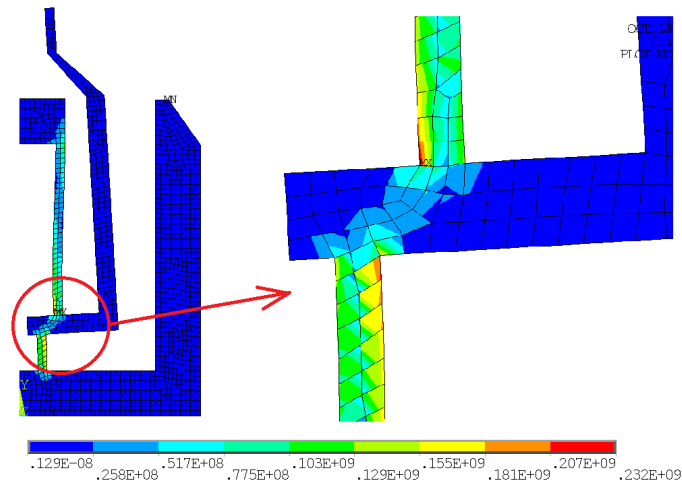
osi X je najjednoduchšie použiť príkaz:
`PLNSOL,U,X`

Posunutie v smere osi X je zobrazené na obr. 5.10 vpravo.

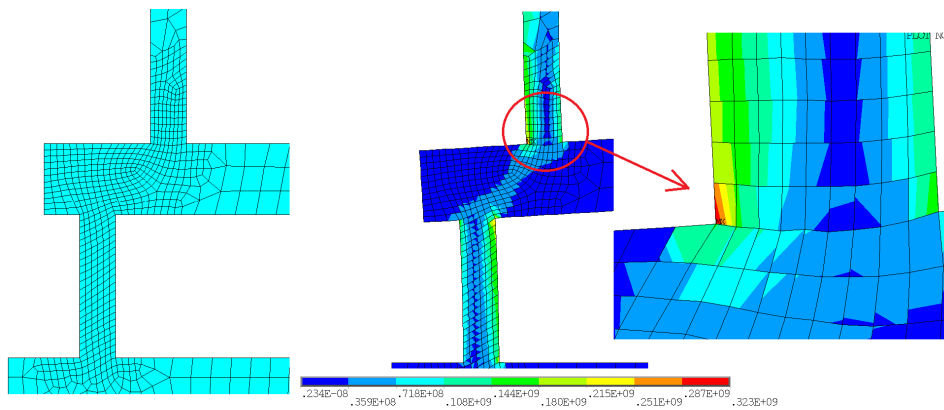
- Zobrazenie napätí: von Misesove napätia na elementoch sa najjednoduchšie zobrazia pomocou príkazu:
`PLESOL,S,EQV`

Von Misesove napätia v systéme sú zobrazené na obr. 5.11, pričom vpravo je zobrazený detail. Podľa obr. 5.11 je maximálne von Misesove napätie 232 MPa a je umiestnené v rohu ramena mikrochápadla.

Na preskúmanie citlivosti tohto napätia na jemnosť siete je potrebné zjemniť sieť modelu a vykonať výpočet. Zjemnenie sa realizuje pomocou GUI: `Preprocessor` → `Meshing` → `Mesh Tool` → (sieťovacie menu: zjemnenie nastaviť na `Elements` a stlačiť `Refine`) → (výberové menu: výber prvkov, ktoré budú zjemnené, `OK`). Zjemnená sieť je zobrazená na obr. 5.12 vľavo. Po vykonaní výpočtu sa napätia v mikrochápadle zmenili – obr. 5.12 vpravo. Model s jemnejšou sieťou dosiahol maximálne von Misesove napätie na úrovni 323 MPa. Ako je vidno na detaile v obr. 5.12, v jednom rohovom prvku extrémne narastá napätie pri zjemňovaní siete. Ak sieť v tejto



Obr. 5.11. Príklad 1 – rozloženie napätí v mikrochápadle v [Pa]



Obr. 5.12. Príklad 1 – zjemnená sieť v mikrochápadle (vľavo) a dosiahnuté von Misesove napätia (vpravo) v [Pa]

oblasti ešte zjemníme, dosiahneme ďalšie zvýšenie von Misesovho napätia na hodnotu 495 MPa. Na základe dosiahnutej postupnosti zvyšovania napätia v závislosti od jemnosti siete môžeme takúto správanie nazvať divergentným. Toto správanie sa numerického modelu, pri ktorom v ostrom rohu narastá pri zjemňovaní siete mechanické napätie, sa nazýva singularita. So singularitou sa môžeme vysporiadať dvoma spôsobmi:

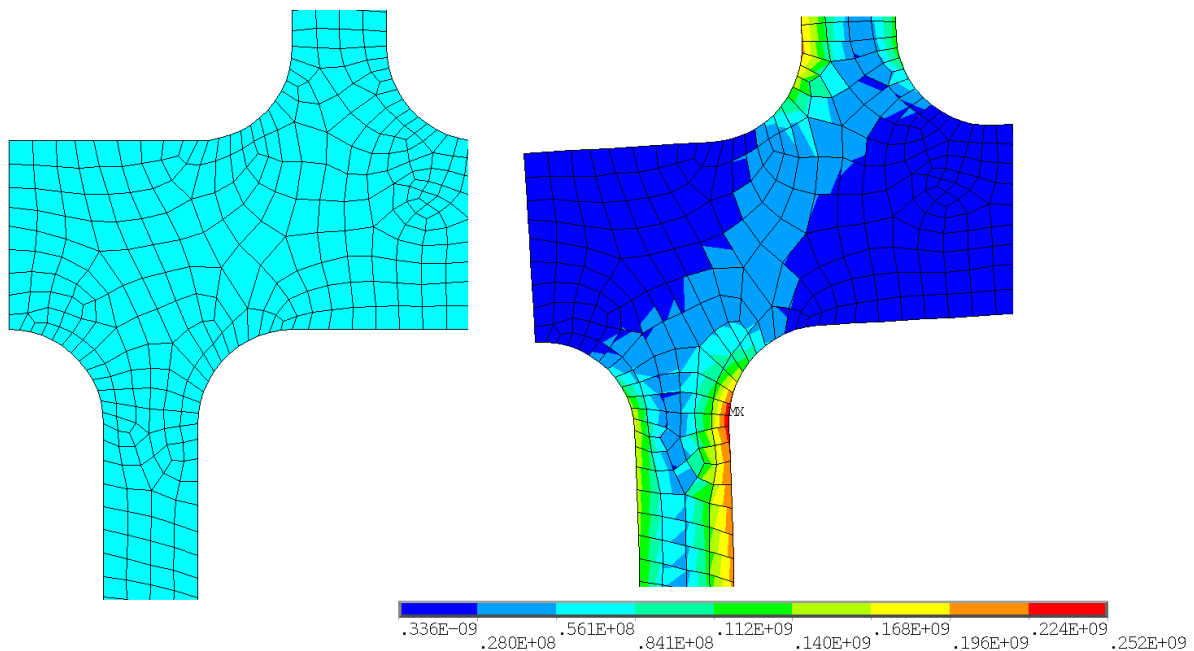
1. buď nás nezaujíma detailné napätie v takomto rohu skúmaného systému, a jednoducho nebudeme s týmto napätím uvažovať pri vyhodnocovaní napätostného stavu systému (napr. rohové prvky odselektujeme pomocou príkazu *ESEL*),
2. alebo geometriu v takomto mieste namodelujeme detailne, t. j. nie ako ostrý roh, ale ako roh s určitým polomerom zaoblenia.

Riešenia singularity druhým spôsobom bude ukázané na zmene geometrie, kde ostré rohy nahradíme malým polomerom $R_{0,2}$.

Vytvorenie zaoblení v rohoch je podmienené odstránením prvkov z modelu, čo sa realizuje cez GUI: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → Clear → (výberové menu:

Pick All), alebo
ACLEAR,ALL

Vytvorenie zaoblení sa realizuje vytvorením oblúkových čiar a následne vytvorením



Obr. 5.13. Príklad 1 – sieť (vľavo) a dosiahnuté von Misesove napätia (vpravo) pre geometriu so zaoblením v [Pa]

plôch v zaoblení a spojením pôvodnej plochy modelu a novovytvorených plôch zaoblení do jednej výslednej plochy. GUI pre vytvorenie oblúkových čiar: **Preprocessor** → **Modeling** → **Create** → **Lines** → **Line Fillet** → (výberové menu: výber dvoch rohových čiar, potvrdenie OK, v zobrazenom menu zadať rádius zaoblenia $RAD=0.2E-3$ a potvrdiť OK). Plochy oblúkov sa vytvoria takto: **Preprocessor** → **Modeling** → **Create** → **Areas** → **Arbitrary** → **By Lines** → (výberové menu: vybrať tri čiary, ktoré budú tvoriť plochu oblúku – dve rovné a jeden oblúk, a potvrdiť OK). Rovnakým spôsobom vytvoriť ostatné plochy oblúkov. Vytvorenie jednej plochy sa realizuje: **Preprocessor** → **Modeling** → **Operate** → **Booleans** → **Add** → **Areas** → (výberové menu: vybrať pôvodnú plochu a plochu vytvoreného oblúka, OK). Pri práci s Booleanovskými operáciami je možné, že tolerancia nastavená pre tieto úkony nebude dostatočná. V takom prípade treba túto toleranciu zmeniť: **Preprocessor** → **Modeling** → **Operate** → **Booleans** → **Settings** → (v zobrazenom menu treba zmeniť toleranciu $BTOL=1E-6$). Následne sa musí opäť vytvoriť sieť konečných prvkov. Pri zahrnutí oblúkov do geometrie je výhodné nastaviť sieť pomocou globálneho nastavenia veľkosti: **Preprocessor** → **Meshing** → **Mesh Tool** → **Size Controls** → **Global** → **Set** → (v zobrazenom menu do položky zadať globálnu veľkosť prvku $SIZE=5E-5$), alebo jednoducho: *ESIZE,5E-5*

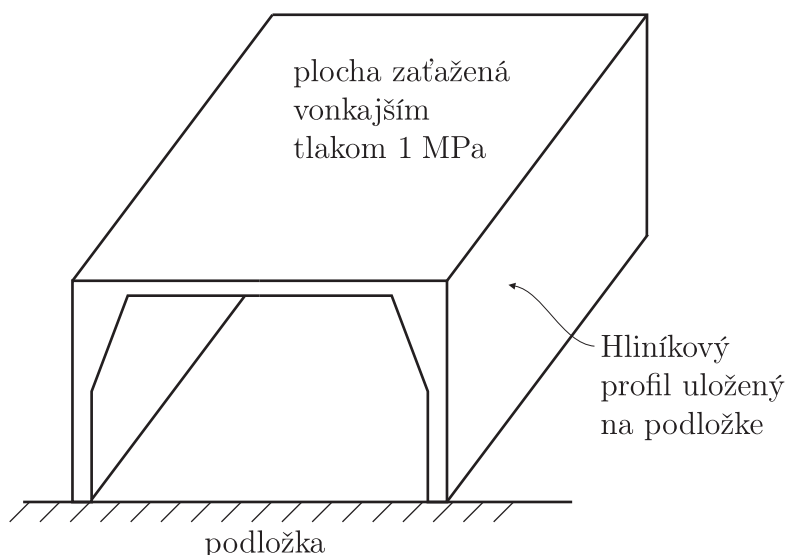
Zobrazenie siete ako aj von Misesových napätí pre geometriu so zaoblením je zobrazené na obr. 5.13.

Maximálne napätie pre takto upravenú geometriu a globálnu veľkosť prvkov 0,05

mm je 252 MPa, pri ďalších postupných zjemneniach siete v okolí zaoblenia je postupne maximálne napätie 265 MPa, 269 MPa a 270 MPa. Táto postupnosť ukazuje konvergentnosť dosiahnutých výsledkov pri zjemňovaní siete.

5.5.2 Príklad 2 – Profilová tyč

Zadanie

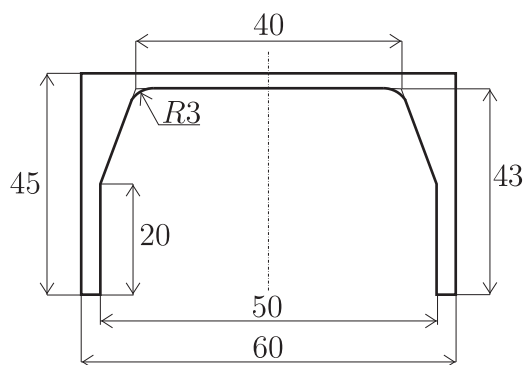


Obr. 5.14. Príklad 2 – hliníková profilová tyč

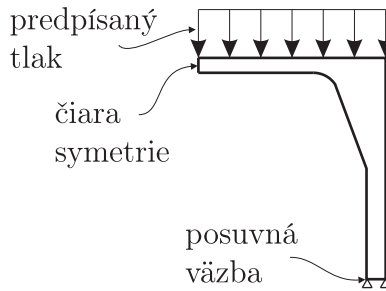
Na obr. 5.14 je zobrazená profilová hliníková tyč, ktorá je položená na podložke a na vrchnej strane profilovej tyče pôsobí tlak 1 MPa. Materiálové vlastnosti hliníka sú definované takto: $E = 0,8 \times 10^{11}$ Pa, $\mu = 0,3$.

Rozmery profilu tyče sú zobrazené na obr. 5.15, dĺžka tyče je desaťnásobná šírke profilu.

Cieľom analýzy je určiť deformáciu profilu, pričom lokálne správanie sa tyče na oboch koncoch sa má zanedbať. Cieľom je takisto stanoviť maximálne mechanické napätia v tyči.



Obr. 5.15. Príklad 2 – rozmery profilu v [mm]



Obr. 5.16. Príklad 2 – úloha rovinného pretvorenia, symetrická časť

Riešenie

Keďže profil tyče ani záťaž sa po dĺžke tyče nemenia, možno túto úlohu riešiť ako úlohu rovinného pretvorenia. Veľmi efektívne sa tu dá využiť rovinná symetria profilu, čím sa samotný model zjednoduší – obr. 5.16.

Preprocessor

1. Definovanie typu prvku: vhodný prvok na túto analýzu je prvok PLANE182 s nastavením na riešenie rovinného pretvorenia. Teda cez GUI zadefinujeme: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → (PLANE182 s príslušným nastavením KEYOPT(3) → Plane strain), alebo jednoduchšie cez príkaz:

```
/PREP7  
ET,1,182, , ,2
```

2. Definovanie materiálových vlastností: cez GUI: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → (EX=0.8E11, PRXY=0.3) alebo pomocou príkazov:

```
MP,EX,1,0.8E11  
MP,PRXY,1,0.3
```

3. Geometria: pri jej tvorbe bude využitý nasledovný postup: vytvorenie dvoch obdĺžnikov, ich odčítanie, vytvorenie trojuholníkovej plochy, zlúčenie oboch plôch do jednej, zaoblenie a nakoniec výsledné zlúčenie. Celý postup je zobrazený na obr. 5.17. Trebu tu poznamenať, že číslovanie plôch na tomto obrázku je len kvôli názornosti a nezodpovedá sa s číslovaním plôch v programe ANSYS.

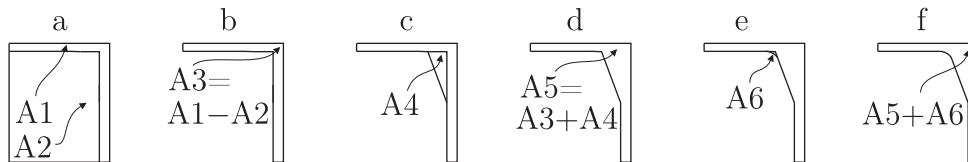
Postup cez GUI, resp. pomocou príkazov:

- vytvorenie dvoch obdĺžnikov (obr. 5.17a): Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Rectangle → By Dimensions → (X1=30E-3, Y1=45E-3), rovnakým spôsobom vytvoriť obdĺžnik s parametrami (X1=25E-3, Y1=40E-3), resp. pomocou príkazov:

```
RECTNG,30E-3, ,45E-3  
RECTNG,25E-3, ,40E-3
```

- odčítanie dvoch plôch (obr. 5.17b): Preprocessor → Modeling → Operate → Booleans → Subtract → Areas → (výber obdĺžnika 1 → Apply, výber obdĺžnika 2 → OK), resp. pomocou príkazov:

```
ASBA,1,2
```



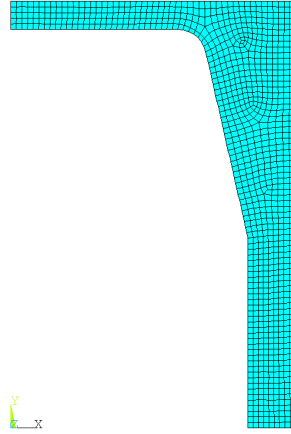
Obr. 5.17. Príklad 2 – postup tvorby geometrie

- vytvorenie trojuholníkovej plochy (obr. 5.17c): najjednoduchšie je vytvoriť dva keypoints a využitím tretieho rohového keypointu vytvoriť trojuholníkovú plochu: Preprocessor → Modeling → Create → Keypoints → In Active CS → (definovanie K101: X=25E-3, Y=20E-3, definovanie K102: X=20E-3, Y=43E-3). Nasleduje vytvorenie trojuholníkovej plochy z dvoch nových keypointsov a jedného pôvodného – rohového keypointu: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Arbitrary → Through KPs → (výber troch keypointsov, ktoré definujú trojuholníkovú plochu, potvrdenie OK), resp. pomocou príkazov:
 $K,101,25E-3,20E-3$
 $K,102,20E-3,43E-3$
 A,P
 - zlúčenie plôch do jednej plochy (obr. 5.17d): Preprocessor → Modeling → Operate → Booleans → Add → Areas → (výber Pick All), resp.:
 $AADD,ALL$
 - zaoblenie hrany (obr. 5.17e): Preprocessor → Modeling → Create → Lines → Line Fillet → (vybrať dve rohové čiary, OK a v otvorenom okne zadefinovať rádius zaoblenia, RAD=3E-3), následne vytvoriť plochu z troch malých čiar vzniknutých z predchádzajúcej operácie: Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Arbitrary → By Lines → (výber troch malých rohových čiar), resp.:
 $LFILLT,P$
 AL,P
 - výsledné zlúčenie plôch (obr. 5.17f): Preprocessor → Modeling → Operate → Booleans → Add → Areas → (výber Pick All), resp.:
 $AADD,ALL$
4. Sietovanie: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (sietovacie menu: v položke Size Controls aktivovať globálne nastavenie veľkosti prvkov pomocou tlačidla Global: Set, v novom okne zadať veľkosť prvkov SIZE=0.6E-3 a potvrdiť OK, plochu vysietovať aktivovaním tlačidla Mesh a potvrdením Pick All), alebo pomocou príkazov:
 $ESIZE,0.6E-3$
 $AMESH,ALL$

Sieť je zobrazená na obr. 5.18.

Solution

1. Definovanie typu analýzy: typ analýzy nie je nutné špecifikovať, statická analýza je automaticky nastavená ako predvolená.



Obr. 5.18. Príklad 2 – sieť konečných prvkov

2. Definovanie záťaže: na spodnú horizontálnu čiaru treba predpísať väzbu v smere osi Y a na čiaru symetrie symetrické podmienky, t. j.: **Solution** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Displacement** → **On Lines** → (výberové menu: vybrať spodnú horizontálnu čiaru a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať DOF UY a potvrdiť OK), a symetria: ... → **Displacement** → **Symmetry B.C.** → **On Lines** → (výberové menu: výber symetrickej čiary). Tlak sa predpisuje na vrchnú horizontálnu čiaru: **Solution** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Pressure** → **On Lines** → (výberové menu: vybrať vrchnú horizontálnu čiaru a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke zadať VALUE=1E6 a potvrdiť OK).
3. Spustenie riešenia: riešenie sa spúšťa **Solution** → **Solve** → **Current LS** → OK, alebo jednoducho pomocou príkazu:
SOLVE

Postprocessor

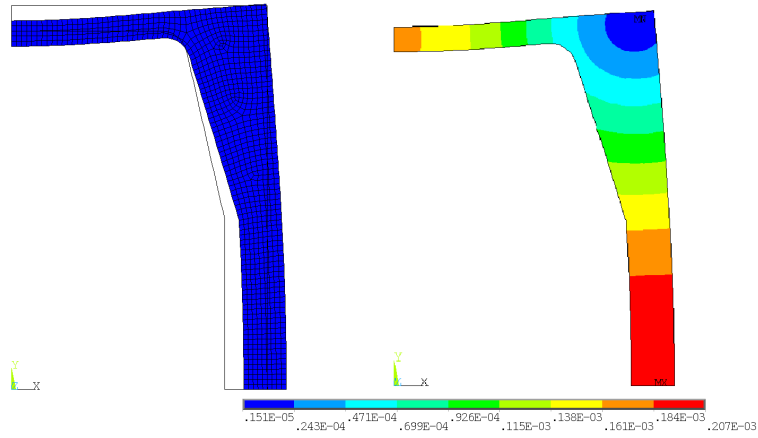
1. Zobrazenie zdeformovaného tvaru a posunutí:
/POST1
PLDISP,2

Zdeformovaný tvar je zobrazený na obr. 5.19 vľavo. Na zobrazenie celkových posunutí je najjednoduchšie použiť príkaz:
PLNSOL,U,SUM

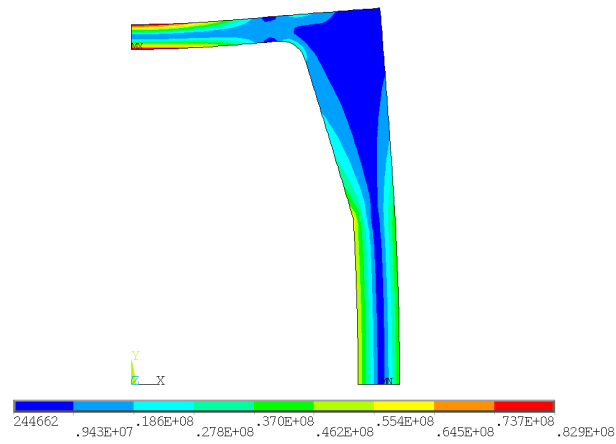
Celkové posunutia sú zobrazené na obr. 5.19 vpravo. Ako je z tohto obrázku vidno, maximálne posunutie dosahuje hodnotu 0,2 mm.

2. Zobrazenie napätí: von Misesove napätia na elementoch sa najjednoduchšie zobrazia pomocou príkazu:
PLESOL,S,EQV

Von Misesove napätia v systéme sú zobrazené na obr. 5.20. Maximálna hodnota tohto napätia má hodnotu 83 MPa.



Obr. 5.19. Príklad 2 – zdeformovaný tvar (vľavo) a výsledné celkové posunutia (vpravo) v [m]



Obr. 5.20. Príklad 2 – rozloženie von Misesových napätí v [Pa]

Kapitola 6

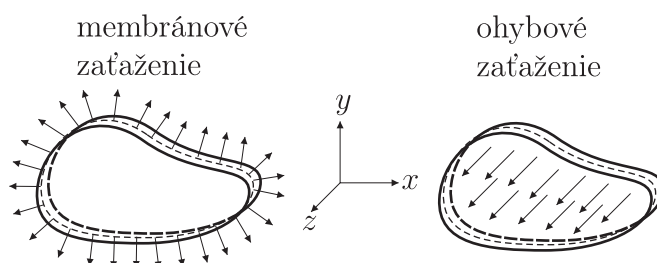
Statická analýza dosiek a škrupín

6.1 Cieľ kapitoly

V teoretickej časti tejto kapitoly sú prezentované základné rovnice pre tzv. Kirchhoffovu dosku. V praktickej časti sú prezentované dva príklady, pričom v prvom príklade je cieľom ukázať čitateľovi rozdiel v dosiahnutých výsledkoch, ak sa úloha rieši ako geometricky lineárna a geometricky nelineárna. Takisto je naznačený spôsob vytvorenia cyklu pri riešení s rôznymi hodnotami parametrov. V druhom príklade je ukázané prepojenie klasických prvkov so špeciálnymi, tzv. surface prvkami, ktoré sa dajú využiť pri definovaní spojitého zaťaženia v ľubovoľnom smere.

6.2 Matematické modely dosiek

Doska predstavuje teleso konštantnej hrúbky h , ktorá je výrazne menšia ako rozmery v kolmom smere na hrúbku. Takáto doska môže byť zaťažená silami, ktoré sú rovnobežné so strednicovou rovinou dosky – potom hovoríme o úlohe rovinatej napätosti (pozri kapitolu 5) a takéto zaťaženie sa tiež nazýva membránové zaťaženie. Druhý spôsob namáhania je namáhanie silami kolmými na strednicovú plochu – v mechanike hovoríme o doskách, a zaťaženie nazývame ohybové – obr. 6.1. Ak teleso, ktorého hrúbka je nepomerne menšia v porovnaní s ostatnými rozmermi, pričom nemá rovinný tvar, je zaťažené kombináciou membránového a ohybového zaťaženia, potom takéto teleso nazývame škrupina. Pre ohybové správanie dosiek bolo odvodených niekoľko matematických modelov, pričom



Obr. 6.1. Membránové a ohybové zaťaženie dosky

navzájom sa odlišujú spôsobom prepojenia membránového a ohybového správania. Medzi najznámejšie modely patria:

- Kirchhoffov model – model popisujúci správanie tenkej dosky pri malých priehyboch, zanedbávajúci šmykovú energiu, pričom membránové a ohybové správanie nie sú previazané
- Reissner-Mindlinov model – model opisujúci správanie sa tenkých a stredne hrubých dosiek, pričom uvažuje so šmykovými efektmi
- membránový škrupinový model – vhodný pre extrémne tenké dosky, kde membránový efekt je dominantný
- von Kármánov model – vhodný pre tenké platne, kde membránové a ohybové správanie sú previazané

V ďalšom budú prezentované základné rovnice iba Kirchhoffovho modelu dosky.

6.3 Kirchhoffov model dosky

Podmienky platnosti Kirchhoffovho modelu sú nasledujúce:

- doska je tenká, t. j. hrúbka dosky h je malá v porovnaní s rozmermi dosky v kolmom smere na hrúbku, ale zároveň hrúbka musí byť taká, že priehyb w je porovnateľný s hrúbkou h
- hrúbka dosky je konštantná alebo sa mení len pozvoľne tak, že 3D efekty je možné zanedbať
- doska je symetrická vzhľadom na strednicovú plochu
- transverzálne zaťaženie predstavuje spojitú záťaž na ploche dosky
- väzby sú také, že strednicová plocha nevykazuje výrazné predĺženia

6.3.1 Kinematické rovnice

Kinematické vzťahy Kirchhoffovej dosky vychádzajú z podmienok Euler-Bernoulliho modelu nosníka a sú rozšírené na prípad dvojsového ohybu, t. j. normála na strednicovú plochu zostane aj po zdeformovaní priama a kolmá na zdeformovanú strednicovú plochu. Teda ak nastal priehyb dosky, bod (x, y) strednicovej plochy vykazuje priehyb $w(x, y)$ a sklon zdeformovanej strednicovej plochy je definovaný výrazmi $\partial w/\partial x$ a $\partial w/\partial y$. Pre malé sklony strednicovej plochy tento sklon zároveň definuje rotáciu normály, a teda môžeme písať kinematický predpoklad

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (6.1)$$

$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (6.2)$$

Potom posunutia (u_1, u_2, u_3) ľubovoľného bodu so súradnicami (x, y, z) resp. s číselným označením (x_1, x_2, x_3) , ktorý vo všeobecnosti neleží na strednicovej ploche, sú určené

vzťahmi

$$u_1 = -z \frac{\partial w}{\partial x} = z\varphi_y \quad (6.3)$$

$$u_2 = -z \frac{\partial w}{\partial y} = -z\varphi_x \quad (6.4)$$

$$u_3 = w \quad (6.5)$$

Dosadením rovníc (6.3) až (6.5) do (5.12) dostávame

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -z\kappa_{xx} \quad (6.6)$$

$$e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -z\kappa_{yy} \quad (6.7)$$

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (6.8)$$

$$2e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z\kappa_{xy} \quad (6.9)$$

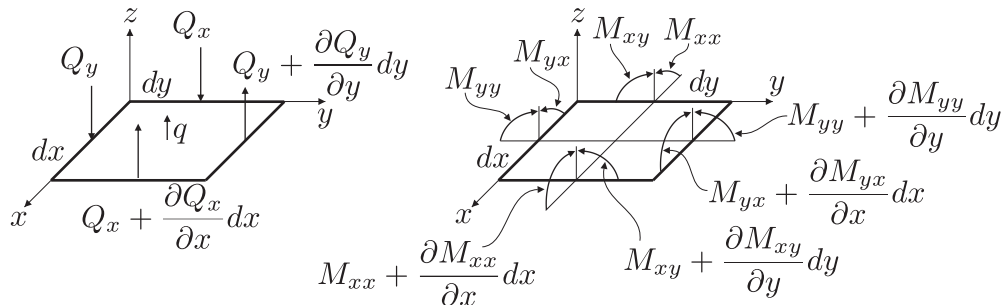
$$2e_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (6.10)$$

$$2e_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (6.11)$$

kde veličiny κ_{xx} , κ_{yy} a κ_{xy} sa nazývajú krivosti zdeformovanej strednicovej plochy. Ako je vidno z predchádzajúcich výrazov, posunutie a pretvorenie Kirchhoffovej dosky je jednoznačne určené priehybom $w(x, y)$.

6.3.2 Rovnice rovnováhy

Na rozdiel od úlohy rovinnej napätosti alebo pretvorenia, ale podobne ako pri analýze nosníkov, sa pri analýze dosiek pracuje so silami (označené ako Q), momentmi (označené ako M) a spojitým zaťažením (označené ako q). Rovnováha musí platiť jednak pre sily (pôsobia iba v smere osi z , t. j. jedna silová rovnica) a jednak pre momenty (okolo všetkých troch osí) – obr. 6.2. Pre silovú rovnováhu dostávame



Obr. 6.2. Silové a momentové pomery na diferenciálnom elemente $dx \times dy$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q \quad (6.12)$$

Pre momentové rovnováhy dostávame

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = -Q_x \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = -Q_y \quad (6.14)$$

$$M_{xy} = M_{yx} \quad (6.15)$$

Dosadením rovníc (6.13) a (6.14) do (6.12) a využitím (6.15) dostávame jednu rovnovážnu rovnicu pre Kirchhoffovu dosku

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = q \quad (6.16)$$

Vzťah medzi vnútornými momentami a napätiami je definovaný pomocou vzťahov

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (6.17)$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (6.18)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (6.19)$$

6.3.3 Konštitutívny zákon

Konštitutívny zákon (5.14) pre izotropný materiál je zredukovaný na tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1 - \mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \mu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

pričom ak sa využijú kinematické rovnice (6.6), (6.7), a (6.9), môžeme konštitutívny vzťah prepísať na tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{-zE}{(1 - \mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \mu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Dosadením rovníc (6.21) do rovníc (6.17) až (6.19) a zintegrování príslušných výrazov po výške dosky (od $-h/2$ po $h/2$), dostávame konštitutívny vzťah medzi vnútornými momentmi a krivosťou zdeformovanej strednicovej plochy a tento vzťah má tvar

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \frac{h^3 E}{12(1 - \mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \mu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

Ak dosadíme konštitutívne rovnice (6.22) do rovnice rovnováhy (6.16) s využitím kinematických rovníc (6.6), (6.7), a (6.9), môžeme pre Kirchhoffovu dosku písať rovnovážnu rovnicu, ktorá definuje vzťah medzi priehybom w a záťažou q

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \frac{12(1 - \mu^2)}{h^3 E} \quad (6.23)$$

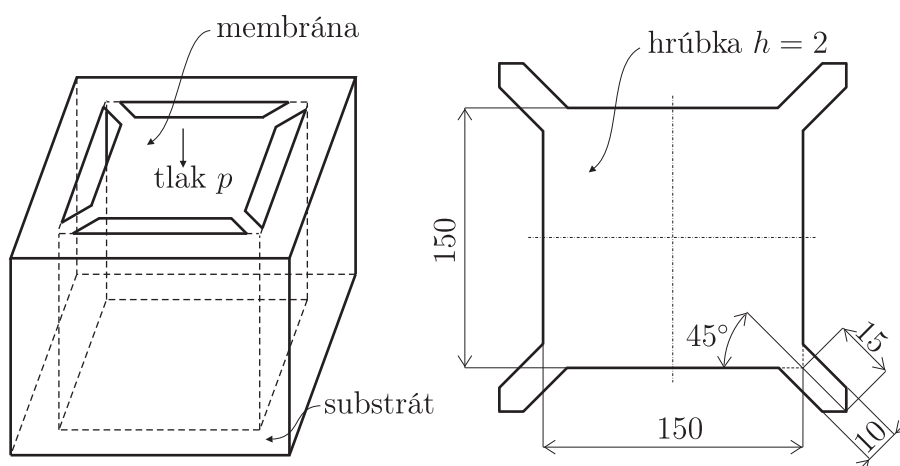
Na jednoznačné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (6.23) je potrebné definovať v každom bode geometrického okraja riešeného problému príslušné okrajové podmienky, ktoré popisujú spôsob uchytenia ako aj záťaž na okraji problému.

6.4 Riešené príklady

6.4.1 Príklad 1 – deformácia mikromembrány

Zadanie

Na obr. 6.3 vľavo je zobrazená mikromembrána umiestnená na substráte. Detail membrány spolu s rozmermi je na obr. 6.3 vpravo. Materiál membrány je GaAs, kvôli jednoduchosťi uvažujte s isotropnými vlastnosťami $E = 85,5$ GPa, $\mu = 0,31$. Membrána je zaťažovaná tlakom p v rozsahu od 10 do 50 kPa. Cieľom analýzy má byť stanovenie závislosti maximálneho priehybu membrány od vonkajšieho záťažového tlaku.



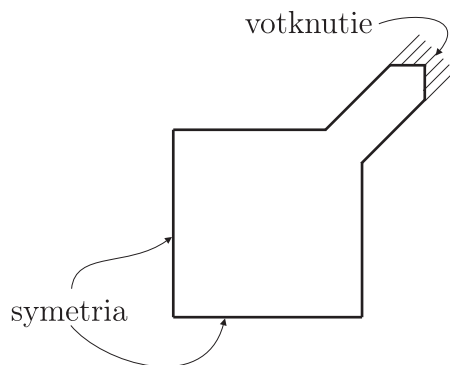
Obr. 6.3. Príklad 1 – mikromembrána: vľavo – umiestnenie membrány na substráte, vpravo – rozmery membrány v $[\mu\text{m}]$

Riešenie

Nie je potrebné modelovať celý systém, t. j. membránu aj substrát, lebo substrát je príliš masívny a prakticky neovplyvňuje deformáciu systému. Tá je definovaná deformáciou membrány. Keďže hrúbka membrány je výrazne menšia ako ostatné rozmery membrány, je táto úloha vhodná na použitie škrupinových prvkov. Membrána je symetrická okolo oboch hlavných osí, preto stačí modelovať iba jednu štvrtinu membrány – obr. 6.4. Pri modelovaní sa použije systém jednotiek μMKSV , kde dĺžka je definovaná v μm , tlak v MPa a sila v μN .

Preprocessor

1. Definovanie typu prvku: v programe ANSYS od verzie 13 nie je k dispozícii prvok na riešenie iba ohybu dosiek, ale je nutné použiť škrupinový prvok, ktorý v sebe zahŕňa jednak membránové a jednak ohybové zaťaženie. V starších verziách programu



Obr. 6.4. Príklad 1 – štvrtinový model membrány

ANSYS bolo možné použiť prvok SHELL63, ktorý umožňoval nastaviť správanie sa prvku: ohybové, membránové alebo ich kombinácia. V aktuálnych verziách je nutné použiť prvok SHELL181, ktorý umožňuje prepínať správanie sa medzi kombinovaným (ohybové + membránové) a membránovým. Teda cez GUI zadefinujeme: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → SHELL181, alebo jednoduchšie cez príkaz:

```
/PREP7  
ET,1,181
```

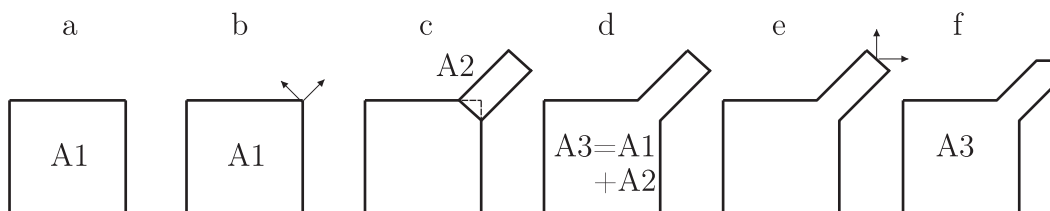
2. Definovanie materiálových vlastností: materiál je podľa zadania izotropný a môžeme ho definovať cez GUI: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → (EX=85500, PRXY=0.31) alebo pomocou príkazov:

```
MP,EX,1,85500  
MP,PRXY,1,0.31
```

3. Definovanie prierezu: cez GUI: Preprocessor → Sections → Shell → Lay-up → Add/Edit → (v zobrazenom menu zadefinovať hrúbku škrupiny → Thickness=2, ostatné parametre nie je treba nastavovať), alebo pomocou príkazov:

```
SECTYPE,1,SHELL  
SECDATA,2,1
```

4. Geometria: bude tu využitý nasledovný postup: vytvorenie štvorca, posunutie a natočenie WorkPlane, vytvorenie obdĺžnika, ich sčítanie, posunutie a natočenie WorkPlane a rozdelenie plochy pomocou WorkPlane. Celý postup je zobrazený na obr. 6.5.



Obr. 6.5. Príklad 1 – postup tvorby geometrie

Postup cez GUI, resp. pomocou príkazov:

- vytvorenie štvorca (obr. 6.5a): Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Rectangle → By Dimensions → (X1=75, Y1=75), resp. pomocou príkazov:
RECTNG,75,75
- posunutie a natočenie WorkPlane (obr. 6.5b): posunutie: Utility Menu → WorkPlane → Offset WP to → Keypoints + → (vybrať pravý horný keypoint – je to keypoint č. 3 a potvrdiť OK), natočenie: Utility Menu → WorkPlane → Offset WP by Increments ... → (zmeniť uhol na 45 a stlačením +Z vykonať rotáciu WP o 45°) resp. pomocou príkazov:
KWPAVE,3
WPROTA,45
- vytvorenie obdĺžnika (obr. 6.5c): Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Rectangle → By Dimensions → (X1=-5, X2=15, Y1=-5, Y2=5), resp. pomocou príkazov:
RECTNG,-5,15,-5,5
- sčítanie plôch (obr. 6.5d): Preprocessor → Modeling → Operate → Booleans → Add → Areas → (výber Pick All), resp.:
AADD,ALL
- posunutie a natočenie WorkPlane (obr. 6.5e): posunutie: Utility Menu → WorkPlane → Offset WP to → Keypoints + → (vybrať dva horné pravé keypointy – sú to keypointy č. 6 a 7 a potvrdiť OK), natočenie: Utility Menu → WorkPlane → Offset WP by Increments ... → (zmeniť uhol na 45 a stlačením -Z vykonať rotáciu WP o -45°), celý postup zopakovať s rotáciou o 90° okolo osi -X resp. pomocou príkazov:
KWPAVE,6,7
WPROTA,-45
WPROTA,-90
- rozdelenie plochy pomocou WorkPlane (obr. 6.5f): Preprocessor → Modeling → Operate → Booleans → Divide → Area by WorkPlane → (výber Pick All), resp.:
ASBW,ALL

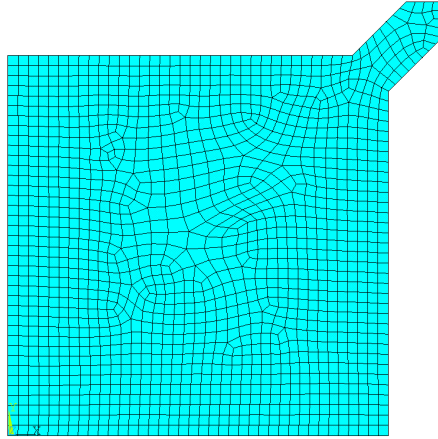
Následne vykonať rotáciu okolo osi Y o -90° a zopakovať rozdelenie plochy pomocou WP.

5. Sieťovanie: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (sieťovacie menu: v položke Size Controls aktivovať globálne nastavenie veľkosti prvkov pomocou tlačidla Global: Set, v novom okne zadať veľkosť prvkov SIZE=2 a potvrdiť OK, plochu vysieťovať aktivovaním tlačidla Mesh a potvrdením Pick All), alebo pomocou príkazov:
ESIZE,2
AMESH,ALL

Sieť je zobrazená na obr. 6.6.

Solution

1. Definovanie typu analýzy: typ analýzy nie je nutné špecifikovať, statická analýza je automaticky nastavená ako predvolená



Obr. 6.6. Príklad 1 – sieť konečných prvkov

2. Definovanie záťaže: dvom malým čiarom na prepojovacom mostíku membrány (čiarly 6 a 8) treba odobrať všetky stupne voľnosti a na spodnú horizontálnu a ľavú vertikálnu čiaru (čiarly 1 a 4) treba predpísať okrajové podmienky symetrie, t. j.: **Solution** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Displacement** → **On Lines** → (výberové menu: vybrať dve malé čiarly na prepojovacom mostíku membrány a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať **All DOF** a potvrdiť OK), a symetria: ... → **Displacement** → **Symmetry B.C.** → **On Lines** → (výberové menu: výber symetrickej čiarly a potvrdiť OK). Tlak sa predpisuje na plochu membrány: **Solution** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Pressure** → **On Areas** → (výberové menu: zvoliť **Pick All**) → (v zobrazenej tabuľke zadať **VALUE=0.05** a potvrdiť OK). Alebo pomocou príkazov:


```

/SOLU
DL,6, ,ALL
DL,8, ,ALL
DL,1, ,SYMM
DL,4, ,SYMM
SFA,ALL, ,PRES,0.05
      
```
3. Spustenie riešenia: riešenie sa spúšťa **Solution** → **Solve** → **Current LS** → OK, alebo jednoducho pomocou príkazu:


```

SOLVE
      
```

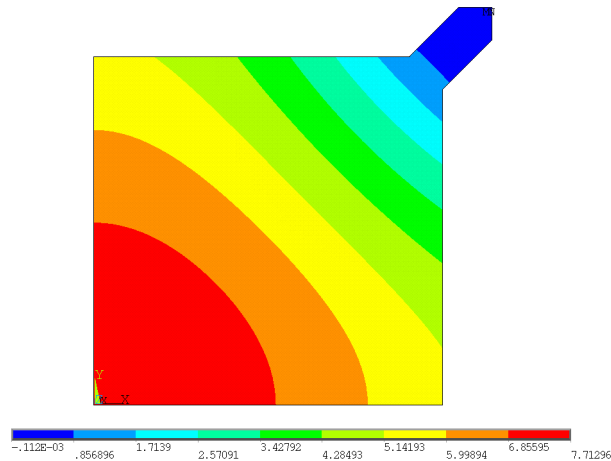
Postprocessor

1. Zobrazenie posunutí v smere osi Z: **General Postproc** → **Plot Results** → **Contour Plot** → **Nodal Solu** → (v ponuke zvoliť **DOF Solution** → **Z Component**), alebo pomocou príkazu:


```

/POST1
PLNSOL,U,Z
      
```

Grafický výstup je zobrazený na obr. 6.7. Ak sa ale pozrieme na maximálnu hodnotu posunutia, ktorá je $7,7 \mu\text{m}$, zistíme, že je výrazne väčšia ako je hrúbka membrány a preto treba výpočet zrealizovať aj so zapnutou geometrickou nelinearitou, ktorá spôsobí, že pri tenzore pretvorenia sa uvažujú aj nelineárne členy – rovnica (5.11),



Obr. 6.7. Príklad 1 – posunutie v smere os Z v $[\mu\text{m}]$, riešené ako geometricky lineárna úloha

a skutočná silová rovnováha sa uvažuje na zdeformovanom tvare (na rozdiel od geometricky lineárnej úlohy, kedy sa silová rovnováha uvažuje na pôvodnom, t. j. nezdeformovanom stave). Geometrická nelinearita sa musí nastaviť vo fáze *Solution*, takže sa treba do tejto fázy vrátiť.

Solution

1. aktivovanie geometrickej nelinearity: *Solution* → *Analysis Type* → *Sol'n Controls* → (v zobrazenej tabuľke ostať v záložke *Solution*, kde v položke *Analysis Options* zvoliť *Large Displacement Static* a potvrdiť pomocou *OK*) a opätovné spustenie riešenia, alebo:

```
/SOLU
NLGEOM,ON
SOLVE
```

Postprocessor

1. Opätovné vykreslenie posunutí v smere osi Z (tie isté príkazy ako vyššie) je zobrazené na obr. 6.8.

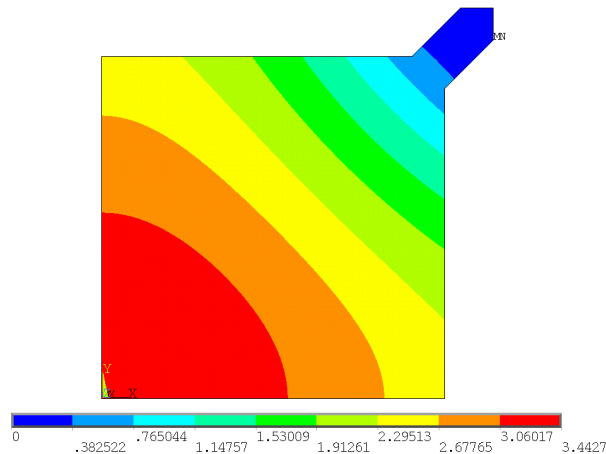
Ako je vidno z obr. 6.8, maximálne posunutie dosahuje hodnotu $3,4 \mu\text{m}$, čo je o polovicu menej ako v prípade, keď sa úloha riešila ako geometricky lineárna. Je preto nevyhnutné túto úlohu riešiť s aktivovanou geometrickou nelinearitou.

Samotnú realizáciu výpočtu pre rôzne záťaže je možné uskutočniť buď ručne, t. j. postupným modifikovaním záťaže, spúšťaním výpočtu a zapísaním si maximálneho priehybu, alebo automaticky, t. j. zosumarizovaním všetkých hore uvedených príkazov, pričom definovanie záťaže, výpočet, zistenie maximálneho priehybu a zápis tejto hodnoty do tabuľky uskutočniť v cykle. Na tieto účely je výhodné použiť príkaz **DO*. Realizácia cyklu by mohla vyzeráť napr. takto:

```
/PREP7
ET,1,181
```

...

celý preprocessor



Obr. 6.8. Príklad 1 – posunutie v smere os Z v [μm], riešené ako geometricky nelineárna úloha

```

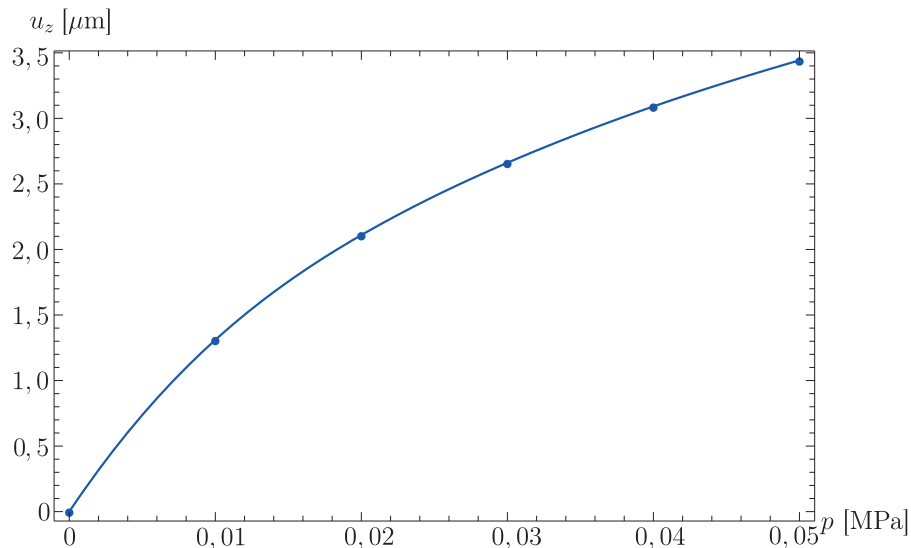
...
/SOLU
NLGEOM,ON
...
väzby a symetria
...
FINISH
*DIM,POSUN, ,5,2
*DO,I,1,5
  /SOLU
  P=I*0.01
  SFA,ALL, ,PRES,P
  SOLVE
  /POST1
  PLNSOL,U,Z
  *GET,ZMAX,PLNSOL,0,MAX
  POSUN(I,1)=P
  POSUN(I,2)=ZMAX
  FINISH
*ENDDO

```

Výsledkom takéhoto skriptu je vytvorenie poľa s názvom *POSUN*, ktoré má dva stĺpce. V prvom sú hodnoty záťažového tlaku P a v druhom maximálny priehyb $ZMAX$. Export dát do súboru na ďalšie spracovanie je možný pomocou príkazov **CFOPEN* a **VWRITE*. Získaná závislosť maximálneho priehybu od záťažového tlaku je zobrazená na obr. 6.9.

Pri MEMS systémoch hrá často dôležitú úlohu počiatočný napätostný stav systému. Tento počiatočný stav MEMS systému môže vzniknúť z dvoch rôznych fyzikálnych príčin:

- vplyv teplotnej rozťažnosti – technológia výroby MEMS systémov prebieha pri vyšších teplotách v závislosti na materiáli vrstvy a technológii výroby (napr. $1000\text{ }^{\circ}\text{C}$). MEMS systém je najčastejšie tvorený viacerými vrstvami, ktoré majú rôzne koefi-



Obr. 6.9. Príklad 1 – závislosť maximálneho priehybu od záťažového tlaku

cienty teplotnej rozťažnosti, čo sa prejaví pri chladnutí MEMS systému na teplotu okolia napätosťou vrstvy.

- mriežkové prispôbenie sa – druhá príčina napätosti vrstiev MEMS systému je spôsobená rôznou mriežkovou konštantou, pričom pri technológii výroby sa na jednu vrstvu (substrát) nanáša ďalšia vrstva (tzv. epitaxný rast). Pre novú vrstvu je energeticky výhodnejšie napojiť sa na prvú vrstvu, čo ale vnáša napätosť do novej vrstvy až do určitej hrúbky, kedy vďaka defektom sa nová vrstva uvoľní a dostane do pôvodného stavu.

Ako ukážku vplyvu počiatočnej napätosti od teplotnej rozťažnosti na deformáciu si ukážeme, ako sa zmení maximálna deformácia mikromembrány, ak sa uvažuje, že membrána bola v nenapätom stave pri 1000 °C a zaťažená je pri teplote okolia, ktorá je definovaná 25 °C. Koeficient teplotnej rozťažnosti je $\alpha = 5,73 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Je nevyhnuté zrealizovať nasledovné modifikácie už vytvoreného modelu mikromembrány:

Preprocessor

Materiálový model musí byť rozšírený o definovanie koeficientu teplotnej rozťažnosti: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Thermal Expansion → Secant Coefficient → Isotropic → (ALPX=5.73E-6), resp.:

MP,ALPX,1,5.73E-6

Solution

Vo tejto fáze je nevyhnutné definovať tzv. referenčnú teplotu – t. j. teplotu, ku ktorej sa vzťahuje napätostný stav systému (1000 °C) a samozrejme teplotu systému (25 °C). Cez GUI: Solution → Define Loads → Settings → Reference Temp → (TREF=1000) a ... → Settings → Uniform Temp → (TUNIF=25), alebo pomocou príkazov:

TREF,1000

a následne systém vyriešiť.

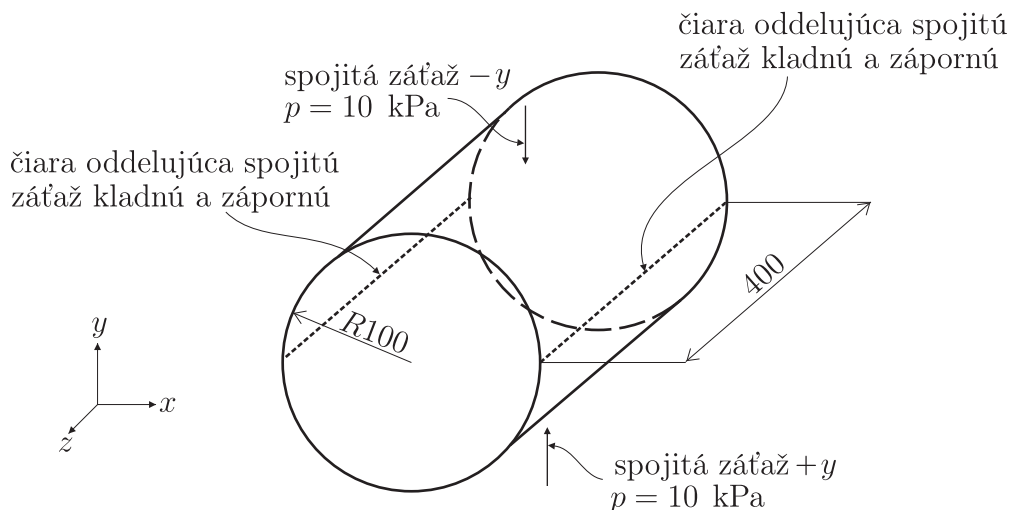
Postprocessor

Na analýzu dosiahnutých výsledkov je možné použiť všetky príkazy, ktoré boli použité v predchádzajúcej analýze. Výsledkom je, že pri tlaku 50 kPa je maximálny priehyb iba 0,6 μm , teda chladnutie spôsobilo, že vrstva je ťahovo napnutá, čo zvyšuje jej tuhosť.

6.4.2 Príklad 2 – analýza hliníkovej rúrky

Zadanie

Na obr. 6.10 je zobrazená rúrka so strednicovým polomerom $R = 100$ mm a dĺžky $L = 400$ mm, ktorá je vyrobená z hliníka: $E = 0,8 \times 10^{11}$ Pa a $\mu = 0,3$. Stena rúrky má hrúbku $h = 1,5$ mm, pričom rúrka je zaťažaná spojitým zaťažením 10 kPa v smere osi $-y$ na hornej polovici a v smere osi $+y$ na dolnej polovici rúrky. Cieľom je určiť deformáciu a napätosť rúrky. Geometrické parametre rúrky sú zobrazené na obr. 6.10.

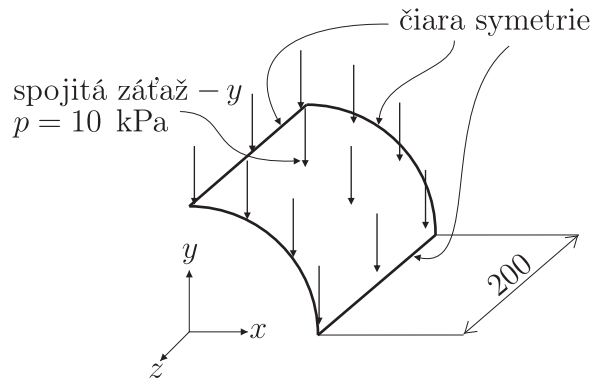


Obr. 6.10. Príklad 2 – hliníková rúrka – rozmery v [mm]

Riešenie

Keďže geometria aj záťaž je symetrická okolo rovín symetrie, je možné modelovať len symetrickú časť, čo v tomto prípade predstavuje 1/8 modelu – obr. 6.11. Geometria modelu predurčuje použitie škrupinových prvkov. Škrupinové prvky môžu byť priamo zaťažené tlakom, ale tento tlak musí byť v smere normály na škrupinu. Ak spojitá záťaž nie je v smere normály ale v inom smere – napr. ako v tejto úlohe v smere osi $-y$, musí sa okrem škrupinového prvku použiť špeciálny prvok, ktorý umožňuje definovať spojitú záťaž v určitom smere.

Preprocessor



Obr. 6.11. Príklad 2 – 1/8 modelu – rozmery v [mm]

1. Definovanie typu prvku: cez GUI: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete → (škrupinový prvok SHELL181 a surface prvok SURF154, pre ktorý sa nastaví keyoptiony takto: K2→1, K4→1). Keyoption K2→1 nastavuje, že smer pôsobenia spojitého zaťaženia sa bude definovať podľa lokálneho súradnicového systému. Druhý keyoption K4→1 nastavuje počet uzlov, ktorými je definovaný surface prvok, pričom počet uzlov surface prvku musí odpovedať počtu uzlov prvku, na ktorom je definovaný surface prvok – v tomto prípade je to prvok SHELL181. Keďže prvok SHELL181 je štvoruzlový, musí byť aj surface prvok SURF154 vytvorený na jeho povrchu štvoruzlový, čomu odpovedá vyššie uvedené nastavenie. Nastavenie prvkov cez príkazy:

```

/PREP7
ET,1,181
ET,2,154
KEYOPT,2,2,1
KEYOPT,2,4,1

```

2. Definovanie materiálových vlastností: materiál je podľa zadania izotropný a môžeme ho definovať cez GUI: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Isotropic → (EX=0.8E11, PRXY=0.3), alebo pomocou príkazov:

```

MP,EX,1,0.8E11
MP,PRXY,1,0.3

```

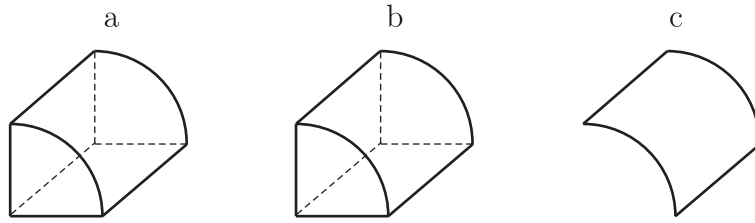
3. Definovanie prierezu: cez GUI: Preprocessor → Sections → Shell → Lay-up → Add/Edit → (v zobrazenom menu zadefinovať hrúbku škrupiny → THICKNESS=1.5E-3, ostatné parametre nechať nezmenené), alebo pomocou príkazov:

```

SECTYPE,1,SHELL
SECDATA,1.5E-3,1

```

4. Geometria: samotná geometria je jednoduchá a dá sa vytvoriť v troch krokoch: vytvorenie objemu, pričom súčasne s objemom sa vytvoria aj príslušné plochy, zmazanie len objemu, pričom ostanú všetky ostatné geometrické entity zachované a nakoniec zmazanie ostatných plôch a nižších entít s výnimkou valcovej plochy. Postup cez GUI a cez príkazy:

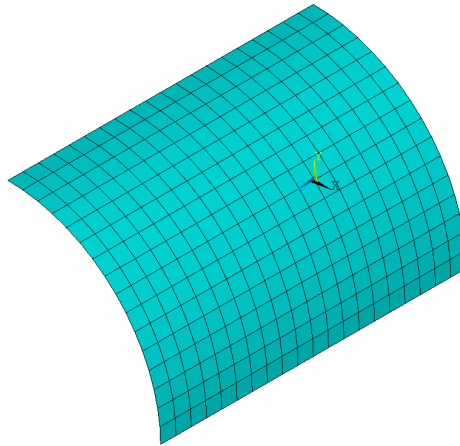


Obr. 6.12. Príklad 2 – postup tvorby geometrie

- vytvorenie objemu štvrtiny valca (obr. 6.12a): Preprocessor → Modeling → Create → Volumes → Cylinder → By Dimensions → (RAD1=100E-3, Z1=200E-3, THETA1=0, THETA2=90), resp. pomocou príkazov:
`CYLIND,100E-3, ,200E-3, ,0,90`
- zmazanie objemu štvrtiny valca pri zachovaní ostatných geometrických entít (obr. 6.12b): Preprocessor → Modeling → Delete → Volumes Only → (v zobrazenom výberovom menu vybrať Pick All), resp. pomocou príkazov:
`VDELETE,ALL, , ,0`
- zmazanie všetkých plôch a nižších entít s výnimkou valcovej plochy, (obr. 6.12c): Preprocessor → Modeling → Delete → Area and Below → (vybrať všetky plochy s výnimkou valcovej plochy a vo výberovom menu potvrdiť OK), resp. pomocou príkazov (plochy, ktoré sa majú zmazať majú čísla 1, 2, 4 a 5):
`ADELETE,1,2,1,1`
`ADELETE,4,5,1,1`

5. Sietovanie: Okrem siete škrupinových prvkov je potrebné vytvoriť aj sieť surface prvkov, ktoré budú prepojené s novým lokálnym súradnicovým systémom. Postup cez GUI a príkazy:

- škrupinové prvky: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (sietovacie menu: v položke Size Controls aktivovať globálne nastavenie veľkosti prvkov pomocou tlačidla Global: Set, v novom okne zadať veľkosť prvkov SIZE=10E-3 a potvrdiť OK, plochu vysietovať aktivovaním tlačidla Mesh a potvrdením Pick All), alebo pomocou príkazov:
`ESIZE,10E-3`
`AMESH,ALL`
- nový lokálny súradnicový systém: Utility Menu → WorkPlane → Local Coordinate Systems → Create Local CS → At WP Origin... → (v zobrazenom menu nechať číslo 11 ako číslo lokálneho súradnicového systému a potvrdiť OK), alebo:
`CSWPLA,11,0`
- nastavenie surface prvku SURF154 ako aktívneho prvku: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Elem Attributes → (v zobrazenom menu nastaviť TYPE=2 SURF154, ESYS=11), alebo
`TYPE,2`
`ESYS,11`
- vytvorenie surface prvkov na povrchu škrupinových prvkov: Preprocessor → Modeling → Create → Elements → Surf/Contact → Surf Effect → Generl Surface



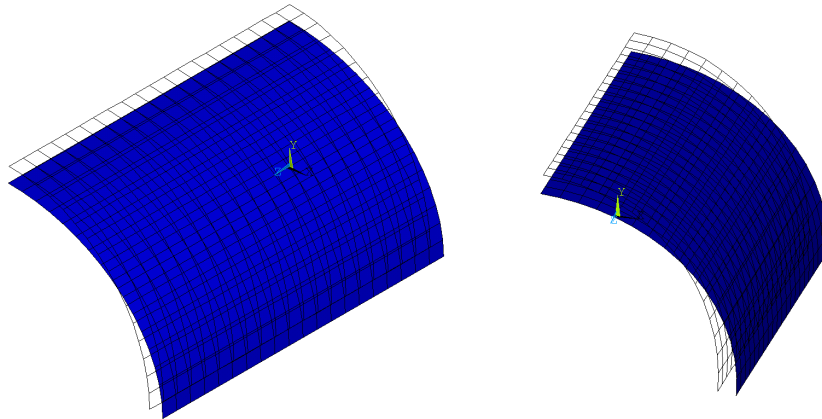
Obr. 6.13. Príklad 2 – sieť konečných prvkov

→ No Extra Node → (v zobrazenom výberovom menu zvoliť Pick All), alebo:
ESURF

Sieť je zobrazená na obr. 6.13.

Solution

1. Definovanie typu analýzy: typ analýzy nie je nutné špecifikovať, statická analýza je automaticky nastavená ako predvolená;
2. Definovanie záťaže: je potrebné zadefinovať symetrické okrajové podmienky na príslušné čiary a predpísať spojitú záťaž na surface prvky. Zadanie cez GUI resp. príkazy:
 - symetrické okrajové podmienky na príslušné čiary (sú to čiary 3, 7 a 8): Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → Symmetry B.C. → On Lines → (výberové menu: výber symetrických čiar), alebo:
/SOLU
DL,3, ,SYMM
DL,7, ,SYMM
DL,8, ,SYMM
 - vyselektovanie surface prvkov: Utility Menu → Select → Entities ... → (v zobrazenom selektovacom menu zvoliť Elements ako výberovú entitu, By Attributes ako výberovú metódu, zaškrtnúť Elem type num a do prázdneho políčka zadefinovať typ prvku, t. j. 2, potvrdiť OK), alebo:
ESEL,S,TYPE, ,2
 - záťaž na surface prvky: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Pressure → On Elements → (výberové menu: zvoliť Pick All, v zobrazenej tabuľke zadať LKEY=2, VALUE=-10E3 a potvrdiť OK). Parameter LKEY=2 definuje, že spojitá záťaž bude pôsobiť v smere $+y$ lokálneho systému priradeného týmto prvkom (t. j. $+y$ lokálneho systému č. 11) a VALUE=-10E3 definuje veľkosť spojitého zaťaženia (znamienko $-$ určuje, že skutočný smer bude $-y$). Následne všetky deaktivované prvky a ostatné entity treba vrátiť späť do aktuálneho



Obr. 6.14. Príklad 2 – vykreslenie zdeformovaného aj nezdeformovaného tvaru

výpočtového modelu, čo sa realizuje: Utility Menu → Select → Everything. Tieto kroky môžu byť definované aj pomocou príkazov:

```
SFE,ALL,2,PRESS,,-10E3
ALLSEL,ALL
```

3. Spustenie riešenia: riešenie sa spúšťa: Solution → Solve → Current LS → OK alebo pomocou príkazu:

```
SOLVE
```

Postprocessor

1. Zobrazenie zdeformovaného tvaru: zdeformovaný tvar sa zobrazí cez GUI takto: General Postproc → Plot Results → Deformed Shape → (zvoliť Def+undef edge, OK), alebo pomocou príkazov:

```
/POST1
PLDISP,2
```

Výsledok je zobrazený na obr. 6.14.

2. Zobrazenie posunutí: posunutia celkové, v smere osi X a Y sa zobrazujú cez GUI takto: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (zvoliť DOF Solution → Displacement vector sum, resp. X-Component a Y-Component a potvrdiť OK), alebo zadaním príkazov:

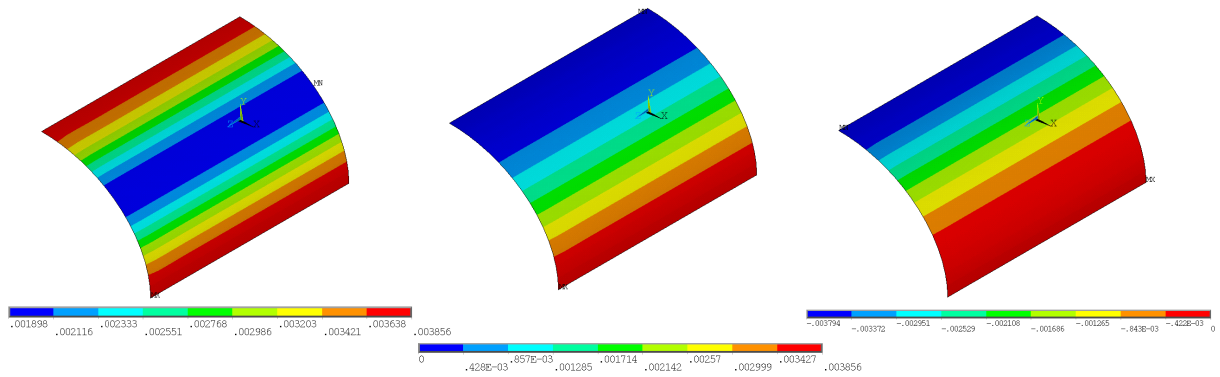
```
PLNSOL,U,SUM
PLNSOL,U,X
PLNSOL,U,Y
```

Výsledné zobrazenie celkových posunutí, posunutí v smere osi X a Y je zobrazené na obr. 6.15.

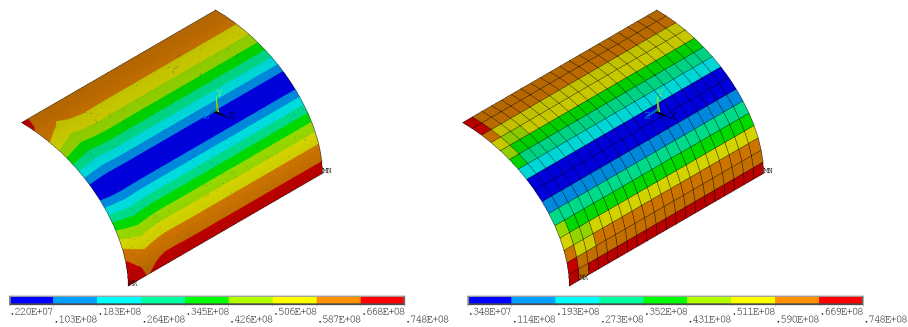
3. Zobrazenie von Misesových napätí: uzlové napätia: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (zvoliť Stress → von Mises stress, OK), alebo:

```
PLNSOL,S,EQV
```

prvkové napätia: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Element Solu



Obr. 6.15. Príklad 2 – posunutie zdeformovaného tvaru, zľava doprava: celkové posunutie, posunutie v smere osi X, posunutie v smere osi Y v [m]



Obr. 6.16. Príklad 2 – von Misesove napätie, vľavo uzlové napätie, vpravo prvkové napätie v [Pa]

→ (zvoliť Stress → von Mises stress, OK), alebo:
PLESOL,S,EQV

Uzlové aj prvkové napätia sú zobrazené na obr. 6.16.

Kapitola 7

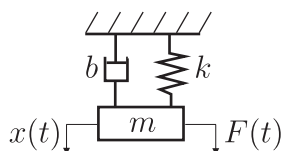
Modálna analýza

7.1 Cieľ kapitoly

Cieľom tejto kapitoly je oboznámiť čitateľa s pojmami vlastná frekvencia a vlastný tvar kmitania, pričom tieto pojmy sú vysvetlené na systéme s jedným stupňom voľnosti a následne aplikované na systém s viacerými stupňami voľnosti. V praktickej časti sú riešené dva jednoduché príklady, pričom v druhom príklade je ukázané, ako na vlastné frekvencie vplýva predpätie systému, napr. spôsobené technológiou výroby MEMS systémov.

7.2 Matematický opis modálnej analýzy

Modálna, harmonická a prechodová (transientná) analýza patria medzi tzv. dynamické analýzy, t. j. pri týchto analýzách do výpočtu vstupujú aj zotrvačné vlastnosti systému. Najjednoduchšie vysvetlenie všetkých troch analýz je na jednohmotovom systéme s jedným stupňom voľnosti (1 DOF) – obr. 7.1.



Obr. 7.1. Systém s jedným stupňom voľnosti

Systém na obr. 7.1 je charakterizovaný svojou hmotnosťou m , tuhosťou k a tlmením b , účinky vonkajšieho prostredia predstavuje časovo premenlivá sila $F(t)$. Hmota m pod účinkom vonkajších síl ako aj počiatočných podmienok (systém na začiatku deja v $t = 0$ s môže mať určitú výchylku a určitú rýchlosť) bude konať pohyb, ktorý je opísaný časovo premenlivou súradnicou $x(t)$.

Pohyb jednohmotového systému z obr. 7.1 je potom opísaný pohybovou rovnicou

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (7.1)$$

alebo ak sa neuvažuje tlmenie ($b = 0$)

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (7.2)$$

Z matematického hľadiska ide o obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu s konštantnými koeficientami, teda na jej jednoznačné riešenie je potrebné definovať dve ďalšie podmienky, ktoré sa pri prechodových úlohách volajú počiatkové podmienky a majú tvar:

$$x(0) = x_0 \quad (7.3)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (7.4)$$

Ak systém nie je budený vonkajšou silou (t. j. $F(t) = 0$) a samotný pohyb systému je spôsobený iba jeho počiatkovým stavom, ktorý je definovaný počiatkovou výchylkou x_0 a počiatkovou rýchlosťou \dot{x}_0 , môže byť rovnica (7.2) prepísaná na tvar

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad (7.5)$$

Ak zavedieme nové označenie

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (7.6)$$

potom riešenie tohto systému má tvar

$$x(t) = c \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (7.7)$$

kde amplitúda kmitania c má tvar

$$c = \sqrt{\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2 + x_0^2} \quad (7.8)$$

a uhol φ má tvar

$$\varphi = \arctan \frac{x_0 \omega_0}{\dot{x}_0} \quad (7.9)$$

Ako je vidno z rovnice riešenia (7.7), voľný systém bude kmitať s uhlovou frekvenciou ω_0 , pričom táto frekvencia je jednoznačne definovaná vlastnosťami systému – rovnica (7.6). Takto definovanú frekvenciu ω_0 nazývame vlastná kruhová frekvencia systému. Každéj vlastnej frekvencii odpovedá jeden vlastný tvar kmitania.

Systém má toľko vlastných frekvencií koľko má stupňov voľnosti. Ak teda pracujeme s MKP modelom, ktorý môžeme považovať za multi-DOF systém, potom rovnica (7.5) musí byť prepísaná do maticového zápisu a má tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (7.10)$$

kde \mathbf{M} je matica hmotnosti, \mathbf{K} je matica tuhosti, $\mathbf{x}(t)$ je vektor posunutí a $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ je vektor zrýchlení uzlov MKP modelu. Ak teda predpokladáme riešenie v tvare

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}e^{i\omega t} \quad (7.11)$$

pre vektor zrýchlenia dostávame

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\omega^2 \mathbf{c}e^{i\omega t} \quad (7.12)$$

Dosadením rovníc (7.11) a (7.12) do (7.10) dostávame

$$(-\omega^2 \mathbf{M}\mathbf{c} + \mathbf{K}\mathbf{c}) e^{i\omega t} = \mathbf{0} \quad (7.13)$$

Po malej úprave rovnice (7.13) a využitím nového označenia $\omega^2 = \lambda$ môžeme písať

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (7.14)$$

Čísla λ sa nazývajú vlastné čísla systému a určenie týchto čísel tak, aby systém mal netriviálne riešenie (triviálne riešenie predstavuje $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, ktorému odpovedajú ľubovoľné hodnoty λ) sa nazýva problém vlastných čísel, pričom každému vlastnému číslu λ odpovedá vlastný vektor \mathbf{c} . Určenie vlastných čísel λ a vlastných vektorov \mathbf{c} predstavuje matematickú podstatu modálnej analýzy.

Určenie vlastných čísel predstavuje hľadanie takých λ , ktoré spĺňajú rovnicu

$$\det |\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}| = 0 \quad (7.15)$$

Na riešenie problému (7.15) sa používajú rôzne techniky, medzi najznámejšie patria: Lanczosova metóda, metóda iterácie podpriestoru, zovšeobecnená Jacobiho metóda a iné.

7.3 Matica hmotnosti

Pri dynamických analýzach (t. j. pri modálnej, harmonickej a prechodovej) je potrebné vytvoriť pre každý prvok maticu hmotnosti. Pri vytváraní tejto matice sa využívajú tvarové funkcie daného prvku, pričom materiálová vlastnosť, ktorá vstupuje do formovania matice hmotnosti, je hustota. Matica hmotnosti 2D prvku jednotkovej hrúbky má tvar

$$\mathbf{M}^e = \int_{A^e} \boldsymbol{\phi}^{eT} \rho^e \boldsymbol{\phi}^e dA \quad (7.16)$$

Matica $\boldsymbol{\phi}^e$ obsahuje tvarové funkcie daného prvku a pre štvoruzlový 2D prvok jej tvar je definovaný rovnicou (5.42), ρ^e predstavuje hustotu materiálu daného prvku a A^e je plocha daného prvku (takáto matica sa nazýva konzistentná). Výpočet tohto integrálu sa najčastejšie realizuje transformáciou na jednotkovú oblasť podobne ako pri matici tuhosti a numerickým výpočtom integrálu na jednotkovej oblasti.

Výsledná matica hmotnosti \mathbf{M} celej sústavy je zostavená z prvkových matíc hmotnosti \mathbf{M}^e rovnakým spôsobom ako výsledná matica tuhosti. Táto matica, ktorá je pásová, sa špeciálnymi technikami môže diagonalizovať (v angličtine sa takáto matica nazýva lumped) čo zefektívňuje výpočet pri prechodových analýzach.

7.4 Riešené príklady

7.4.1 Príklad 1 – modálna analýza votknutého nosníka

Zadanie

Určite päť prvých vlastných frekvencií a im zodpovedajúcich vlastných tvarov kmitania votknutého nosníka z ocele riešeného v úlohe 4.5.1. Materiálové dáta z kapitoly 4.5.1 (t. j. modul pružnosti v ťahu $E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa a Poissonovo číslo $\mu = 0,3$) musia byť doplnené o hustotu $\rho = 7850$ kg/m³.

Riešenie

Preprocessor

Celý postup práce na tomto modeli v preprocesore je detailne opísaný v kapitole 4.5.1. Iba materiálový model musí byť rozšírený o definovanie hustoty: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Density → (DENS=7850), resp.:
MP,DENS,1,7850

Solution

1. Definovanie typu analýzy: je potrebné nastaviť modálny typ analýzy, t. j.: Solution → Analysis Type → New Analysis → Modal, alebo cez príkaz:
/SOLU
ANTYPE,2

Následne treba zvoliť typ riešiča a zvoliť počet vlastných tvarov (módov), ktoré majú byť vypočítané: Solution → Analysis Type → Analysis Options → (v položke *MODOPT* nechať zvolený riešič Block Lanczos, a do okna pre počet módov zadať 5), resp.:
MODOPT,LANB,5

2. Definovanie záťaže: pri modálnej analýze má zmysel pracovať iba s väzbovými okrajovými podmienkami, t. j. záťaž vo forme síl, resp. tlakov do výpočtu nevstupuje, takže votknutie cez GUI: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Keypoints → (výberové menu: vybrať keypoint 1 a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať All DOF), alebo pomocou príkazu:
DK,1,ALL
3. Spustenie riešenia: riešenie sa spúšťa obvyklým spôsobom: Solution → Solve → Current LS → OK, alebo jednoducho pomocou príkazu:
SOLVE

Postprocessor

1. Zoznam prvých päť vlastných frekvencií: najjednoduchší spôsob vylistovania vypočítaných vlastných frekvencií je: General Postproc → Results Summary, alebo:
/POST1
SET,LIST

Tieto frekvencie sú uvedené v tab. 7.1.

Treba si uvedomiť, že prvok BEAM188 je 3D prvok, takže tieto frekvencie odpovedajú vlastným tvarom kmitania v oboch priečných rovinách, t. j. niektoré tvary ležia v rovine X-Y a niektoré v rovine X-Z.

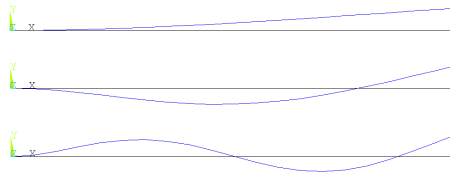
2. Vlastné tvary kmitania: vlastným tvarom kmitania v rovine X-Y odpovedajú frekvencie č. 1, 3 a 5. Dajú sa zobrazíť: General Postproc → Results Summary → Read Results → First Set a následne General Postproc → Plot Results → Deformed Shape, resp.:

Tabuľka 7.1. Príklad 1 – vlastné frekvencie

vl. frekvencia	hodnota [Hz]
1	18,555
2	37,012
3	116,28
4	228,43
5	326,26

SET,FIRST
PLDISP,2

Ďalšie tvary kmitania sa zobrazujú rovnakým spôsobom, pri aktivovaní *SET,NEXT*. Vlastné tvary kmitania odpovedajúce 1, 3 a 5 vl. frekvencii sú zobrazené na obr. 7.2.



Obr. 7.2. Príklad 1 – vlastné tvary kmitania

7.4.2 Príklad 2 – modálna analýza mikromembrány

Zadanie

Určite prvé štyri vlastné frekvencie mikromembrány z úlohy 6.4.1. Hustota GaAs je $\rho = 5317 \text{ kg/m}^3$, ostatné materiálové parametre aj okrajové podmienky sú definované v úlohe 6.4.1.

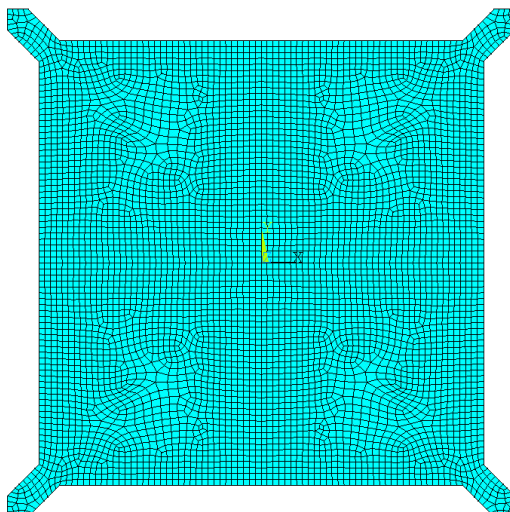
Riešenie

Preprocessor

Celý postup práce na vytvorenie modelu v preprocesore je detailne opísaný v kapitole 6.4.1. Materiálový model musí byť rozšírený o definovanie hustoty materiálu v systéme jednotiek μMKSV : *Preprocessor* → *Material Props* → *Material Models* → *Structural* → *Density* → (*DENS=5317E-18*), resp.:

MP,DENS,1,5317E-18.

Pri modálnych analýzach je nutné riešiť celú štruktúru systému. Nie je možné využiť symetriu štruktúry, nakoľko pri kmitaní štruktúry vznikajú aj nesymetrické vlastné tvary. Z toho dôvodu budú vlastné frekvencie počítané na celom modeli, t. j. po vykonaní všetkých krokov v kapitole 6.4.1 sa ozrkadlí plocha aj s prvkami okolo globálnych rovín Y-Z a X-Z: globálny koordinačný systém: *Utility Menu* → *WorkPlane* → *Change Active CS to* → *Global*



Obr. 7.3. Príklad 2 – sieť konečných prvkov

Cartesian a zrkadlenie: Preprocessor → Modeling → Reflect → Areas → (vo výberovom menu vybrať Pick All, v zobrazenom menu vybrať Y-Z plane a potvrdiť OK), predchádzajúci krok zopakovať aj pre zrkadlenie okolo roviny X-Z, zjednotenie geometrických a MKP entít: Preprocessor → Numbering Ctrl → Merge Items → (v zobrazenom menu vybrať Label=All a potvrdiť OK), resp. pomocou príkazov:

```
CSYS,0
ARSYM,X,ALL,, , ,0
ARSYM,Y,ALL,, , ,0
NUMMRG,ALL
```

Vytvorená sieť celého modelu je zobrazená na obr. 7.3.

Solution

1. Definovanie typu analýzy: je potrebné nastaviť modálny typ analýzy, t. j.: Solution → Analysis Type → New Analysis → Modal, alebo cez príkaz:

```
/SOLU
ANTYPE,2
```

Následne treba zvoliť typ riešiča a zvoliť počet módov, ktoré majú byť vypočítané: Solution → Analysis Type → Analysis Options → (v položke MODOPT nechať zvolený riešič Block Lanczos, a do okna pre počet módov zadať 4), resp.:

```
MODOPT,LANB,4
```

2. Definovanie záťaže: votknutie na 8 čiarach prepojovacích mostíkov (čiary: 3, 5, 6, 8, 18, 19, 26 a 27) cez GUI: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Lines → (vybrať všetkých 8 čiar a potvrdiť OK, v zobrazenej tabuľke vybrať All DOF), alebo pomocou príkazu:

```
DL,P
```

3. Spustenie riešenia: riešenie cez GUI: Solution → Solve → Current LS → OK, alebo

jednoducho pomocou príkazu:
SOLVE

Postprocessor

1. Zoznam prvých štyroch vlastných frekvencií cez GUI: General Postproc → Results Summary, alebo:
/POST1
SET,LIST

Tieto frekvencie sú uvedené v tab. 7.2. Ako je z tab. 7.2 vidno, druhá a tretia

Tabuľka 7.2. Príklad 2 – vlastné frekvencie

vl. frekvencia	hodnota [kHz]
1	141,69
2	296,68
3	297,15
4	411,30

vlastná frekvencia sú prakticky rovnaké, čo potvrdzujú aj vlastné tvary kmitania, ktoré sú čo do tvaru rovnaké, len sú vzájomne o 90° natočené.

2. Vlastné tvary kmitania: keďže dominantný smer pre kmitanie je smer osi Z, je výhodné, aby pri grafickom zobrazení vlastných tvarov kmitania boli farebne zobrazené posunutia práve v tomto smere, teda cez GUI: načítanie prvého vlastného tvaru: General Postproc → Results Summary → Read Results → First Set a následne General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → Contour Plot → (v zobrazenej tabuľke vybrať Nodal Solution → DOF Solution → Z-Component of displacement a potvrdiť OK), resp.:
SET,FIRST
PLNSOL,U,Z

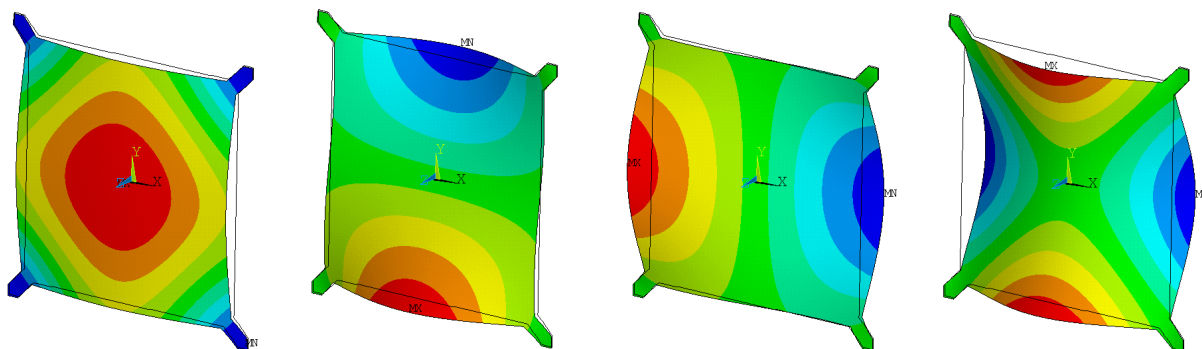
Ďalšie tvary kmitania sa zobrazujú rovnakým spôsobom, pri aktivovaní *SET,NEXT*. Vlastné tvary kmitania sú zobrazené na obr. 7.4.

Pri modálnej analýze sa podobne ako pri statickej môže výrazne prejavíť vplyv pôvodného napätostného stavu – predpätia. Tento stav môže byť spôsobený ako už bolo naznačené napr. výrobnou technológiou, alebo aj spôsobom zaťaženia. Napr. ak by sme chceli určiť vlastné frekvencie systému, ktorý rotuje, museli by sme uvažovať s tým, že systém je predpätý vďaka odstredivým silám, ktoré sú do systému vnesené samotnou rotáciou.

Ako príklad takejto analýzy uvidíme modifikáciu výpočtu vlastných frekvencií mikromembrány, ktorá bola predpätá vychladnutím – parametre chladnutia ako aj koeficient teplotnej rozťažnosti sú uvedené v príklade 6.4.1 v samom závere.

Na zahrnutie predpätia do modelu sa musia vykonať dve analýzy:

1. analýza je klasická geometricky lineárna statická analýza, kde sú zahrnuté účinky spôsobujúce predpätie, pričom musí byť zapnutý tzv. prestress efekt



Obr. 7.4. Príklad 2 – prvé štyri vlastné tvary kmitania mikromembrány, zľava (1. vl. tvar) do prava (4. vl. tvar)

2. analýza je modálna analýza takisto so zapnutým prestress efektom, pričom výsledkom sú vlastné frekvencie predpätého systému.

Celý postup v skripte vyzerá takto:

```
/PREP7
```

```
...
```

celý Preprocessor je rovnaký ako v modálnej analýze bez predpätia, len sa pridá koeficient teplotnej rozťažnosti

```
...
```

```
MP,ALPX,1,5.73E-6
```

```
/SOLU
```

```
ANTYPE,STATIC
```

```
...
```

väzby rovnaké ako v modálnej analýze bez predpätia treba pridať záťaž od teploty a zapnúť prestress efekt a úlohu vypočítať

```
...
```

```
TREF,1000
```

```
TUNIF,25
```

```
PSTRES,ON
```

```
SOLVE
```

```
FINISH
```

```
ANTYPE,MODAL
```

```
...
```

vykonať modálnu analýzu so zapnutým prestress efektom

```
...
```

```
PSTRES,ON
```

```
SOLVE
```

```
/POST1
```

```
...
```

kontrola výsledkov v postprocesore

Ak tento postup zrealizujeme, dostaneme síce rovnaké vlastné tvary, ako pri systéme bez predpätia – obr. 7.4, ale frekvencie sa výrazne zmenia. Nové frekvencie mikromembrány s uvažovaním predpätia v mikromembráne sú zobrazené v tab. 7.3.

Tabuľka 7.3. Príklad 2 – vlastné frekvencie pri uvažovaní predpätia mikromembrány

vl. frekvencia	hodnota [kHz]
1	512,89
2	785,23
3	785,46
4	862,49

Ako je z výsledkov vidno, ťahové napätie, ktoré bolo do membrány vnesené cez teplotnú rozťažnosť a nastavením chladnutia (referenčná teplota je vyššia ako je teplota systému) spôsobí zvýšenie tuhosti konštrukcie a tým aj zvýšenie vlastných frekvencií systému.

Kapitola 8

Harmonická analýza

8.1 Cieľ kapitoly

Cieľom tejto kapitoly je oboznámiť čitateľa so základným matematickým opisom harmonickej analýzy pre systém s 1 stupňom voľnosti (1 DOF) aj pre systém s viac stupňami voľnosti (multi-DOF). Praktická časť kapitoly je zameraná na základné nastavenia harmonickej analýzy v programe ANSYS, pričom prezentované sú dva príklady. V druhom príklade je ukázané definovanie anizotropných materiálových vlastností, s ktorými sa môžeme často pri MEMS systémoch stretnúť.

8.2 Matematický opis harmonickej analýzy

Ako bolo uvedené v kapitole 7, 1 DOF netlmený systém zobrazený na obr. 8.1 je opísaný rovnicou

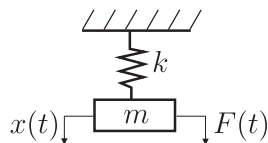
$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (8.1)$$

s príslušnými počiatočnými podmienkami

$$x(0) = x_0 \quad (8.2)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (8.3)$$

Ak budiaca sila má harmonický priebeh, t. j. môže byť zapísaná v tvare



Obr. 8.1. Systém s jedným stupňom voľnosti

$$F(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad (8.4)$$

kde ω je uhlová frekvencia budiacej sily (je to v zásade iná frekvencia ako vlastná, lebo vlastná frekvencia je vlastnosť systému, zatiaľ čo budiaca frekvencia je vlastnosťou budenia, teda reprezentuje vplyv okolia na systém), potom, ak nebudeme uvažovať prechodovú

oblasť odozvy spôsobenú počiatočnými podmienkami (8.2) a (8.3), môžeme odozvu systému vzhľadom na pôsobiacu budiacu silu očakávať v tvare

$$x(t) = ce^{i\omega t} \quad (8.5)$$

a druhá derivácia $x(t)$ podľa času (zrýchlenie) má tvar

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 ce^{i\omega t} \quad (8.6)$$

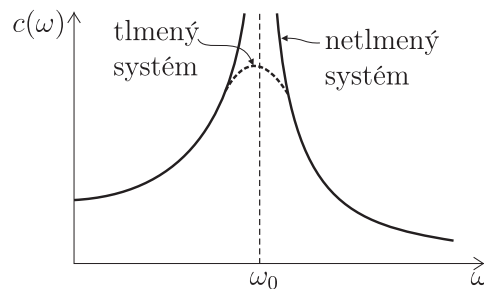
Dosadením rovníc (8.4), (8.5) a (8.6) do rovnice (8.1) a po vykonaní jednoduchých úprav dostávame základnú rovnicu pre harmonickú záťaž v tvare

$$(-m\omega^2 + k) c = F_0 \quad (8.7)$$

Riešením rovnice je amplitúda kmitania c v tvare

$$c = \frac{F_0}{(k - m\omega^2)} \quad (8.8)$$

Typická odozva 1 DOF netlmeného systému na harmonické budenie, t. j. amplitúdovo-frekvenčná charakteristika je zobrazená na obr. 8.2, kde ω_0 predstavuje vlastnú frekvenciu systému ($\omega_0^2 = k/m$). Pri netlmenom systéme, ak je budiaca frekvencia zhodná s vlast-



Obr. 8.2. Systém s jedným stupňom voľnosti – amplitúdovo-frekvenčná odozva

nou frekvenciou systému, amplitúda kmitania nadobúda teoreticky nekonečné hodnoty. Reálne sa v systéme vždy nachádza tlmenie (či už vonkajšie – vplyv okolitého prostredia, alebo vnútorné – materiálové) a táto maximálna amplitúda nadobúda konečné hodnoty. Maximálna hodnota amplitúdy pri tlmenom systéme nastáva pri inej budiacej frekvencii ako v prípade netlmeného systému. Frekvencie, pri ktorých sústava nadobúda maximálne výchylky sa nazýva rezonančná frekvencia.

Ak je riešený systém multi-DOF, napr. model MKP, potom rovnica (8.7) nadobúda tvar

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) \mathbf{c} = \mathbf{F}_0 \quad (8.9)$$

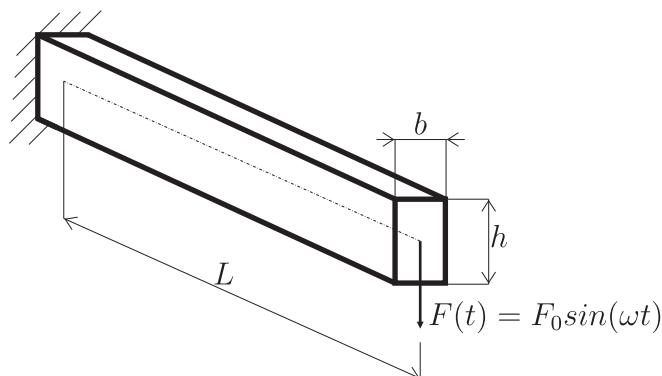
Pre danú budiacu frekvenciu ω a danú amplitúdu vektora budenia (všetky budiace sily musia mať rovnakú budiacu frekvenciu ω ale môžu mať rozdielnu amplitúdu F_0) sa vypočíta vektor amplitúdy kmitania \mathbf{c} , čím je úloha harmonickej analýzy splnená.

8.3 Riešené príklady

8.3.1 Príklad 1 – harmonická analýza votknutého nosníka

Zadanie

Votknutý nosník zaťažený na voľnom konci harmonickou silou s amplitúdou 500 N a frekvenciou v rozsahu od 1 do 50 Hz je zobrazený na obr. 8.3. Materiál aj geometrické parametre sú rovnaké ako v príklade 4.5.1 resp. 7.4.1. Cieľom je získať amplitúdovo-frekvenčnú charakteristiku koncového bodu pre danú silu a daný rozsah frekvencií.



Obr. 8.3. Príklad 1 – votknutý nosník zaťažený harmonickou silou

Riešenie

Preprocessor

Celý postup práce na tomto modeli v preprocesore je detailne opísaný v kapitole 4.5.1 a 7.4.1.

Solution

1. Definovanie typu analýzy a options: typ analýzy: je potrebné nastaviť harmonický typ analýzy, t. j.: Solution → Analysis Type → New Analysis → Harmonic, options: Solution → Analysis Type → Analysis Options → (parameter Solution method nechať nastavený na Full, potvrdiť OK), alebo cez príkaz:

```
/SOLU  
ANTYPE,3  
HROPT,FULL
```

2. Definovanie záťaže: votknutie sa definuje takto: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Keypoints → (výberové menu: vybrať keypoint 1 a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať All DOF). Záťaž je definovaná pomocou GUI: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Force/Moment → On Keypoints → (výberové menu: vybrať keypoint 1 a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať Lab=FZ a VALUE=-500), alebo jednoduchšie pomocou príkazu:
DK,1,ALL

FK,1,FZ,-500.

Následne treba zdefinovať frekvenčný rozsah zaťaženia, špecifikácia veľkosti kroku (reálne sa definuje počet podkrokov) a spôsob zaťažovania, t. j. či sa medzi jednotlivými podkrokmi amplitúda záťaže zvyšuje lineárne (rampové zaťaženie) tak, že zadaná hodnota (t. j. 500 N) sa dosahuje až v poslednom podkroku, alebo je amplitúda záťaže konštantná (stepové zaťaženie) pre všetky frekvencie. Tieto parametre sa nastavujú: **Solution** → **Load Step Opts** → **Time/Frequenc** → **Freq and Substep** → (v zobrazenom okne definovať frekvenčný rozsah 1,50, počet substepov 49 a typ zaťaženia **Stepped**) alebo:

HARFRQ,1,50

NSUBS,49

KBC,1

3. Spustenie riešenia: riešenie sa spúšťa obvyklým spôsobom: **Solution** → **Solve** → **Current LS** → **OK**, alebo jednoducho pomocou príkazu:

SOLVE

Postprocessor

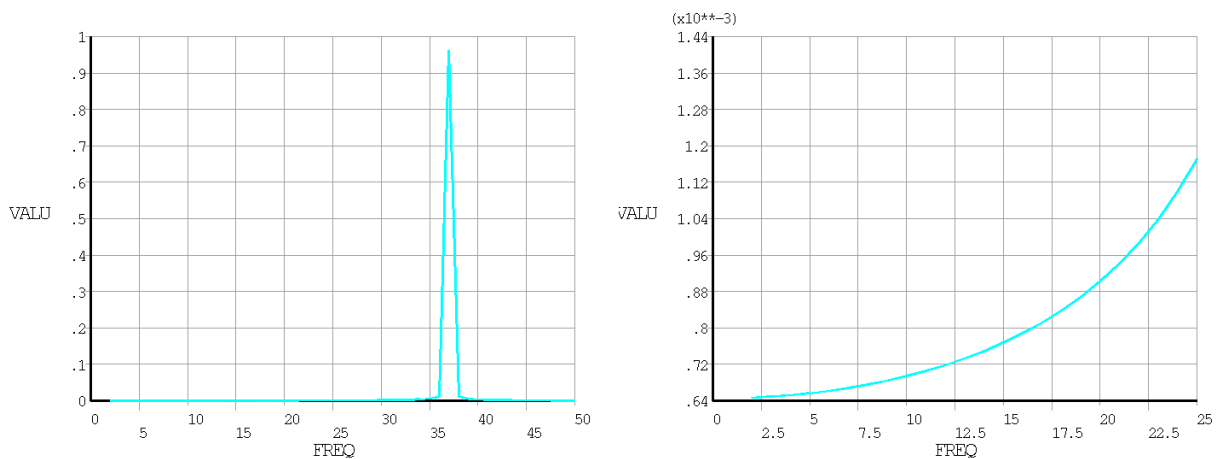
1. Amplitúdovo-frekvenčná charakteristika: amplitúdovo-frekvenčná charakteristika sa zobrazuje v tzv. Time-History postprocesore a to takto: **TimeHist Postpro** → **Variable Viewer** → (cez položku **Add Data** pridať posunutie v smere osi Z koncového bodu s označením *UZ_2*, cez položku **Graph Data** vykresliť amplitúdovo-frekvenčnú charakteristiku), alebo pomocou príkazov:

/POST26

NSOL,2,2,U,Z,UZ_2

XVAR,1

PLVAR,2



Obr. 8.4. Príklad 1 – amplitúdovo-frekvenčná charakteristika koncového bodu, amplitúda v smere osi Z, vľavo frekvenčný rozsah 0 až 50 Hz, 49 substepov, vpravo zmenšený frekvenčný rozsah 0 až 25, rovnaký počet substepov

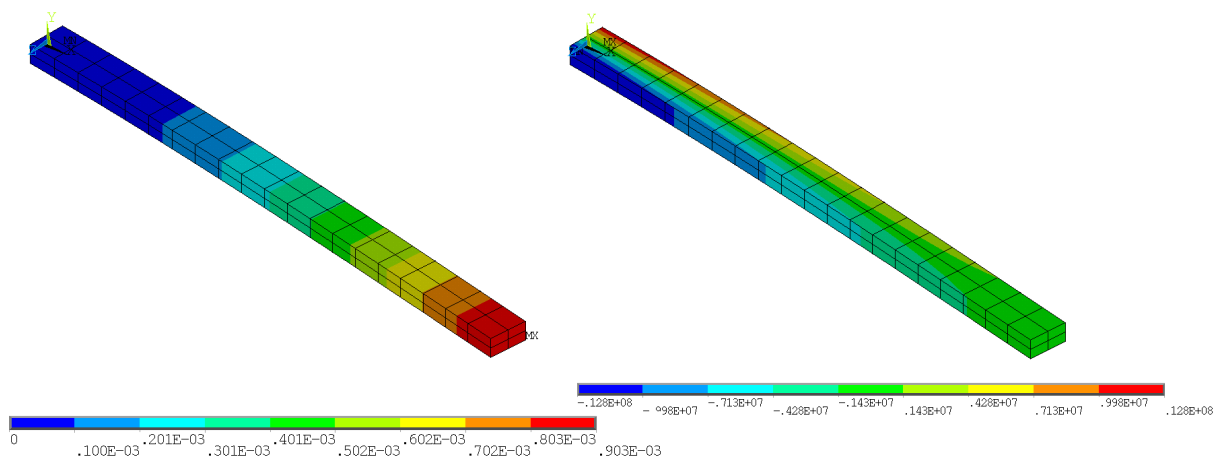
Amplitúdovo-frekvenčná charakteristika koncového bodu votknutého nosníka je zobrazená na obr. 8.4. Ako je z obr. 8.4 vľavo vidno, keď budiaca frekvencia sa zhoďuje s vlastnou frekvenciou systému (je to 2. vlastná frekvencia zobrazená v tab.

7.1, 1. vlastná frekvencia odpovedá kmitaniu v kolmej rovine na rovinu definovanú osou nosníka a smerom záťažovej sily – obr. 8.3), amplitúda kmitania dosahuje maximálne hodnoty. Ako bolo naznačené v teoretickej časti tejto kapitoly, amplitúda kmitania pri netlmenom systéme by mala dosahovať pri budení vlastnou frekvenciou nekonečné hodnoty. Keďže v MKP sa amplitúda počíta iba v niekoľkých konkrétnych frekvenciách, amplitúdy dosahujú v týchto konkrétnych frekvenciách konečné hodnoty. Ak by sme stále zmenšovali frekvenčný rozsah výpočtu v okolí sledovanej vlastnej frekvencie, potom aj amplitúda kmitania by stále narastala.

Obr. 8.4 vpravo zobrazuje závislosť amplitúdy kmitania koncového bodu nosníka od frekvencie pre rozsah od 0 do 25 Hz. Amplitúda kmitania pri nulovej frekvencii predstavuje statickú výchylku systému od budiacej sily. Ako je vidno z tohto obrázku, táto statická výchylka dosahuje hodnotu 0,64 mm, čo odpovedá hodnote maximálnej deformácie systému – príklad 4.5.1, obr. 4.6.

2. Zobrazenie amplitúdy posunutia a napätí pre danú frekvenciu: nastavenie výsledkov pre frekvenciu 20 Hz: General Postproc → Read Results → By Time/Freq → (v zobrazenej tabuľke zadať TIME=20), zobrazenie posunutí v smere osi Z: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (v ponuke zvolíť DOF Solution → Z Component), alebo pomocou príkazu:

```
/POST1
SET, , ,1,0,20
PLNSOL,U,Z
```



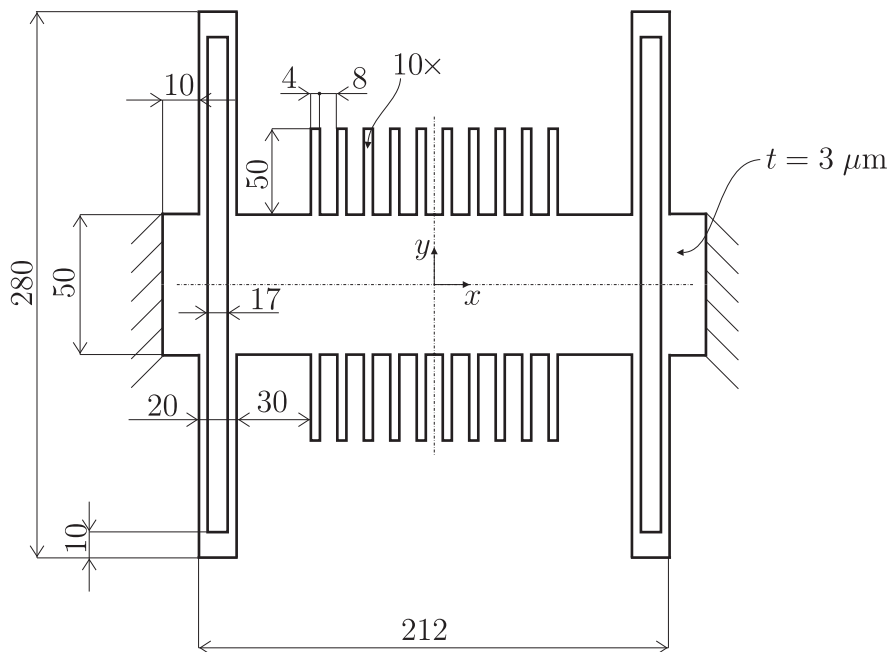
Obr. 8.5. Príklad 1 – amplitúda posunutí v smere osi Z v [m] (vľavo) a napätia v [Pa] (vpravo) pre frekvenciu 20 Hz

Amplitúda výchyliek v smere osi Z aj amplitúda napätí pre frekvenciu budenia 20 Hz je zobrazená na obr. 8.5. Frekvencia odozvy systému je rovnaká, ako je frekvencia budenia.

8.3.2 Príklad 2 – harmonická analýza mikroakcelerometra

Zadanie

Na obr. 8.6 je zobrazená jedna časť kapacitného mikroakcelerometra. Materiál MEMS systému je transversálne izotropný Poly-Si, s nasledovnými parametrami: $C_{11} = 165,7$ GPa, $C_{12} = 63,9$ GPa, $C_{13} = 52$ GPa, $C_{33} = 155$ GPa, $C_{44} = 79,6$ GPa a $\rho = 2329$ kg/m³. Cieľom je stanoviť amplitúdovo-frekvenčnú charakteristiku pre koncovú horizontálnu výchylku hrebeňa mikroakcelerometra pre zrýchlenie 100g v smere osi X pre rozsah frekvencií od 0 do 25 kHz (prvá vlastná frekvencia rovinnej úlohy je 26,9 kHz – overenie tejto hodnoty nechávame na čitateľa).



Obr. 8.6. Príklad 2 – kapacitný mikroakcelerometer – rozmery sú v [μm]

Riešenie

Keďže hrúbka systému je konštantná a budenie je v rovine X-Y, túto úlohu možno modelovať ako problém rovinnej napätosti. Pri modelovaní bude použitý systém jednotiek μMKSV .

Preprocessor

1. Definovanie typu prvku: cez GUI zadefinujeme: Preprocessor \rightarrow Element Type \rightarrow Add/Edit/Delete \rightarrow (PLANE182 s príslušným nastavením KEYOPT(3) \rightarrow Plane stress with thickness), alebo pomocou príkazu:
`/PREP7`
`ET,1,182, , ,3`
2. Definovanie hrúbky systému: cez GUI ju môžeme definovať takto: Preprocessor \rightarrow Real Constants \rightarrow Add/Edit/Delete \rightarrow PLANE182 \rightarrow (zadáť hrúbku 3), alebo pomo-

cou príkazů:

R,1,3

- Definovanie materiálových vlastností: správanie sa Poly-Si je v tomto prípade modelované ako ortotropné, pričom sa uvažuje špeciálny prípad ortotropného správania sa materiálu, ktoré sa nazýva transverzálne izotropné – pozri rovnicu (5.19). Pri definovaní matice \mathbf{C} (resp. matice \mathbf{S}) v programe ANSYS je jedna zvláštnosť – v mechanike kontinua ako aj v dátach od výrobcov materiálov sa uvažuje s poradím (x, y, z, yz, zx, xy) , čomu odpovedá aj rozloženie členov matice \mathbf{C} , zatiaľ čo v programe ANSYS sa uvažuje s poradím (x, y, z, xy, yz, zx) . Takže ak by sme chceli do programu ANSYS vložiť transverzálne symetrický materiál pre 3D úlohu, potom by rovnica (5.19) musela byť definovaná takto

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & S & & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ & & Y & & C_{44} & 0 \\ & & & M & & C_{44} \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

Pre 2D úlohu s transverzálne izotropným materiálom (ako špeciálny prípad anizotropného materiálu), tak ako je naznačené v rovnici (5.26), je potrebné definovať maticu \mathbf{C} (4×4)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ S & C_{11} & C_{13} & 0 \\ & Y & C_{33} & 0 \\ & & M & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

Elastické vlastnosti cez GUI: Preprocessor → Material Props → Material Models → Structural → Linear → Elastic → Anisotropic → (nechať nastavenú formu vstupu Stiffness form, následne vyplniť: D11=165.7E3, D12=63.9E3, D13=52E3, D22=165.7E3, D23=52E3, D33=155E3, D44=50.9E3), hustota materiálu: ... → Structural → Density (DENS= 2329E-18), alebo pomocou príkazov:

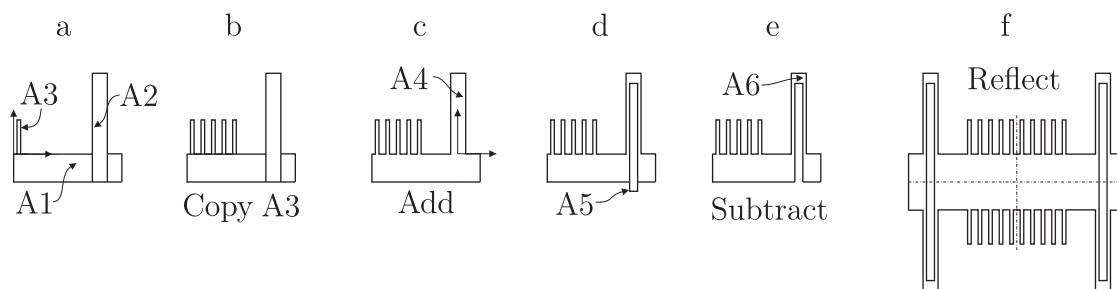
```

!**Deklaracna oblast**
C11=165.7E3
C12=63.9E3
C13=52E3
C33=155E3
!**Definovanie anizotropneho materialu**
TB,ANEL,1
TBDATA,1,C11,C12,C13
TBDATA,7,C11,C13
TBDATA,12,C33
TBDATA,16,(C11-C12)/2
MP,DENS,1,2329E-18

```

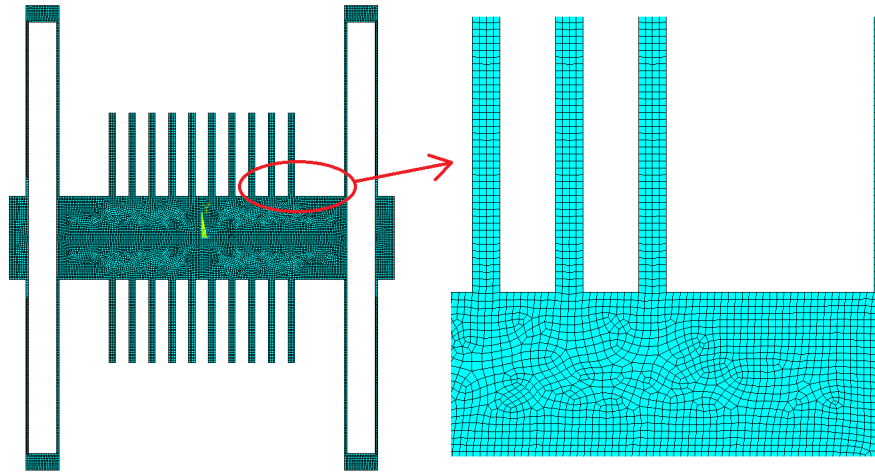
- Geometria: tvorbu geometrie možno rozdeliť do šiestich bodov: vytvorenie troch obdĺžnikových plôch a presunutie WP, nakopírovanie plochy hrebeňa, sčítanie všet-

kých plôch do jednej a presun WP, vytvorenie plochy otvoru pružiny, odčítanie dvoch plôch a zrkadlenie. Cez GUI resp. príkazmi tieto body realizujeme takto:



Obr. 8.7. Príklad 2 – postup tvorby geometrie

- vytvorenie troch obdĺžnikových plôch a presunutie WP (8.7a): Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Rectangle → By Dimensions → (X1=116, Y1=25), rovnakým spôsobom vytvoriť obdĺžnik s parametrami (X1=86, X2=106, Y1=140), presunutie WP do ľavého horného bodu – keypoint č. 4: Utility Menu → WorkPlane → Offset WP to → Keypoints + → (vybrať ľavý horný keypoint – keypoint č. 4, potvrdiť OK) a vytvorenie obdĺžnika s parametrami (X1=4, X2=8, Y1=50), resp. pomocou príkazov:
`RECTNG,116, ,25`
`RECTNG,86,106,140`
`KWPAVE,4`
`RECTNG,4,8,50`
- nakopírovanie plochy hrebeňa (8.7b): Preprocessor → Modeling → Copy → Areas → (vybrať plochu A3, potvrdiť OK, v zobrazenej tabuľke zadať počet kópií ITIMES=5 a offset v smere osi X DX=12), alebo pomocou príkazu:
`AGEN,5,3, , ,12`
- sčítanie všetkých plôch do jednej a presun WP (8.7c): Preprocessor → Modeling → Operate → Booleans → Add → Areas → (výber Pick All), a následne Utility Menu → WorkPlane → Offset WP to → Keypoints + → (vybrať keypointy 29 a 30, potvrdiť OK), resp. pomocou príkazov:
`AADD,ALL`
`KWPAVE,29,30`
- vytvorenie plochy otvoru pružiny (8.7d): Preprocessor → Modeling → Create → Areas → Rectangle → By Dimensions → (X1=-8.5, X2=8.5, Y1=-26, Y2=105), resp.:
`RECTNG,-8.5,8.5,-26,105`
- odčítanie dvoch plôch (8.7e): Preprocessor → Modeling → Operate → Booleans → Subtract → Areas → (výber obdĺžnika A4 → Apply, výber obdĺžnika A5 → OK), resp. pomocou príkazov:
`ASBA,4,5`
- zrkadlenie (8.7f): Preprocessor → Modeling → Reflect → Areas → (vybrať Pick All a v zobrazenej tabuľke vybrať Y-Z Plane X a potvrdiť OK), zrkadlenie zopakovať, len zvoliť inú rovinu zrkadlenia X-Z Plane Y, vykonať zjednotenie



Obr. 8.8. Príklad 2 – sieť konečných prvkov

entít: Preprocessor → Numbering Ctrl → Merge Items → (v zobrazenej tabuľke vybrať Label=All a potvrdiť OK), resp. pomocou príkazov:

ARSYM,X,ALL
ARSYM,Y,ALL
NUMMRG,ALL

5. Sietovanie: Preprocessor → Meshing → Mesh Tool → (sietovacie menu: v položke Size Controls aktivovať globálne nastavenie veľkosti prvkov pomocou tlačidla Global: Set, v novom okne zadať veľkosť prvkov SIZE=1 a potvrdiť OK, plochu vysietovať aktivovaním tlačidla Mesh a potvrdením Pick All), alebo pomocou príkazov:

ESIZE,1
AMESH,ALL

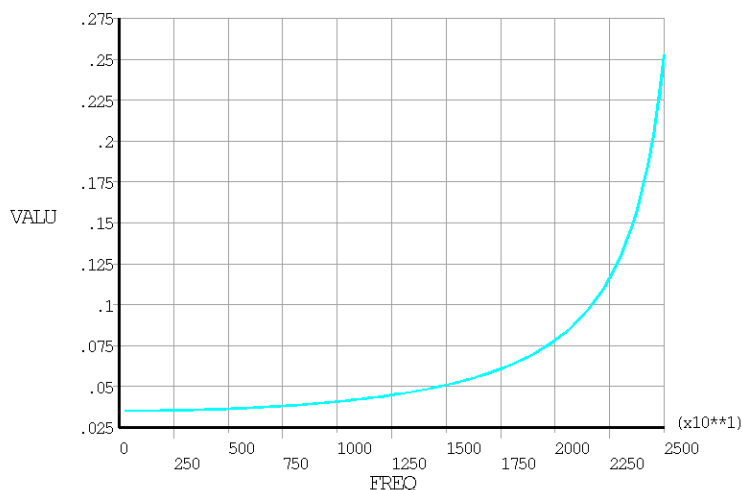
Sieť je zobrazená na obr. 8.8.

Solution

1. Definovanie typu analýzy a options: typ analýzy: Solution → Analysis Type → New Analysis → Harmonic, options: Solution → Analysis Type → Analysis Options → (parameter Solution method nechať nastavený na Full, potvrdiť OK), alebo jednoducho pomocou príkazov:

/SOLU
ANTYPE,3
HROPT,FULL

2. Definovanie záťaže: predpísanie väzieb na čiary uchytenia (čiary č. 2, 63, 97, 131): Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Lines → (výberové menu: vybrať čiary 2, 63, 97, 131 podľa zadania, potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať All DOF a potvrdiť OK), predpísanie zrýchlenia 100g v smere osi X: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Inertia → Gravity → Global → (v zobrazenej tabuľke zdefinovať zrýchlenie ACELX=100*9.81E6 a potvrdiť OK), nastavenie frekvenčného rozsahu výpočtu: Solution → Load Step Opts → Freq and Substeps → (v zobrazenej tabuľke zdefinovať frekvenčný rozsah



Obr. 8.9. Príklad 2 – amplitúdovo-frekvenčná charakteristika, os FREQ – frekvencia v [Hz], os VALU – amplitúda posunutia koncového bodu hrebeňa v smere osi X v [μm]

HARFRQ=0,25000, počet substepov NSUBST=100, nastaviť stepové zaťaženie, t. j. amplitúda zrýchlenia sa s frekvenciou nemení KBC=1 a potvrdiť OK), alebo pomocou príkazov:

```
DL,2, ,ALL
DL,63, ,ALL
DL,97, ,ALL
DL,131, ,ALL
ACEL,100*9.81E6
HARFRQ,0,25E3
NSUBST,100
KBC,1
```

- Spustenie riešenia: cez GUI:Solution → Solve → Current LS → OK, alebo pomocou príkazu:
SOLVE

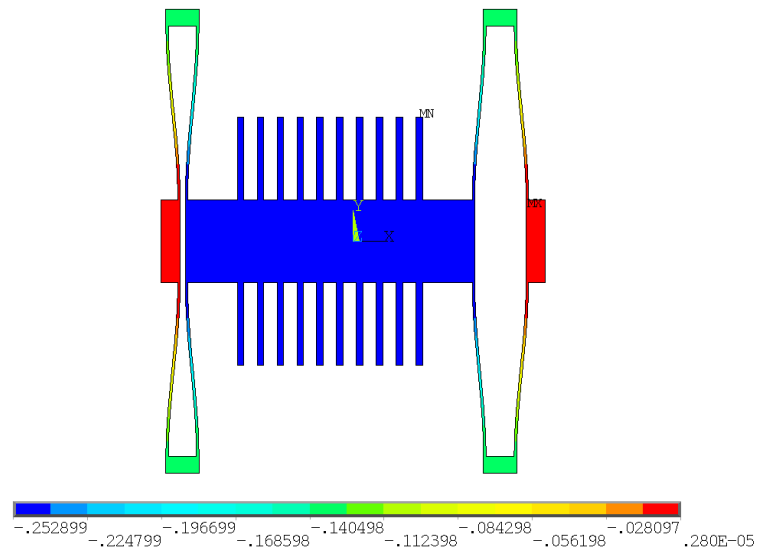
Postprocessor

- Zobrazenie amplitúdovo-frekvenčnej charakteristiky: TimeHist Postpro → Variable Viewer → (cez položku Add Data pridať posunutie v smere osi Z koncového bodu hrebeňa, cez položku Graph Data vykresliť amplitúdovo-frekvenčnú charakteristiku), alebo pomocou príkazov:

```
/POST26
NSOL,2,5237,U,X,UX_2
XVAR,1
PLVAR,2
```

Amplitúdovo-frekvenčná charakteristika koncového bodu prostredného hrebeňa je zobrazená na obr. 8.9.

- Zobrazenie posunutí pre poslednú frekvenciu (25 kHz): nastavenie výsledkov na poslednú sadu: General Postproc → Read Results → Last Set, zobrazenie posunutí v



Obr. 8.10. Príklad 2 – posunutie v smere osi X pre budiacu frekvenciu 25 kHz, posunutia v [μm]

smere osi X: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (v ponuke zvoliť DOF Solution → X Component), alebo pomocou príkazu:

```
/POST1
PLNSOL,U,X
```

Amplitúda výchyliek v smere osi X pre frekvenciu budenia 25 kHz je zobrazená na obr. 8.10.

Kapitola 9

Prechodová analýza

9.1 Cieľ kapitoly

Cieľom tejto kapitoly je prezentovať čitateľovi metódu priamej integrácie pri riešení prechodových úloh, pričom sú prezentované základné algoritmy používané pri implicitnej aj explicitnej formulácii. V praktickej časti sú riešené dva príklady, pričom druhý z nich je riešený pomocou skriptovania v APDL.

9.2 Matematický opis prechodovej analýzy

Ako už bolo v predchádzajúcich kapitolách uvedené, pohybová rovnica 1 DOF systému má tvar

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t) \quad (9.1)$$

a príslušné počiatkové podmienky

$$x(0) = x_0 \quad (9.2)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (9.3)$$

V prípade, že záťaž $F(t)$ má všeobecný charakter, alebo aj v prípade, že má priebeh harmonický ale nás zaujíma časová oblasť, kedy sa v riešení prejavuje aj vplyv počiatkových podmienok, hovoríme o prechodovom (alebo tiež transientnom) deji, resp. analýze.

V prípade multi-DOF systému, ako je napr. MKP, rovnica (9.1) nadobúda maticový tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (9.4)$$

kde, ako už bolo v predchádzajúcich kapitolách uvedené, \mathbf{M} je matica hmotnosti, \mathbf{B} je matica tlmenia, \mathbf{K} je matica tuhosti, $\mathbf{F}(t)$ je vektor uzlového zaťaženia, $\mathbf{x}(t)$ je vektor uzlových posunutí, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ je vektor uzlových rýchlostí a $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ je vektor uzlových zrýchlení MKP modelu. Je nevyhnutné poznať počiatkový stav celého systému, t. j. rovnice (9.2) a (9.3) nadobudnú tvar

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (9.5)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(0) = \dot{\mathbf{x}}_0 \quad (9.6)$$

Matica viskózneho tlmenia (tzv. proporcionálne tlmenie) býva veľmi často zložená proporcionálne z matice hmotnosti a tlmenia

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (9.7)$$

Takéto tlmenie sa potom nazýva Rayleigho tlmenie a je jednoznačne určené pomocou parametrov α a β – určovaných napr. experimentálne.

Rovnica (9.4) sa najčastejšie rieši dvoma rôznymi metódami:

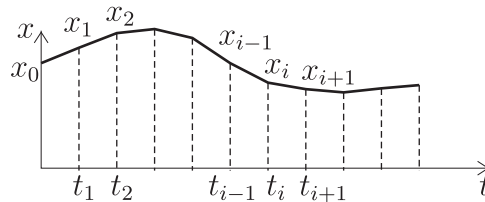
- metódou superpozície vlastných tvarov
- priamou integráciou

Metóda superpozície vlastných tvarov je veľmi efektívna a rýchla metóda, ktorá vyžaduje pred svojim využitím získať informáciu o vlastných frekvenciách a vlastných tvaroch systému (teda vykonanie modálnej analýzy), avšak je ju možné použiť iba pri lineárnych systémoch. Naproti tomu, priama metóda je časovo náročnejšia ale univerzálnejšia. V ďalšom texte bude naznačený spôsob výpočtu práve priamej integrácie.

9.3 Metódy používané na časovú diskretizáciu

Z matematického hľadiska priama integrácia využíva niektorú z metód konečných diferencií (MKD), ktoré časové derivácie neznámych veličín nahrádzajú diferenciami neznámych veličín, a tým transformujú diferenciálnu rovnicu (resp. systém diferenciálnych rovníc) na algebraickú rovnicu (resp. systém algebraických rovníc).

Základná veličina, s ktorou sa v MKD pracuje, je tzv. časový krok $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, ktorý medzi jednotlivými krokmi môže byť rovnaký alebo rozdielny. V teoretickej časti tejto kapitoly budeme pracovať s konštantným časovým krokom – obr. 9.1. Rovnica (9.1)



Obr. 9.1. Časový integračný krok

musí platiť pre každý jeden časový údaj a preto musí platiť aj pre jednotlivé časové kroky $t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i, t_{i+1}, \dots$, pričom predpokladajme, že už máme k dispozícii vypočítané hodnoty x_1, x_2 , až x_i vrátane, a chceme nájsť predpis, ako vypočítame hodnotu x_{i+1} . Za týmto účelom rovnicu (9.1) zapíšeme pre čas t_i , čo matematicky môžeme vyjadriť rovnicou

$$m\ddot{x}(t_i) + b\dot{x}(t_i) + kx(t_i) = F(t_i) \quad (9.8)$$

alebo v skrátrenom zápise

$$m\ddot{x}_i + b\dot{x}_i + kx_i = F_i \quad (9.9)$$

Na nahradenie jednotlivých časových derivácií \ddot{x}_i a \dot{x}_i sa využíva Taylorov rad. Potom pre prvú deriváciu $\dot{x}(t_i)$ môžeme písať

$$\dot{x}(t_i) = \dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} \quad (9.10)$$

a pre druhú deriváciu $x(t_i)$ môžeme písať

$$\ddot{x}(t_i) = \ddot{x}_i = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (9.11)$$

Dosadením rovníc (9.10) a (9.11) do rovnice (9.9) dostávame algebraickú rovnicu, ktorá obsahuje iba hodnoty $x(t)$ v časových kôrkoch t_{i-1} , t_i a t_{i+1} a tento vzťah má tvar

$$m \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} + b \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} + kx_i = F_i \quad (9.12)$$

čo môže byť prepísané na vzťah

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{b}{2\Delta t} \right) x_{i+1} = F_i - \left(k - \frac{2m}{\Delta t^2} \right) x_i - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{b}{2\Delta t} \right) x_{i-1} \quad (9.13)$$

Rovnica (9.13) predstavuje predpis na výpočet hodnoty x_{i+1} pomocou dvoch predchádzajúcich hodnôt x_i a x_{i-1} , preto túto metódu zaraďujeme medzi tzv. viacbodové metódy a zároveň ide o tzv. explicitnú formuláciu, lebo po dosadení známych hodnôt x_i a x_{i-1} dostávame explicitne výraz na výpočet x_{i+1} a nie je potrebný žiaden ďalší riešič na vyjadrenie hodnoty x_{i+1} . Takto formulovaná MKD sa nazýva centrálna diferenčná metóda.

Ak túto metódu budeme rovnakým spôsobom aplikovať na MKP rovnicu (9.4), prepísanú na rovnováhu v časovom kroku t_i , t. j.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{K}\mathbf{x}_i = \mathbf{F}_i \quad (9.14)$$

potom rovnica (9.13) nadobudne tvar

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{B} \right) \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}_i - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{x}_i - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{B} \right) \mathbf{x}_{i-1} \quad (9.15)$$

Riešením tohto systému dostaneme vektor neznámych posunutí v časovom kroku t_{i+1} .

Explicitná formulácia je z hľadiska rýchlosti výpočtu veľmi efektívna, t. j. jej výpočet je veľmi rýchly. Avšak nevýhoda explicitnej formulácie je iba podmienená stabilita metódy, t. j. ak integračný krok Δt prekročí určitú limitnú hodnotu, výpočet nebude konvergentný ale divergentný. Preto pri explicitných metódach sa musí voliť relatívne malý krok výpočtu, čo predurčuje využitie tejto formulácie najmä na riešenie dejov, ktoré sú veľmi rýchle, ako napr. výbuchy, nárazy apod. V programe ANSYS je explicitná formulácia implementovaná v balíku LS Dyna a v programe Autodyn.

V MKP programoch sa na riešenie priamej integrácie používa najčastejšie implicitná formulácia, kde dominantné postavenie má tzv. Newmarkova metóda. Pri tejto metóde vystupujú dva parametre β a γ , ktorých voľbou sa čiastočne modifikuje samotná výpočtová schéma. Nahradenie prvej a druhej derivácie sa realizuje pomocou nasledovných výrazov

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \dot{\mathbf{x}}_i \Delta t + \frac{1}{2} [(1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{x}}_i + 2\beta \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}] \Delta t^2 \quad (9.16)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = \dot{\mathbf{x}}_i + [(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{x}}_i + \gamma \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}] \Delta t \quad (9.17)$$

Výsledný vzťah vznikne z MKP rovnice (9.14) a výrazov (9.16) a (9.17), pričom z rovníc (9.16) a (9.17) sa vyjadria výrazy $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$ a $\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$ a dosadia sa do rovnice (9.14), čím

je výsledný výraz odvodený a má tvar

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{B} + \mathbf{K} \right) \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{F}_{i+1} + \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{B} \right) \mathbf{x}_i + \\ &+ \left(\frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \mathbf{B} \right) \dot{\mathbf{x}}_i + \left(\left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M} + \left(\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \right) \Delta t \mathbf{B} \right) \ddot{\mathbf{x}}_i \end{aligned} \quad (9.18)$$

Po výpočte vektora \mathbf{x}_{i+1} z rovnice (9.18) sa spätne z rovníc (9.16) a (9.17) vypočítajú vektory $\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$ a $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$ a celý proces sa opakuje.

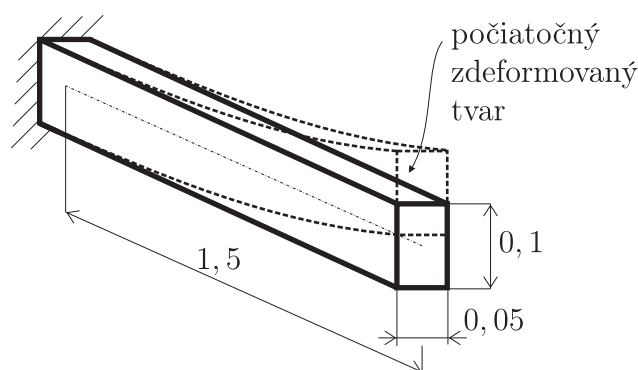
Ako je vidno z rovnice (9.18), Newmarkova metóda je jednokroková, implicitná metóda, ktorá je bezpodmienečne stabilná pre hodnoty $\gamma \geq 1/2$ a $\beta \geq (\gamma + 1/2)^2/4$.

9.4 Riešené príklady

9.4.1 Príklad 1 – prechodová analýza votknutého nosníka s počiatočnou deformáciou

Zadanie

Na obr. 9.2 je zobrazený votknutý nosník, ktorý je na začiatku sledovaného deja v zdeformovanom tvare. Zdeformovaný tvar nosníka je určený statickou výchylkou koncového bodu, a hodnota tejto výchylky je 0,5 mm. Materiál nosníka je oceľ a má parametre: $E = 2,1 \times 10^{11}$ Pa, $\mu = 0,3$, $\rho = 7850$ kg/m³. Cieľom analýzy je určiť odozvu systému, keď v jednom časovom okamžiku je deformácia nosníka uvoľnená, t. j. na voľný koniec nosníka nie je viac kladená žiadna obmedzujúca podmienka.



Obr. 9.2. Príklad 1 – geometria a počiatočný zdeformovaný tvar

Riešenie

Preprocessor

Keďže samotná geometria zadaného príkladu aj materiálové vlastnosti sa zhodujú s príkladom 4.5.1, tvorba modelu sa môže prebrať z kapitoly 4.5.1 a 7.4.1, kde je doplnená materiálová vlastnosť o hustotu materiálu.

Solution

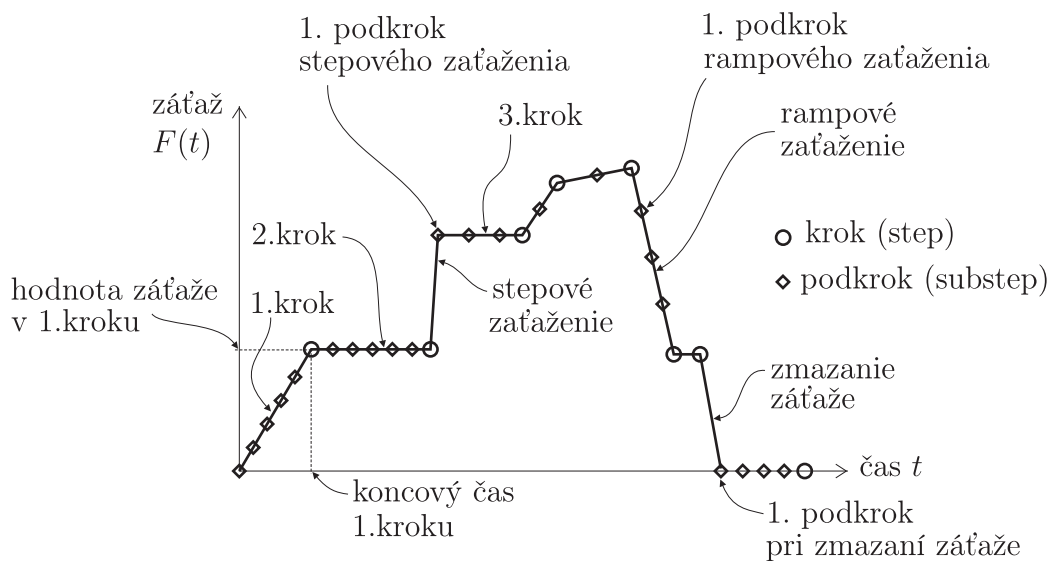
1. Definovanie typu analýzy: je potrebné nastaviť prechodový (transientný) typ analýzy, t. j.: `Solution` → `Analysis Type` → `New Analysis` → `Transient` → (v následne automaticky zobrazenej tabuľke ponechať ako metódu výpočtu `Full` – táto voľba predstavuje priamu integráciu, potvrdiť `OK`), alebo pomocou príkazov:

```

/SOLU
ANTYPE,4
TRNOPT,FULL

```

2. Definovanie záťaže: pri záťaži pri prechodovej analýze je potrebné definovať koncový čas jednotlivých krokov (stepov), počet podkrokov (substepov), hodnotu zaťaženia v danom kroku a spôsob, ako sa táto hodnota nadobudne. Tieto parametre sú zobrazené na obr. 9.3. Všetky tieto nastavenia sú prístupné cez GUI cez položku `Solution`



Obr. 9.3. Definovanie jednotlivých parametrov záťaže pri prechodovej analýze

→ `Analysis Type` → `Sol'n Controls`. Ich význam je nasledujúci:

- **krok (step)** – predstavuje určitú časť časového priebehu záťaže, pričom daný krok je definovaný hodnotou záťaže v tomto kroku a koncovým časom tohto kroku. Hodnota záťaže v danom kroku sa definuje v ANSYS-e rovnakým spôsobom ako pri statickej analýze, napr. silová záťaž v uzle pomocou príkazu `F`, koncový čas daného kroku sa definuje pomocou príkazu `TIME`. Prechodová analýza väčšinou obsahuje viacero krokov.
- **podkrok (substep)** – na dosiahnutie požadovanej presnosti výpočtu pri priamej integrácii je potrebné, aby medzi jednotlivými krokmi boli ďalšie body, v ktorých sa uskutočňuje výpočet (nie všetky vypočítané hodnoty sa musia zapísať do výsledkového súboru). Tieto substepy predstavujú jednotlivé vektory \mathbf{x}_i v rovnici (9.18). V ANSYS-e je možnosť definovať explicitne jednotlivé substepy alebo stanoviť rozsah substepov s tým, že presný počet substepov určí program sám. Táto voľba sa nastavuje príkazom `AUTOTS` – Automatic Time Stepping. Pri definovaní substepov sa buď pre daný krok definuje počet substepov pomocou príkazu `NSUBST` alebo časový inkrement medzi jednotlivými substepmi pomocou príkazu `DELTIM`.

- stepový a rampový priebeh zaťaženia – zaťaženie môže mať charakter stepového alebo rampového zaťaženia. Stepové zaťaženie v danom kroku nadobudne svoju maximálnu hodnotu hneď v prvom substepe a tá v nasledujúcich substepoch daného kroku sa nemení. Tento typ zaťaženia má význam pri rýchlych zmenách zaťaženia, kedy záťaž začne pôsobiť celou svojou hodnotou hneď od začiatku. Druhý spôsob zaťaženia je rampové zaťaženie, kedy záťaž postupne zvyšuje svoju hodnotu a predpísanú hodnotu dosiahne až v poslednom substepe. Príkaz na nastavenie, či záťaž je stepová alebo rampová je *KBC*.
- zmazanie záťaže – v prípade, že záťaž v danom čase prestane na daný systém pôsobiť, modeluje sa zmazaním záťaže (nie nastavením záťaže na 0) klasickým spôsobom, napr. príkazom *FDELETE*. Pri zmazaní záťaže sa toto zmazanie uplatní hneď v prvom substepe daného záťažového kroku.
- zapnutá a vypnutá časová integrácia – v niektorých prípadoch je potrebné buď na začiatku analýzy (počiatočný stav systému) alebo na konci analýzy (koncový stav systému) zistiť ustálený stav, t. j. vykonať statickú analýzu. Keďže v rámci výpočtu nie je možné meniť typ analýzy (t. j. celá analýza musí byť buď statická alebo prechodová), musí sa táto požiadavka riešiť v rámci prechodovej analýzy tým, že sa časová integrácia vypína (neuvažujú sa zotrvačné ani tlmiace účinky, t. j. rieši sa stacionárna úloha) a zapína (uvažujú sa zotrvačné a tlmiace účinky, t. j. rieši sa prechodová úloha) a to pomocou príkazu *TIMINT*.
- spôsob a rozsah zapísania výsledkov do súboru – napriek tomu, že sa výpočet realizuje v každom substepe z dôvodu presnosti výpočtu, nie vždy je nevyhnutné všetky výpočty uchovávať vo výsledkovom súbore. Ak je model príliš veľký, môže dokonca čas na zapísanie výsledkov daného substepu byť väčší ako čas na vyriešenie MKP rovníc v danom časovom kroku – aj v takom prípade má zmysel obmedziť výstupné parametre, ktoré sa majú zapísať do výsledkového súboru ako aj frekvenciu zapisovania (napr. zapisovanie iba základných výsledkových veličín, t. j. posunutí a reakcií len v každom treťom substepe). Toto sa nastavuje pomocou príkazu *OUTRES*.

Tento príklad bude obsahovať 3 kroky, pričom prvé dva slúžia na nastavenie počiatočných podmienok:

1. krok – bude slúžiť na nastavenie počiatočnej výchylky systému:
 - čas kroku – čas na konci 1. kroku bude nastavený na veľmi malú hodnotu (1×10^{-6} s): Solution → Analysis Type → Sol'n Controls → (v zobrazenej tabuľke Solution Controls prepnúť do záložky Basic, kde v položke Time Control zadať hodnotu Time at end of load step=1E-6)
 - automatický časový krok – Automatic Time Steping bude vypnutý: v tabuľke Solution Controls v záložke Basic v položke Time Control prepnúť Automatic time stepping=Off
 - počet substepov – v prvom kroku bude iba jeden substep (pri lineárnej statickej analýze stačí úlohu riešiť v rámci jedného substepu): v tabuľke Solution Controls v záložke Basic v položke Time Control nastaviť Number of substeps=1

- rozsah a frekvencia zapisovania – nastavíme ich tak, aby boli zapísané všetky dáta a v každom substepe: v tabuľke Solution Controls v záložke Basic v položke Write Items to Results File nastaviť All solution items a Frequency=Write every substep
- časová integrácia – bude vypnutá: v tabuľke Solution Controls prepnúť do záložky Transient, odškrtnúť políčko Transient effects v položke Full Transient options
- predpísanie votknutia – votkneme ľavý koniec nosníka – keypoint č. 1: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Keypoints → (výberové menu: vybrať ľavý keypoint a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať All DOF)
- predpísanie posunutia – posunutie pravého keypointu (keypoint č. 2) v smere osi Z o hodnotu 0,5 mm: Solution → Define Loads → Apply → Structural → Displacement → On Keypoints → (výberové menu: vybrať pravý keypoint a potvrdiť OK) → (v zobrazenej tabuľke vybrať UZ a zadať VALUE= 0.5E-3)
- zapísanie záťažového kroku do súboru – umožní nám vytvorenie viacerých záťažových krokov, ich uloženie do súborov (každý záťažový krok má vlastný súbor) a následne spustenie výpočtu z vytvorených súborov záťažových krokov: Solution → Load Step Opts → Write LS File → (v zobrazenej tabuľke zadať číslo kroku, t. j. LSNUM=1). Výsledkom tohto kroku je vytvorenie súboru v pracovnom adresári, ktorý bude mať pracovný názov (Jobname) a príponu .s01.

Celý súbor záťažového kroku môže byť vytvorený manuálne napísaním jednotlivých príkazov, pričom na začiatok sa musia vložiť aj príkazy pre nastavenie riešiča:

*!**Subor zatazoveho kroku c. 1***

```

ANTYPE,4
TRNOPT,FULL
TIME,1E-6
AUTOTS,OFF
NSUBST,1
OUTRES,ALL,ALL
TIMINT,OFF
DK,1,ALL
DK,2,UZ,0.5E-3

```

2. krok: ak by sme v druhom kroku odstránili väzbu v keypointe č. 2, potom takto definovaný systém by mal síce dobre definovanú počiatočnú deformáciu, ale zároveň by vykazoval aj určitú počiatočnú rýchlosť (rieši sa systém diferenciálnych rovníc druhého rádu, kde počiatočný stav systému je definovaný počiatočnými posunutiami a počiatočnými rýchlosťami). Počiatočné rýchlosti pre uzly (každý uzol má svoju počiatočnú výchylku a rýchlosť) sa definujú ako podiel rozdielu posunutí pre daný uzol z dvoch posledných krokov a daného časového kroku, a keďže nulový krok bol nulový stav, tak na základe výchylky a časového kroku v 1. kroku sa pre každý uzol systému vypočíta príslušná

počiatočná rýchlosť. Napr. koncový bod bude mať počiatočnú rýchlosť $(0,5 \text{ mm})/(1 \times 10^{-6} \text{ s}) = 0,5 \times 10^6 \text{ mm/s}$. Aby táto rýchlosť bola nulová, je potrebné, aby druhý krok bol identický s prvým až na zmenu koncového času, kde sa nastaví čas na hodnotu $2 \times 10^{-6} \text{ s}$. Teda rýchlosť napr. koncového bodu bude $(0,5 \text{ mm} - 0,5 \text{ mm})/(1 \times 10^{-6} \text{ s}) = 0 \text{ mm/s}$. Teda stačí zmeniť parameter **Time at end of load step** = 2E-6 v tabuľke **Solution Controls** v záložke **Basic** a vytvoriť súbor záťažového kroku č. 2. Výsledkom tohto kroku je, že systém má predpísanú počiatočnú deformáciu a nulovú počiatočnú rýchlosť.

3. krok: v treťom kroku sa musí odstrániť väzba v pravom keypointe a zahrnúť aj zotrvačné sily do výpočtu, t. j. zapnúť časovú integráciu:

- čas kroku – čas na konci 3. kroku je $5,4 \times 10^{-2} \text{ s}$ (čas vychádza z príslušnej vlastnej frekvencie, ktorá je 37 Hz, pričom cieľom je zachytiť dva kmity, t. j. $2/37 = 5,4 \times 10^{-2} \text{ s}$)
- počet substepov – v 3. kroku bude 40 substepov (na zachytenie jednej sínusovky sa odporúča 20 substepov)
- rozsah a frekvencia zapisovania – na vykreslenie priebehu sú potrebné dáta vo všetkých substepoch
- časová integrácia – musí byť zapnutá, aby boli do výpočtu zahrnuté aj zotrvačné popřípade aj viskózne sily
- odstránenie väzby v pravom keypointe – tým sa systém uvoľní a začne kmitať
- zapísanie záťažového kroku do súboru – vytvorenie súboru záťažového kroku č. 3

3. Spustenie riešenia: cez GUI: **Solution** → **Solve** → **From LS Files** → (v zobrazenej tabuľke zadať **LSMIN=1**, **LSMAX=3**, **LSINC=1** a potvrdiť **OK**), alebo jednoducho pomocou príkazu:

LSSOLVE,1,3,1

Postprocessor

1. Zobrazenie časového priebehu vybranej veličiny: časový priebeh veličiny sa zobrazuje v **Time History Postprocesore**, podobne ako pri harmonickej analýze. Zobrazenie posunutia koncového bodu ako aj uzla uprostred nosníka cez GUI: **TimeHist Postpro** → **Variable Viewer** → (cez položku **Add Data** pridať posunutie v smere osi Z koncového ako aj prostredného bodu nosníka, cez položku **Graph Data** vykresliť časový priebeh týchto posunutí), alebo pomocou príkazov:

/POST26

NSOL,2,2,U,Z,UZ_2

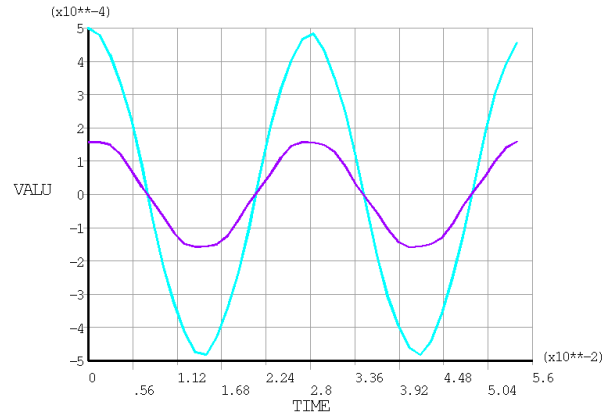
NSOL,3,12,U,Z,UZ_2

XVAR,1

PLVAR,2,3

Časový priebeh výchyliek koncového a stredového uzla v smere osi Z je zobrazený na obr. 9.4.

2. Zobrazenie posunutí a napätí: nastavenie výsledkov v čase 0,028 s: **General Postproc** → **Read Results** → **By Time/Freq** → (v zobrazenej tabuľke zdefinovať čas

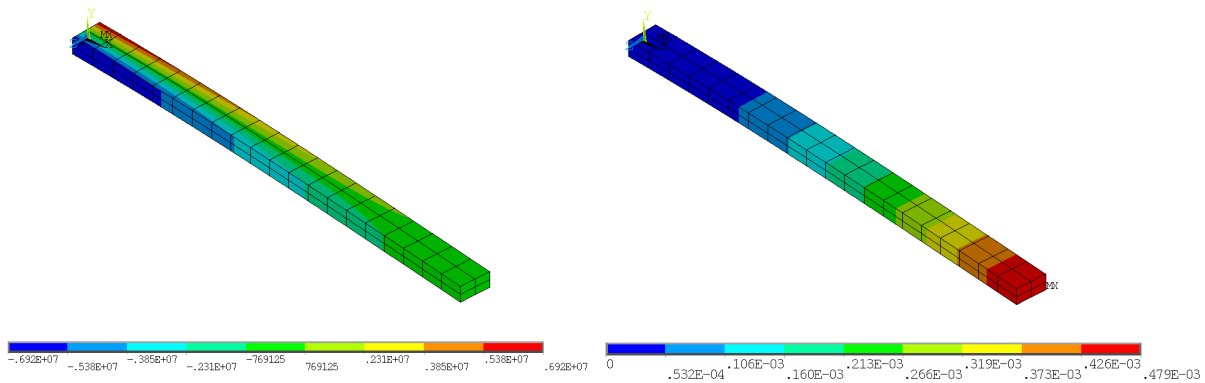


Obr. 9.4. Príklad 1 – časový priebeh (čas v [s]) posunutia koncového a prostredného uzla v [m]

TIME=0.028, potvrdiť OK), zobrazenie posunutí v smere osi Z: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (v ponuke zvolíť DOF Solution → Z Component), zobrazenie normálových napätí: General Postproc → Plot Results → Contour Plot → Nodal Solu → (v ponuke zvolíť Stress → X Component), alebo pomocou príkazu:

```
/POST1
SET, , ,1, ,2.8E-2
PLNSOL,U,Z
PLNSOL,S,X
```

Napätia a posunutia v smere osi Z v čase 0,028 s sú zobrazené na obr. 9.5.



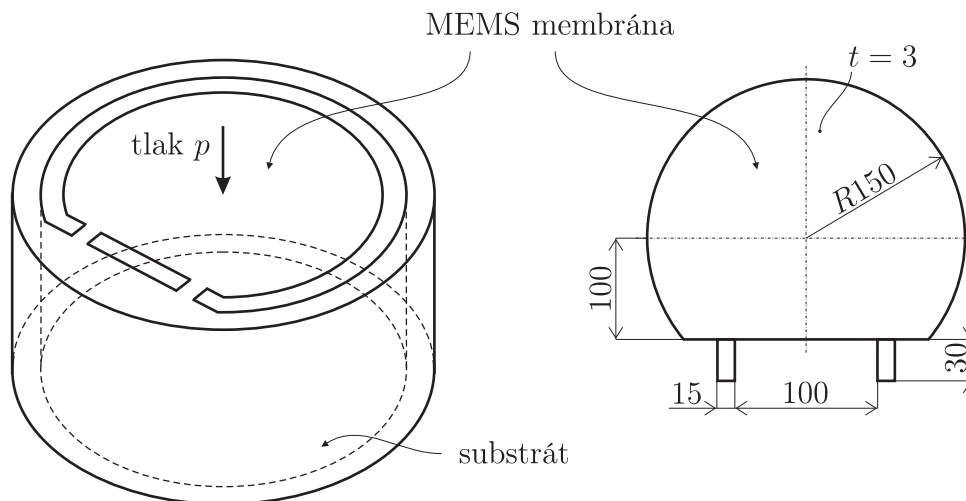
Obr. 9.5. Príklad 1 – napätia v [Pa] (vľavo) a posunutia v smere osi Z v [m] (vpravo) v čase 0,028 s

9.4.2 Príklad 2 – odozva membrány na skokovú zmenu tlaku

Zadanie

Na obr. 9.6 je zobrazená MEMS membrána, ktorej materiál je definovaný týmito parametrami: modul pružnosti v ťahu $E = 160$ GPa, Poissonovo číslo $\mu = 0,2$ a hustota

materiálu $\rho = 2331 \text{ kg/m}^3$. Tlmenie systému je opísané Reyleigho tlmením s parametrami $\alpha = 1 \times 10^{-4}$ a $\beta = 2 \times 10^{-6}$. Systém je zaťažovaný skokovou zmenou tlaku z nulového tlaku na tlak 1 kPa. Cieľom je určiť odozvu systému na takúto skokovú zmenu záťaže, t. j. časový priebeh maximálneho priehybu a určiť hodnotu maximálneho prekmitnutia.



Obr. 9.6. Príklad 2 – MEMS membrána – rozmery sú v $[\mu\text{m}]$

Riešenie

Systém vykazuje jednu rovinu symetrie, takže možno modelovať iba jeho symetrickú časť. Geometria systému umožňuje modelovanie tohto MEMS systému pomocou škrupinových prvkov.

Vytvorenie celého modelu aj samotná simulácia budú prezentované vo forme kompletného skriptu, ktorý by mal byť uložený v pracovnom adresári a nazvaný napr. *vstup.mac*. Spustenie celého skriptu sa dá vykonať cez GUI jednoduchým zadaním názvu súboru bez prípony do príkazového riadku programu ANSYS, t. j. zadaním *vstup*. Vytvorená sieť konečných prvkov je zobrazená na obr. 9.7.

Samotný skript môže vyzeráť takto:

```

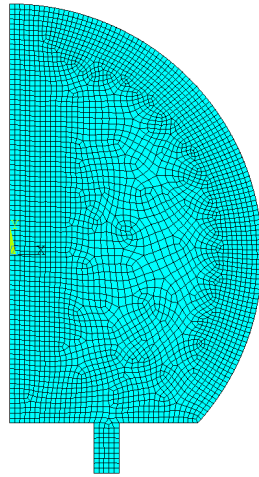
FINISH
/CLEAR,ALL
!**Definovanie parametrov**
!**Je pouzity system mikroMKSV**
!**
R=150                !polomer v mikrometroch
L1=100              !poloha horizontalnej ciary v mikrometroch
L2=30               !rozmer mostika v mikrometroch
L3=50               !poloha mostika v mikrometroch
!**
!**Definovanie materialu**
!**

```

```

YM=160E3           !Youngov modul v MPa
MU=0.2            !Poissonovo cislo
HUS=2331E-18      !hustota v kg/mikro3
!**

```



Obr. 9.7. Príklad 2 – sieť konečných prvkov MEMS membrány

```

!**Preprocessor**
/PREP7
!**
ET,1,181           !typ prvku
MP,EX,1,YM         !material
MP,PRXY,1,MU
MP,DENS,1,HUS
SECTYPE,1,SHELL   !definovanie prierezu
SECDATA,3,1
PCIRC,R, ,-90,90  !vytvaranie geometrie
WPAVE, ,-L1
WPROTA, ,90
ASBW,ALL
ASEL,S,LOC,Y,-L1,-R
ADELE,ALL, , ,1
ALLSEL,ALL
WPROTA, ,-90
WPOFFS,L3
RECTNG,0,L2/2,0,-L2
AADD,ALL
ESIZE,L2/10       !sietovanie
AMESH,ALL
!**
!**Solution**
/SOLU
!**

```

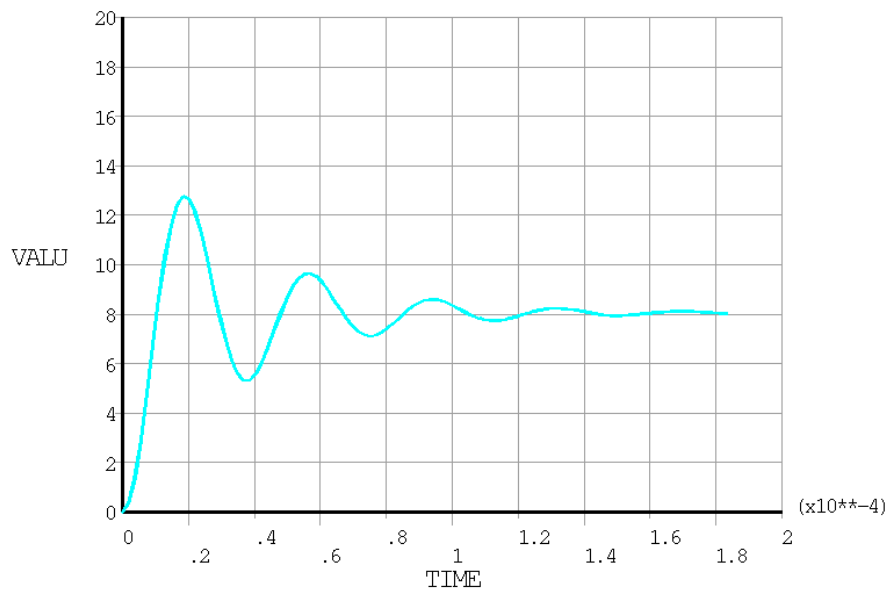


```

ANTYPE,4                !typ analyzy - prechodova
TRNOPT,FULL
TIME,1E-8               !krok c. 1
AUTOTS,OFF
NSUBST,1
OUTRES,ALL,ALL
LSEL,S,LOC,Y,-L1-L2
DL,ALL, ,ALL
LSEL,S,LOC,X,0
DL,ALL, ,SYMM
SFA,ALL, ,PRES,0.001
ALLSEL,ALL
ALPHAD,1E-4
BETAD,2E-6
SOLVE                   !spustenie riesenia kroku c. 1
TIME,5*3.67E-5         !krok c. 2
NSUBST,5*20
SOLVE                   !spustenie riesenia kroku c. 2
!**
!**Postprocessor**
/POST26
!**
NSOL,2,1,U,Z,UZ_2     !vykreslenie casoveho priebehu max. posunutia
PLVAR,2

```

Časový priebeh priehybu bodu, ktorý vykazuje maximálne posunutia, je zobrazený na obr. 9.8. Ako je z tohto obrázku vidno, maximálne hodnoty sa dosahujú v čase $0,183 \times 10^{-4}$ s a v tomto čase je maximálna hodnota posunutia v smere osi z $12,7 \mu\text{m}$.



Obr. 9.8. Príklad 2 – časový priebeh (čas v [s]) max. posunutia v [μm]

Register

- analýza
 - harmonická, 133
 - modálna, 124
 - prechodová, 144
 - statická, 69, 85, 107
- ANSYS APDL, 23
- ANSYS Command line, 27
- ANSYS Main menu, 25
- ANSYS Toolbar, 27
- ANSYS Utility menu, 26
- budenie
 - harmonické, 133
 - všeobecné, 144
- diskretizácia
 - oblasti, 13, 16
 - rovnice, 13
- forma
 - silná, 10, 11
 - slabá, 10, 12
 - variačná, 10, 12
- funkcie
 - tvárové, 17
- funkcionál, 12
- Jakobián, 93
- materiál
 - anizotropný, 89
 - izotropný, 90
 - ortotropný, 89
- matica
 - hmotnosti, 125
 - tlmenia, 145
 - tuhosti, 22, 125
- metóda
 - časovej integrácie, 145
 - explicitná, 146
 - implicitná, 146
 - konečných diferencií, 14
 - konečných prvkov, 15
 - Reyleigh-Ritzova, 15
 - superpozície vlastných tvarov, 145
 - váhových reziduí, 14
- metódy
 - numerické, 13
- model
 - dosky, 107
 - Kirchhoffov, 108
 - membránový škrupinový, 108
 - Reissner-Mindlinov, 108
 - von Kármanov, 108
- modely
 - matematické, 10
- napätosť
 - priestorová, 85
 - rovinná, 91
- postprocessor, 51
- preprocessor, 28
- pretvorenie
 - rovinné, 92
- problém
 - vlastných čísel, 11
 - okrajových hodnôt, 10
 - okrajovo-počiatočných hodnôt, 11
 - počiatočných hodnôt, 10
- program ANSYS, 23
- prvky
 - škrupinové, 107
 - izoparametrické, 94
 - nosníkové, 69
 - rovinné, 85
- rezidum, 12
- rovnica
 - diferenciálna, 11
 - váhová integrálna, 12

rovnice
 algebraické, 13
 kinematické, 70, 88, 108
 prvkové, 18
 silovej rovnováhy, 71, 85, 109
 systému, 21

solution, 45

systém
 jednohmotový, 124, 133, 144
 multi-DOF, 125

teória
 Euler-Bernoulliho, 69
 Timošenkova, 69

tenzor
 elasticity, 89
 napätia, 87
 pretvorenia, 88

tvorba MKP modelu, 28

vlastné
 čísla, 126

zákon
 Hookov, 89
 konštitutívny, 72, 88, 110

Literatúra

- [1] Barlow, J.: Optimal stress locations in finite element models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, ročník 10, č. 2, 1976: s. 243–251.
- [2] Bathe, K.-J.: *Finite Element Procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, 2007, ISBN 978-0979004902
- [3] Štefan Benča: *Riešenie nelineárnych pevnostných úloh pomocou MKP*. STU Bratislava, 2009, ISBN 9788022730778
- [4] Benča, v.: *Výpočtové postupy MKP*. STU Bratislava, 2006, ISBN 8022724041
- [5] Brdička, M.; Samek, L.; Sopko, B.: *Mechanika kontinua*. Academia, 2011, ISBN 9788020020390
- [6] Burnett, D. S.: *Finite Element Analysis, From Concepts to Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, 1987, ISBN 0-201-10806-2
- [7] Ferziger, J. H.; Peric, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, tretie vydanie, 2001, ISBN 978-3540420743
- [8] Finlayson, B. A.: *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, tretie vydanie, 1975, ISBN 978-0-12-257050-6
- [9] Hoffman, J. D.: *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. Marcel Dekker, Inc., 2001, ISBN 0-8247-0443-6
- [10] Jin, J.-M.: *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley-IEEE Press, druhé vydanie, 2002, ISBN 978-0471438182
- [11] Kneschke, A.: *Používanie diferenciálnych rovníc v praxi, preklad*. Nakladateľstvo Alfa, Bratislava, 1969.
- [12] Kutiš, V.: *Základy modelovania a simulácie*. STU Bratislava, 2010, ISBN 9788022733458
- [13] Lewis, R. W.; Nithiarasu, P.; Seetharamu, K. N.: *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. Wiley, prvé vydanie, 2004, ISBN 0470847891
- [14] Michlin, S. G.; Smolickij, C. L.: *Približné metódy riešenia diferenciálnych a integrálnych rovníc, preklad*. Vydavateľstvo Alfa, Bratislava, 1974.

- [15] Žmindák, M.; Grajciar, I.; Nozdrovický, J.: *Modelovanie a výpočty v metóde konečných prvkov: Modelovanie v ANSYS. Diel I.* Vedeckotechnická spoločnosť pri Žilinskej univerzite, 2004, ISBN 80-968823-5-X
- [16] Murín, J.: *Metóda konečných prvkov pre prútové a rámové konštrukcie.* STU Bratislava, 1999, ISBN 80-227-1287-6
- [17] Rao, S. S.: *The Finite Element Method in Engineering.* Butterworth-Heinemann, piate vydanie, 2001, ISBN 978-1856176613
- [18] Reddy, J. N.; Gartling, D. K.: *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics.* CRC Press, druhé vydanie, 2000, ISBN 978-0849323553
- [19] Tveito, A.; Winther, R.: *Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach.* Springer, prvé vydanie, 2004, ISBN 978-3540887041
- [20] Volakis, J. L.; Chatterjee, A.; Kempel, L. C.: *Finite Element Method Electromagnetics: Antennas, Microwave Circuits, and Scattering Applications.* Wiley-IEEE Press, 1998, ISBN 978-0780334250
- [21] Wolf, J. P.: *The Scaled Boundary Finite Element Method.* Wiley, prvé vydanie, 2003, ISBN 978-0471486824
- [22] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics.* Butterworth-Heinemann, 6. vydanie, 2005, ISBN 978-0750663212
- [23] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Nithiarasu, P.: *The Finite Element Method for Fluid Dynamics.* Butterworth-Heinemann, 6. vydanie, 2005, ISBN 978-0750663229

Autori: doc. Ing. Vladimír Kutiš, PhD.
prof. Ing. Justín Murín, DrSc.
Ing. Juraj Paulech, PhD.
Ing. Vladimír Goga, PhD.

Názov: Metóda konečných prvkov v mechatronike I
Úvod do programu ANSYS

Vydanie: 1. vydanie

Náklad: 100 výtlačkov

Rozsah: 160 strán

Tlač: Nakladateľstvo STU v Bratislave

Vytlačené: 2013

ISBN XXXXXXXXXXXX