Metóda konečných prvkov

Vybrané kapitoly pre mechatronikov

Metóda konečných prvkov

Vybrané kapitoly pre mechatronikov

Justín Murín
Juraj Hrabovský - Vladimír Kutiš

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2014

Mechatronika, ktorá synergicky spája mechaniku, elektrotechniku a elektroniku, automatické riadenie a informatiku, predstavuje pre svoju multifyzikálnosť a multifunkcionalitu oblasť, v ktorej zohrávajú výpočtové metódy nezastupiteľnú úlohu. Mechanické systémy obohatené o umelú inteligenciu sa stavajú mechatronickými, alebo tiež smart systémami, s ktorými sa stretávame stále častejšie. Sú to produkty automobilovej, dopravnej a leteckej techniky, biomedicínskej techniky, výrobnej a manipulačnej techniky, robotiky, mikro a nano technológie. Pri ich projektovaní a diagnostike sa používajú práve počítačovo orientované výpočtové metódy. Táto publikácia sa zaoberá najuniverzálnejšou výpočtovou metódou - Metódou konečných prvkov (MKP), anglicky Finite Element Method (FEM), ktorá sa používa na makroskopické modelovanie a simuláciu mechanických častí mechatronických prvkov a systémov. Sú v nej uvedené základy tejto metódy pre riešenie úloh elasto-statiky a elasto-dynamiky, vrátane pružného kmitania mechanických prvkov a systémov, so zameraním na mechatroniku.
Táto publikácia má slúžiť predovšetkým študentom inžinierského študijného programu Automobilová mechatronika a doktorandského študijného programu Mechatronické systémy, ktoré sú akreditované na Fakulte elektrotechniky a informatiky STU v Bratislave.

Všetky práva vyhradené. Nijaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo nakladateľstva.

© prof. Ing. Justín Murín, DrSc., Ing. Juraj Hrabovský, PhD.,
doc. Ing. Vladimír Kutiš, PhD.

Recenzenti: prof. Ing. Milan Žmindák, CSc.
Ing. Rastislav Ďuriš, PhD.

ISBN 978-80-227-4298-6

Obsah

1 Základné pojmy **11**
1.1 Úvod a motivácia . . . 11
1.2 Aplikácia MKP v mechatronike . . . 12
1.3 Základy MKP a postup riešenia úlohy poľa s MKP . . . 14
1.3.1 Vznik metódy . . . 14
1.3.2 MKP a iné numerické metódy . . . 15
1.3.3 Postup riešenia inžinierskej úlohy s MKP . . . 19

2 Elastostatika kontinua a MKP **23**
2.1 Cieľ kapitoly . . . 23
2.2 Základné pojmy a rovnice elastostatiky kontinua . . . 23
2.2.1 Rozdelenie síl pôsobiacich na poddajné kontinuum . . . 24
2.2.2 Metóda mysleného rezu na určenie výslednice vnútorných síl . . 25
2.2.3 Normálové a tangenciálne (šmykové) napätie . . . 26
2.2.4 Základné prípady namáhania . . . 27
2.2.5 Pomerné predĺženie a pomerné skosenie . . . 30
2.2.6 Pracovný diagram trhacej skúšky . . . 32
2.2.7 Hookov zákon . . . 33
2.2.8 Priečne zúženie . . . 34
2.2.9 Energia napätosti . . . 35
2.2.10 Castiglianova veta . . . 37
2.2.11 Miera bezpečnosti a dovolené namáhanie . . . 38
2.2.12 Napätosť a deformácia v bode telesa . . . 39
2.2.13 Zovšeobecnený Hookov zákon . . . 49
2.3 Riešenie statickej úlohy pružnosti metódou konečných prvkov . . . 54
2.3.1 Formulácia všeobecnej elastostatickej úlohy a jej MKP riešenie . 56
2.3.2 Základné vzťahy energetickej formulácie rovníc MKP . . . 60
2.3.3 Rozdelenie konečných prvkov pre riešenie mechaniky pevných a poddajných telies . . . 66

3 Konečné prvky na riešenie elastostatiky **69**
3.1 Cieľ kapitoly . . . 69
3.2 Prútový konečný prvok . . . 69
3.2.1 Prvková rovnica prúta v lokálnom a globálnom súradnicovom systéme . . . 70

3.2.2 Transformačné vzťahy medzi lokálnymi a globálnymi veličinami . 72
3.2.3 Riešenie jednorozmerných úloh 74
3.2.4 Zostavovanie matice tuhosti konštrukcie a systému rovníc MKP prútovej sústavy 77
3.3 Nosníkový konečný prvok 85
3.3.1 3D - nosníkový konečný prvok 85
3.3.2 Rovinný nosníkový konečný prvok 88
3.3.3 Príklady aplikácie nosníkových prvkov v mechatronike 91
3.4 Konečné prvky spojitého telesa 92
3.4.1 Lineárny trojuholníkový konečný prvok 92
3.4.2 Izoparametrické rovinné konečné prvky 97
3.5 Špeciálne konečné prvky 102

4 Elastodynamika a MKP 103
4.1 Úvod a motivácia 103
4.2 Zohľadnenie dynamických síl pri elasto-dynamických analýzach 103
4.2.1 Zohľadnenie účinkov zotrvačných síl 105
4.2.2 Analytické výpočty napätia a deformácie pri priamočiarom zrýchlenom pohybe mechanických sústav 109
4.2.3 Zohľadnenie zotrvačných síl pri rotačnom pohybe 112
4.3 Kmitanie pružných sústav 114
4.3.1 Vlastné kmitanie pružných sústav 116
4.3.2 Vynútené harmonické kmitanie a výpočet napätia v pružných prvkoch 122
4.4 Základné rovnice MKP pre elastodynamiku 126
4.4.1 Lokálna matica hmotnosti prútového konečného prvku 128
4.4.2 Lokálna matica hmotnosti nosníkového konečného prvku 130
4.4.3 Matica hmotnosti rovinnej napätosti a rovinnej deformácie pravouhlého štvoruzlového rovinného telesového konečného prvku . 131
4.5 Rovnice MKP modálnej analýzy 132
4.6 Rovnice MKP prechodovej analýzy a ich riešenie 136
4.6.1 Newmarková metóda riešenia rovníc dynamickej rovnováhy . . . 138

Index 139

Literatúra 141

Zoznam obrázkov

1.1 Mapa mechanických napätí 13
1.2 Elastostatická analýza manipulátora 13
1.3 Simulácia prúdenia vzduchu okolo automobilu 13
1.4 Analýza elektrostatického kontaktu 14
1.5 Deformácia mikroaktuátora 14
1.6 Deformácia mikroaktuátora 15
1.7 Diskretizácia oblasti čiarovými prvkami typu LINK 16
1.8 Diskretizácia oblasti telesovými rovinným prvkom typu SOLID PLANE 17
1.9 Diskretizácia oblasti objemovými prvkami typu SOLID 3D 17
1.10 Deformácia aktuátora 22

2.1 Poddajné teleso 24
2.2 Metóda mysleného rezu 25
2.3 Pojem mechanického napätia 26
2.4 Zložky výslednice vnútorných síl 27
2.5 Čistý ťah, tlak 28
2.6 Čistý šmyk 28
2.7 Čistý krut 29
2.8 Čistý ohyb 29
2.9 Vzper štíhleho prúta 30
2.10 Namáhanie osovou silou 30
2.11 Pomerné skosenie 31
2.12 Skúška v ťahu 32
2.13 Krehký materiál 33
2.14 Závislosť medzi šmykovým napätím a pomerným skosením 34
2.15 Deformácia pri jednoosovej napätosti 35
2.16 Energia napätosti normálových napätí 36
2.17 Energia napätosti šmykových napätí 37
2.18 Castiglianova veta 37
2.19 Uhol natočenia 38
2.20 Napätosť v bode telesa 40
2.21 Rovinná napätosť 40
2.22 Jednoosová napätosť 41
2.23 Určenie σ a τ v rovine μ jednoosovej napätosti 41
2.24 Rovnováha vnútorných síl 42
2.25 Napätie σ a τ vo vybratých rovinách 43

2.26 Mohrova kružnica jednoosovej napätosti . . . 44
2.27 Rovinná napätosť . . . 44
2.28 Určenie σ a τ . . . 45
2.29 Priestorová napätosť . . . 46
2.30 Rovinná napätosť - zložky pretvorenia . . . 47
2.31 Celkové pretvorenie EH . . . 48
2.32 Pretvorenie hranola . . . 49
2.33 Superpozícia účinkov . . . 50
2.34 Priestorové teleso v statickej rovnováhe . . . 56
2.35 Jednorozmerná úloha . . . 58
2.36 Prútový element . . . 64
2.37 Jednorozmerný konečný prvok . . . 67
2.38 Plošné konečné prvky . . . 67
2.39 Priestorové konečné prvky . . . 67

3.1 Prútová sústava . . . 70
3.2 Prútový prvok – posunutie uzlov prúta v GSS . . . 70
3.3 Vektor uzlových síl v GSS . . . 71
3.4 Prút v LSS . . . 71
3.5 Uzlové sily v uzle i, I . . . 72
3.6 Prút v rovine . . . 74
3.7 Jednorozmerná úloha . . . 75
3.8 Model MKP . . . 75
3.9 Mikroaktuátor ako staticky určitá prútová sústava . . . 77
3.10 Osadená tyč . . . 80
3.11 MKP model tyče . . . 80
3.12 Rovinná prútová sústava . . . 82
3.13 Model prútovej sústavy pre MKP . . . 82
3.14 3D – nosníkový konečný prvok . . . 85
3.15 Diskretizácia rovinnej oblasti na rovinné trojuholníkové konečné prvky . 92
3.16 Vybraný konečný prvok . . . 93
3.17 Transformácia 9-uzlového rovinného konečného prvku . . . 97
3.18 Štvoruzlový izoparametrický konečný prvok . . . 99

4.1 Priamočiary zrýchlený pohyb telesa . . . 104
4.2 Rovnomerný kruhový pohyb . . . 104
4.3 Mechanická sústava s uvažovaním vlastnej hmotnosti . . . 105
4.4 Statické a dynamické namáhanie nosníka . . . 106
4.5 Dynamika zdvíhania kabínky výťahu . . . 107
4.6 Dynamika spúšťania kabínky výťahu . . . 108
4.7 Zdvíhanie bremena rovnomerne zrýchleným pohybom . . . 109
4.8 Sériové zapojenie dvoch pružín . . . 111
4.9 Paralelné zapojenie dvoch pružín . . . 111
4.10 Rotujúce rameno konštantného prierezu . . . 112
4.11 Priebeh normálového napätia . . . 113
4.12 Rotujúce rameno s prídavnou hmotnosťou . . . 113
4.13 Rameno konštantnej pevnosti . . . 113

4.14 Dynamická sústava s jedným stupňom voľnosti pohybu 114
4.15 Kmitajúca sústava s jedným stupňom voľnosti 116
4.16 Znázornenie kmitavého pobytu po kružnici 118
4.17 Amplitúdovo-frekvenčná charakteristika kmitania 118
4.18 Pružná sústava s jedným stupňom voľnosti 118
4.19 Jednoducho podopretý nosník 119
4.20 Torzné kmitanie 120
4.21 Vynútené axiálne harmonické kmitanie 122
4.22 Amplitúdovo-frekvenčná charakteristika harmonického kmitania 123
4.23 Harmonický priebeh normálového napätia v mieste uchytenia prúta . . . 124
4.24 Vynútené kmitanie nosníka 125
4.25 Prútový konečný prvok 129
4.26 Rovinný nosníkový konečný prvok 130
4.27 Rovinný pravouhlý štvoruzlový konečný prvok 132
4.28 Vlastné kmitanie dvojhmotovej sústavy 134
4.29 Časová závislosť zaťaženia 137

Poďakovanie

Táto monografia vznikla vďaka podpore Kultúrnej a grantovej agentúre Ministerstva školstva SR (KEGA), Vedeckej grantovej agentúre Ministerstva školstva SR (VEGA) a Agentúre na podporu výskumu a vývoja (APVV). Autori ďakujú agentúram za poskytnuté financie pridelené projektom KEGA č. 015STU-4/2012, VEGA č. 1/0534/12 a APVV č. 0246-12 pre Fakultu elektrotechniky a informatiky STU Bratislava.

Veľká vďaka patrí aj oponentom, menovite prof. Ing. Milanovi Žmindákovi, PhD. a Ing. Rastislavovi Ďurišovi, PhD. za ich cenné pripomienky, námety a odporúčania, čím výrazne prispeli k zvýšeniu kvality tejto monografie.

Kapitola 1

Základné pojmy

1.1 Úvod a motivácia

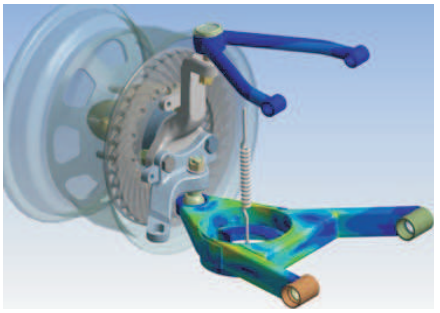
Technický inžinier musí pri projektovaní technického diela vykonať okrem iného aj matematické výpočty, ktorými overí nielen správnosť navrhnutej geometrie, zvoleného materiálu, ale aj požadovanú bezpečnú a spoľahlivú funkčnosť, životnosť a efektívnosť svojho návrhu. V minulosti sa na technické výpočty používali väčšinou analytické metódy. Výhodou týchto metód bola ich relatívna jednoduchosť, ktorá často vyúsťovala do stanovenia jednoduchých vzorcov a formuliek zostavených do rôznych výpočtových tabuliek, ako boli napríklad strojnícke, stavebnícke, či elektrotechnické tabuľky. Nevýhodou analytických metód bola potreba silného zjednodušenia fyzikálneho modelu reálneho prvku alebo systému tak, aby ho bolo možno opísať čo najjednoduchšími matematickými rovnicami riešiteľnými pomocou jednoduchých výpočtových pomôcok, ako boli napr. logaritmické pravítko alebo jednoduchá kalkulačka. Takto sa reálny priestorový systém redukoval na jedno alebo dvojrozmerný, nelineárne úlohy sa linearizovali, a časovo závislé javy sa riešili len pre ustálené stavy. Na konštrukciu prvkov alebo systémov sa používal najmä homogénny izotropický materiál, na správanie ktorého postačoval čo najjednoduchší materiálový model. Rozvoj výpočtovej techniky a výroba nových materiálov umožňuje v súčasnosti zostavovať fyzikálne a matematické modely skúmaných systémov veľmi blízke realite tak z hľadiska geometrie, materiálového zloženia, ako aj ich funkcie. Vznikajú tak nové numerické, počítačovo orientované výpočtové metódy, ktorých algoritmus je spracovaný do počítačových softvérov. Pomocou nich potom možno vo virtuálnej realite vytvoriť výpočtový model, ktorým sa analyzujú zložité lineárne i nelineárne, stacionárne i nestacionárne odozvy navrhnutého systému na prevádzkové i kritické zaťažovacie stavy. Takto možno riešiť aj tzv. multifyzikálne viazané úlohy. Napríklad: elektrické pole spôsobuje vznik teplotného poľa, ktoré spôsobuje deformáciu materiálu a vznik mechanických napätí. Navyše, fyzikálne veličiny jednej oblasti fyziky ovplyvňujú materiálové vlastnosti inej oblasti, čo mení odozvu systému pri jeho prevádzke. Napríklad, teplota mení elektrickú i tepelnú vodivosť, teplotnú rozťažnosť, modul pružnosti, medzu pevnosti a medzu klzu. Okrem homogénnych materiálov sa používajú kompozitné neheterogénne materiály (funkcionálne gradované, multifunkcionálne), ktoré môžu byť izotropické ale aj anizotropické a iné. V súčasnosti

sú veľmi dobre spracované výpočtové metódy založené na tzv. makroskopickom prístupe ku skúmaniu fyzikálnych dejov. Postupne sa rozvíjajú aj metódy založené na tzv. mikroskopickom prístupe, ktorými sa skúmajú javy a deje na atomárnej úrovni. Pretože použitie experimentálných metód na tejto úrovni je veľmi obtiažne, výpočtové metódy sú tu v podstate jediný nástroj ako analyzovať deje a javy na tejto úrovni.
Mechatronika, ktorá synergicky spája mechaniku, elektrotechniku a elektroniku, automatické riadenie a informatiku, predstavuje pre svoju multifyzikálnosť a multifunkcionalitu oblasť, v ktorej zohrávajú výpočtové metódy nezastupiteľnú úlohu. Mechanické systémy obohatené o umelú inteligenciu sa stavajú mechatronickými, alebo tiež smart systémami, s ktorými sa stretávame veľmi často. Sú to produkty automobilovej, dopravnej a leteckej techniky, biomedicínskej techniky, výrobnej a manipulačnej techniky, robotiky, mikro a nano technológie. Pri ich projektovaní a diagnostike sa používajú práve počítačovo orientované výpočtové metódy. V rámci tejto publikácie sa budeme zaoberať makroskopickým modelovaním a simuláciou mechatronických prvkov a systémov najuniverzálnejšou výpočtovou metódou – Metódou konečných prvkov (MKP), anglicky Finite Element Method (FEM). Budú uvedené základy tejto metódy na riešenie úloh elasto-statiky a elasto-dynamiky, vrátane pružného kmitania mechanických prvkov a systémov so zameraním na mechatroniku.
Problematika teoretických základov metódy konečných prvkov, ako aj jej aplikácie, je široko rozpracovaná v domácej i zahraničnej literatúre. Výber z tejto literatúry je uvedený na konci publikácie.
Táto publikácia má slúžiť predovšetkým študentom inžinierského študijného programu Automobilová mechatronika a doktorandského študijného programu Mechatronické systémy, ktoré sú akreditované na Fakulte elektrotechniky a informatiky STU v Bratislave.

1.2 Aplikácia MKP v mechatronike

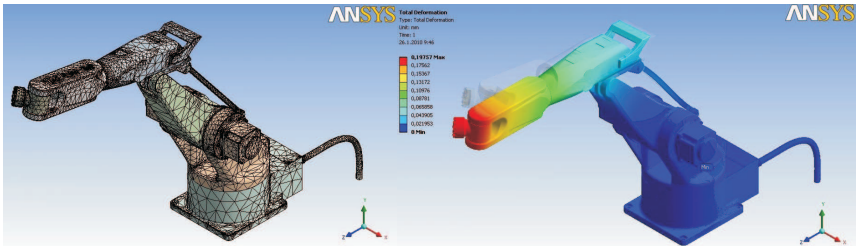
Mechatronické prvky a systémy pracujú spravidla na multifyzikálnych princípoch, ako je elasto-statika, elasto-dynamika, termo-mechanika, termo-dynamika, magneto-mechanika, elektro-mechanika, termo-elektricita, termo-elektromagneticita, termo-elektro-mechanika, hydro-mechanika, hydro-dynamika, piezo-elektricita, piezo-resistivita a pod. Na modelovanie a simuláciu týchto prvkov a systémov sa používa najmä metóda konečných prvkov, ktorá je implementovaná do komerčných počítačových softvérov. Na riešenie multifizykálnych úloh možno použiť softvéry ANSYS, ABAQUS, ADINA, COMSOL a ďalšie. Pomocou nich možno v elastostatickej analýze získať informácie o deformáciách a mechanických napätiach spôsobených vonkajším zaťažením; v elasto-dynamickej analýze získať odozvu systému na časovo závislé zaťaženie, vlastné tvary a vlastné frekvencie kmitania; v tepelnej analýze vypočítať teplotné pole, v elektro-tepelnej analýze určiť veličiny elektrického a teplotného poľa, v elektro-tepelno-mechanickej analýze získať veličiny elektrického a teplotného poľa ako aj zodpovedajúcu deformáciu a mechanické napätie atď. Výsledky analýz nám slúžia na posúdenie bezpečnosti, spoľahlivosti a správnej funkčnosti analyzovaného systému. Výsledky analýz možno získať nielen vo forme grafov a tabuliek, ale aj vo forme vizuálnej. Pri dynamických a nelineárnych dejoch možno výsledky zobraziť aj vo forme grafickej animácie. Kvôli názornosti sú ďalej ukázané výsledky vybraných analýz metódou konečných prvkov, ktoré možno nájsť na voľne prístupných web stránkach.

Na Obr. 1.1 sú znázornené výsledky elastostatickej analýzy závesu kolesa automobilu.



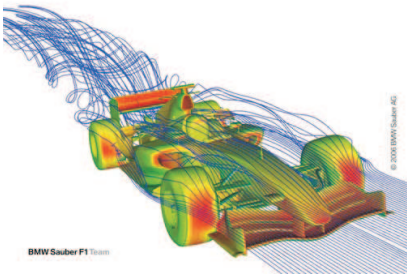
Obr. 1.1. Mapa mechanických napätí

Na Obr. 1.2 vidieť diskretizáciu mechatronického systému na konečné prvky a jeho deformáciu vypočítanú pomocou softvéru ANSYS pri vykonanom pohybe.



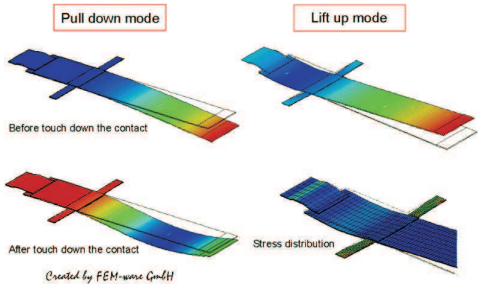
Obr. 1.2. Elastostatická analýza manipulátora

Na Obr. 1.3 sú znázornené tvary prúdnic pri obtekaní vzduchu okolo vozidla.



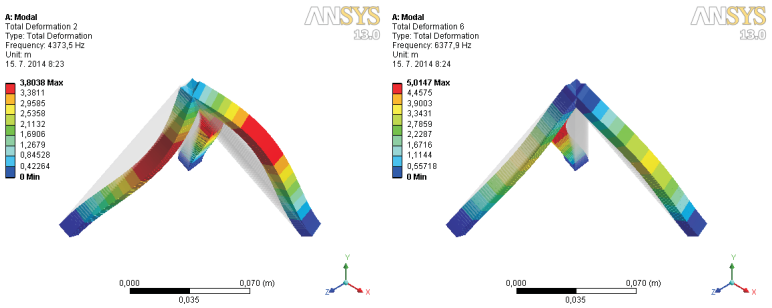
Obr. 1.3. Simulácia prúdenia vzduchu okolo automobilu

Na Obr. 1.4 sú znázornené výsledky pôsobenia elektrostatických síl v spínači zapaľovacieho prúdu sviečky zážihového spaľovacieho motora.



Obr. 1.4. Analýza elektrostatického kontaktu

Na Obr. 1.5 sú znázornené vybrané vlastné tvary kmitania kompozitného mikro-aktuátora.



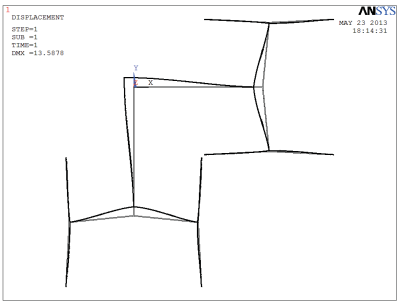
Obr. 1.5. Deformácia mikroaktuátora

Na Obr. 1.6 sú znazornené výsledky deformácie mikro-elektro-mechanického aktuátora získanej elektro-tepelno-mechanickou analýzou.

1.3 Základy MKP a postup riešenia úlohy poľa s MKP

1.3.1 Vznik metódy

Pri matematickom modelovaní inžinierskych úloh (v mechanike poddajného telesa) vznikali zložité, dovtedy neriešiteľné systémy obyčajných alebo parciálnych diferenciálnych rovníc. Z toho vyplynula potreba vývoja numerických, počítačovo orientovaných metód, ktorými by sa tento problém zvládol.
MKP začali súčasne vyvíjať matematici (R. Courant), fyzici (J. L. Synge) a inžinieri (J. H. Argyris a S. Kelsey). Významné prvotné publikácie z počiatku rozvoja MKP publikovali J. H. Argyris, O. C. Zienkiewicz a Y. K. Cheung. Názov metódy stanovil R. W. Clough. Prudký rozvoj MKP začal počiatkom 60. rokov minulého storočia.



Obr. 1.6. Deformácia mikroaktuátora

Jej vývoj nie je ešte ukončený ani v súčasnosti. Na Slovensku sa metódou konečných prvkov a výpočtovými metódami zaoberali, resp. zaoberajú najmä pracovníci katedier a ústavov aplikovanej mechaniky a mechatroniky: na Strojníckej fakulte STU v Bratislave (Š. Benča, J. Jelemenský, P. Élesztös); na Stavebnej fakulte STU (J. Králik, J. Ravinger, N. Jendželovský, M. Sokol); na Strojníckej fakulte ŽU v Žiline (V. Kompiš, M. Žmindák), na Strojníckej fakulte TU Košice (F. Šimčák, J. Bocko, Š. Segľa...); na Ústave stavebníctava a architektúry SAV v Bratislave (J. Sládek, V. Sládek), na Fakulte elektrotechniky a informatiky STU (V. Kutiš, J. Paulech, J. Hrabovský) a iní. MKP sa v počiatkoch rozvíjala len pre oblasť mechaniky pevných a poddajných telies. Ukázalo sa však, že ju možno použiť aj na riešenie iných tried úloh, ako je: teplotné pole, prúdenie plynov a kvapalín, elektrina a magnetizmus, žiarenie a prenos hmoty, viazané úlohy, analýzy mikro- a nanoštruktúr atď.
V súčasnosti patrí medzi najuniverzálnejšie, najrozšírenejšie a najefektívnejšie numerické metódy riešenia inžinierskych úloh, resp. riešenia úloh poľa.

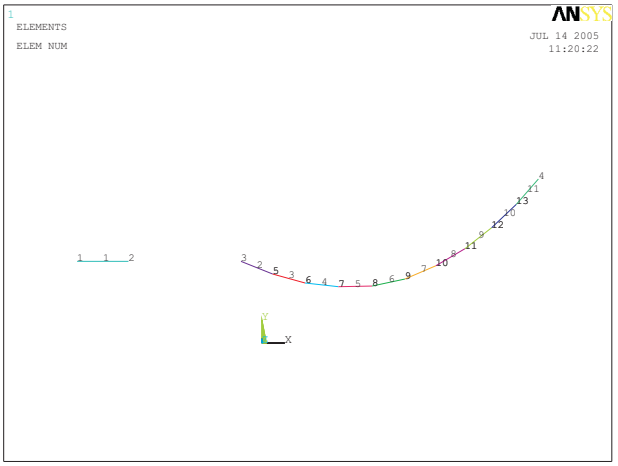
1.3.2 MKP a iné numerické metódy

Numerické metódy transformujú systém parciálnych alebo obyčajných diferenciálnych rovníc (DR) opisujúci danú úlohu na systém algebraických rovníc, ktorý sa rieši na počítači. Napr.:

- diferenciálne pohybové rovnice poddajného kontinua,
- diferenciálne rovnice prenosu tepla,
- diferenciálne rovnice prúdenia plynov a kvapalín,
- diferenciálne rovnice elektrického a elektro-magnetického poľa,
- diferenciálne rovnice akustiky, žiarenia atď.

DR sú postavené pre neznámu funkciu poľa (posunutia, teploty, elektrického potenciálu...) na konečnej ohraničenej súvislej alebo viacnásobne súvislej oblasti (čiara, plocha, objem). Neznáme pole je spravidla skalárne (teplotné, potenciálové) alebo vektorové (deformačné, rýchlostné). Cieľom riešenia DR je nájsť takú funkciu závislú od súradníc zvoleného vzťažného súradnicového systému tak, aby spĺňala počiatočné

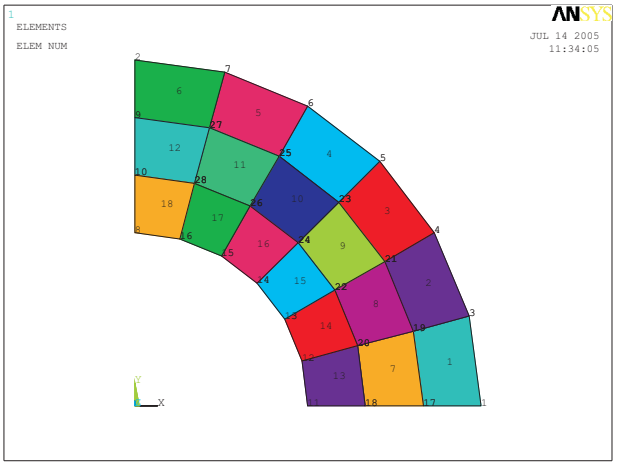
a okrajové podmienky riešenia. Táto funkcia môže byť rovnicou krivky, plochy alebo objemu. Dosadením súradníc vybraného bodu skúmanej oblasti možno z tejto funkcie dostať hodnotu "primárnej" neznámej fyzikálnej veličiny v danom bode.
Hlavná idea väčšiny numerických metód riešenia DR (diferenčné, kolokačné, metóda najmenších štvorcov, variačné, MKP...) je: pre hľadanú neznámu funkciu poľa sa vhodne zvolí náhradná funkcia vzťažných súradníc pozostávajúca z určitého typu funkcie (napr. polynómy, goniometrické funkcie, rady...) a z voľných koeficientov. Voľba náhradnej funkcie nemôže byť ľubovoľná, pretože musí spĺňať dané počiatočné a okrajové podmienky. Na algebraický systém rovníc možno DR previesť priamo (tzv. silná formulácia riešenia úlohy), alebo nepriamo z jej integrálneho tvaru (tzv. slabá formulácia riešenia úlohy). Pri integrálnej formulácii sa zostaví funkcionál (spravidla vyjadrujúci celkovú energiu systému), ktorý sa potom minimalizuje vzhľadom na voľné parametre náhradnej funkcie. Riešením algebraického systému rovníc možno určiť voľné parametre náhradnej funkcie, a tým aj jej celkový tvar. Jednotlivé numerické metódy sa líšia voľbou náhradnej funkcie, fyzikálnym významom voľných koeficientov a spôsobmi ich určenia.
Základný rozdiel MKP oproti iným numerickým metódam je, že náhradné funkcie sa volia nie pre celú oblasť, ale pre podoblasti konečných rozmerov (na ktoré je daná oblasť rozdelená – diskretizovaná) – konečné prvky. Navyše, voľné parametre náhradných funkcií majú fyzikálny význam. Zásada je, že pre všetky prvky danej skupiny sú náhradné funkcie rovnaké. Konečné prvky sú navzájom pospájané uzlovými bodmi (môžu ležať na hranici prvku – napr. v "rohoch", ale aj vo vnútri prvku). Voľné parametre sú primárne neznáme riešeného poľa (posunutia, teploty, potenciály, ...) v uzlových bodoch. MKP transformuje výpočet primárnej neznámej v teoreticky nekonečnom počte bodov oblasti na výpočet jej hodnôt v konečnom počte bodov – v uzlových bodoch.



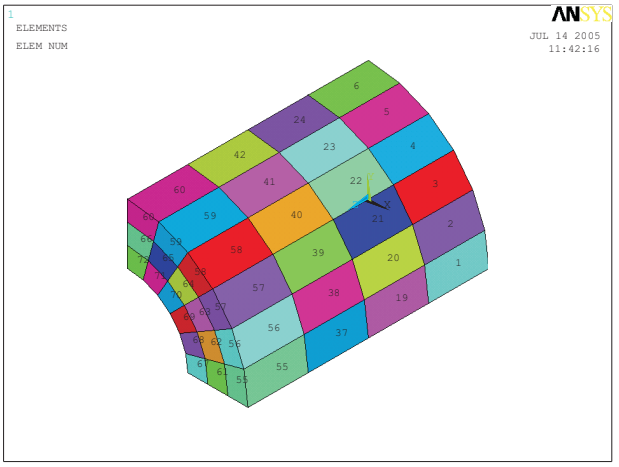
Obr. 1.7. Diskretizácia oblasti čiarovými prvkami typu LINK

Pri iných numerických metódach nemajú voľné koeficienty náhradnej funkcie spravidla žiaden fyzikálny význam, a ak sa volia podoblasti, tie majú spravidla diferenciálnu a nie

konečnú veľkosť. MKP je však tiež vzhľadom na voľbu náhradných funkcií metódou približnou a jej presnosť závisí aj od jemnosti diskretizácie riešenej oblasti na konečné prvky a uzlové body. Konečné prvky majú spravidla tvar čiary, plochy alebo objemu konečných rozmerov (Obr. 1.7 - 1.9).



Obr. 1.8. Diskretizácia oblasti telesovými rovinným prvkom typu SOLID PLANE



Obr. 1.9. Diskretizácia oblasti objemovými prvkami typu SOLID 3D

Čím je sieť konečných prvkov jemnejšia, tým je aj presnosť riešenia vyššia. Na modelovanie zakrivených oblasti možno použiť konečné prvky so zakriveným tvarom. Treba však povedať, že aj veľmi hrubá sieť dáva často uspokojivé a použiteľné výsledky. Sieťovanie oblasti, ako aj prípadné zjemňovanie siete, prebieha automaticky. Súčasné

počítače už na úrovni obyčajných PC dokážu bez problémov riešiť rozsiahle systémy algebraických rovníc veľmi efektívne a rýchlo. Takže počiatočný nedostatok tejto metódy, týkajúci sa problémov riešenia rozsiahlych algebraických systémov rovníc na prvých nízko výkonných počítačoch je odstránený.
V MKP sa integrálny tvar DR – spravidla funkcionál potenciálnej energie – vyjadrí ako suma potenciálov jednotlivých elementov

$$\Pi = \sum_e \Pi^e = \Pi\big(\varphi^e(x, y, z)\big) \tag{1.1}$$

Tento potenciál je funkciou náhradných funkcií prvkov obsahujúcich neznáme voľné koeficienty. Náhradné funkcie prvku sú spravidla polynómy a ich stupeň k závisí od počtu jeho uzlových bodov. Napr.:

$$\varphi^e(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n} N_k(x, y, z)\varphi_k^e \tag{1.2}$$

kde $N_k(x, y, z)$ sú tzv. tvarové funkcie a φ_k^e sú neznáme hodnoty riešeného poľa v uzlových bodoch elementu (voľné parametre tvarových funkcií). Implementáciou (1.2) do (1.1) dostaneme funkcionál vyjadrený v závislosti od neznámych hodnôt hľadaného poľa v uzlových bodoch všetkých elementov. Minimalizáciou potenciálu (1.1) podľa týchto neznámych v uzlových bodoch

$$\frac{\partial \Pi(\varphi_k)}{\partial \varphi_k} = 0 \tag{1.3}$$

dostaneme pre všetky spomínané polia základný algebraický systém rovníc MKP v tvare

$$[\mathbf{K}]\varphi = F \tag{1.4}$$

obsahujúci maticu poľa $\mathbf{K}$. Stĺpcový vektor pravej strany F obsahuje akcie pôsobiace v uzlových bodoch vyvolávajúce reakcie – stĺpcový vektor uzlových neznámych φ. Matica poľa obsahuje spravidla geometrické parametre riešenej oblasti a jej materiálové vlastnosti. V mechanike pevných a poddajných telies je to matica tuhosti, v termokinetike je to matica tepelnej vodivosti, v elektrickom poli je to matica elektrickej vodivosti atď.
Záverečné porovnanie klasických približných numerických metód a MKP:

- Náhradné funkcie klasických metód sú definované cez celú sledovanú oblasť (povrch, resp. objem konštrukčného prvku). Náhradné funkcie MKP sú definované na konečných prvkoch (konečných častiach sledovanej oblasti);
- Neznáme veličiny klasických metód nemajú fyzikálny význam. Neznáme v MKP sú stupne voľnosti v uzlových bodoch (mechanické posunutia alebo natočenia, teploty, elektrické potenciály atď.);
- Zvýšenie presnosti klasických metód vyžaduje náhradné funkcie vyššieho stupňa s väčším počtom koeficientov alebo iné náhradné funkcie. Presnosť MKP sa dosiahne zjemňovaním siete konečných prvkov;

- MKP je zvlášť výhodná pre nespojité sústavy s nespojitou zmenou geometrie alebo materiálových vlastností;
- MKP možno budovať modulárne (nie je závislá od charakteru riešenej oblasti), je formulovaná všeobecne, je počítačovo orientovaná a preto sa ľahko rozšírila aj pre teórie poľa vyššieho stupňa (nelineárne a časovo závislé).

1.3.3 Postup riešenia inžinierskej úlohy s MKP

Postup riešenia inžinierskej úlohy s MKP možno zovšeobecniť do týchto bodov:

1. Zostavenie fyzikálneho modelu úlohy a definovanie podmienok jednoznačnosti riešenia;

   Tu treba stanoviť, či daný problém spadá do oblasti mechaniky, termomechaniky, prúdenia kvapalín a plynov, elektriny a magnetizmu, akustiky atď., alebo ide o multifyzikálnu úlohu so vzájomnou interakciou jednotlivých polí. Identifikuje sa lineárnosť, resp. nelineárnosť, stacionárnosť, resp. časová závislosť riešenej úlohy. Prijmú sa zjednodušujúce predpoklady a idealizuje sa geometria, ako aj samotné správanie sa materiálu pod účinkom vonkajších akcií. Stanovia sa podmienky jednoznačnosti riešenia úlohy, t. j. geometria, materiálové vlastnosti, počiatočné a okrajové podmienky.

2. Diskretizácia analyzovanej oblasti (teleso alebo sústava telies) na konečné prvky;

   Diskretizácia pozostáva z rozdelenia riešenej oblasti na konečné prvky. Ako už bolo spomenuté, základné skupiny prvkov majú tvar čiary, plochy alebo objemu konečných rozmerov. Každá skupina prvkov obsahuje rádovo desiatky rôznych typov prvkov líšiacich sa najmä počtom uzlových bodov, počtom primárných neznámych v uzlových bodoch elementu (stupne voľnosti) a inými špeciálnymi vlastnosťami.

   Čiarový (prútový, spojovací) – LINK, sa používa na riešenie jednorozmerných (1D) úloh poľa, keď sa primárna neznáma veličina mení len v jednom smere. Geometrický tvar diskretizovaného telesa je charakterizovaný najmä svojím dĺžkovým rozmerom, pričom veľkosť prierezovej plochy je malá. Tieto prvky sú priame (dvojuzlové), s konštantným alebo premenlivým prierezom. V mechanike možno týmto prvkom modelovať prútové konštrukcie, laná, káble a iné konštrukčné prvky namáhané pozdĺžnym jednosovým namáhaním. V teplotných a elektrických poliach možno týmito prvkami modelovať vodiče tepla, resp. elektrického prúdu s prevládajúcou jednosmernou vodivosťou.

   Medzi čiarové prvky patrí aj nosníkový konečný prvok typu BEAM. Tieto prvky môžu byť priame – spravidla dvojuzlové, alebo zakrivené – tri- až päťuzlové. Používajú sa v mechanike na modelovanie nosníkových konštrukcií, ktoré prenášajú namáhanie ťahom-tlakom, šmykom, ohybom i krútením. Ich prierez rôznych profilov môže byť po dĺžke konečného prvku konštantný alebo lineárne premenlivý.

   Plošné prvky sa používajú na diskretizáciu oblasti s dvojrozmernou zmenou primárnej neznámej (2D elementy). Môžu byť rovinné alebo rotačne symetrické,

pričom spojnice uzlových bodov môžu byť priame (troj a štvoruzlový prvok) alebo zakrivené (6-uzlový trojuholník, 8- až 9-uzlový štvoruholník).

Objemové prvky (3D-elementy) sa používajú na diskretizáciu všeobecných priestorových oblastí s jednoduchou i viacnásobnou súvislosťou. Skúmaná primárna veličina sa môže meniť v bodoch skúmanej oblasti vo všeobecnom smere. Objemové prvky majú tvar ihlana alebo kvádra s rovnými alebo zakrivenými hranami. Najpoužívanejšie sú 4-uzlové a 10-uzlové ihlany a 8 až 21 uzlové hranoly. Prvky so zakrivenými hranami majú okrem rohových uzlov aj uzlové body v ťažiskách bočných stien ako aj v ťažisku celého objemu elementu. Degeneráciou týchto prvkov môžu vzniknúť iné špeciálne typy konečných prvkov, ako napr. typu SHELL – škrupinové konečné prvky.

3. Identifikácia primárnych neznámych a voľba vhodných interpolačných (tvarových, náhradných) funkcií poľa;

   Výber primárnych neznámych závisí od druhu riešeného poľa. Napr. v mechanike pevných a poddajných telies sú to premiestnenia bodov telesa, v teplotnom poli sú to teploty, pri prúdení tekutín je to rýchlosť prúdenia, v elektrickom poli je to elektrický potenciál, v akustike tlak a podobne.
   Ak sme už urobili identifikáciu primárnych neznámych, potom diskretizácia pokračuje výberom vhodných interpolačných funkcií v rovnici (1.2). Tieto funkcie určujú vzťah medzi primárnymi neznámymi vo vnútri prvku a v jeho uzlových bodoch. Interpolačné funkcie musia spĺňať tieto podmienky:

   a) výsledný funkcionál Π v rovnici (1.1) musí byť spojitý na hraniciach jednotlivých prvkov, t. j. tvarové funkcie musia byť derivovateľné až do rádu o jeden menší, ako je najvyšší rád derivácie vyskytujúci sa vo funkcionáli.
   b) musia zabezpečiť konvergenciu výsledkov pre neznámu φ, t. j. funkcionál Π sa približuje ku svojej limitnej hodnote, ak objem oblasti V sa blíži k nule.

   Existuje veľa funkcií, ktoré spĺňajú uvedené podmienky. Najčastejšie používané interpolačné funkcie sú lineárne polynómy, Lagrangeové polynómy atď.

4. Definovanie konštitutívneho vzťahu medzi akciami a reakciami riešeného poľa;

   Fyzikálne zákony obvykle určujú vzťah medzi akciami, ktoré na teleso pôsobia a reakciami, ktoré vznikajú v samotnom telese vplyvom ich pôsobenia. V nasledujúcej Tabuľke 1.1 sú uvedené akcie a reakcie pre niektoré typy inžinierskych úloh.

   Vzájomnú závislosť medzi mechanickými silami a premiestneniami vyjadruje Hookeov zákon. Prenos tepla vedením definuje Fourierov zákon. Závislosť akcií a reakcií v elektrickom poli popisuje Ohmov zákon. Závislosť medzi tlakom a rýchlosťou prúdenia vyjadruje Bernoulliho rovnica.

Tabuľka 1.1. Akcie a reakcie pre niektoré typy inžinierských úloh

Pole	Akcia	Reakcia
Silové	sila **F**	premiestnenie **u**
Teplotné	tepelný tok **P**	teplota **T**
Elektrické	elektrický prúd **I**	elektrický potenciál **V**
Prúdenie tekutín	tlak **p**	rýchlosť prúdenia **w**

5. Odvodenie prvkových rovníc;

   Prvková rovnica vyjadruje závislosť medzi akciami a reakciami v uzlových bodoch elementu. Táto závislosť je definovaná maticou konečného prvku poľa, v silovom poli je to matica tuhosti, v teplotnom poli je to matica tepelnej vodivosti, v elektrickom poli je to matica elektrickej vodivosti, v poli prúdenia je to matica odporu prúdenia.
   Matica konečného prvku obsahuje geometrické charakteristiky telesa a jeho materiálové vlastnosti. V silovom poli je to modul pružnosti, v teplotnom poli je to koeficient teplotnej vodivosti, v elektrickom poli je to elektrická vodivosť, v poli prúdenia tekutín je to viskozita. Prvkovú rovnicu získame spravidla minimalizáciou funkcionálu vyjadreným príslušným energetickým princípom daného poľa, napr. princípom minima potenciálnej energie. Prvková rovnica je algebraický systém rovníc (lineárny alebo nelineárny, stacionárny alebo časovo závislý).

6. Odvodenie rovníc MKP pre celú riešenú oblasť a ich riešenie pre primárne neznáme;

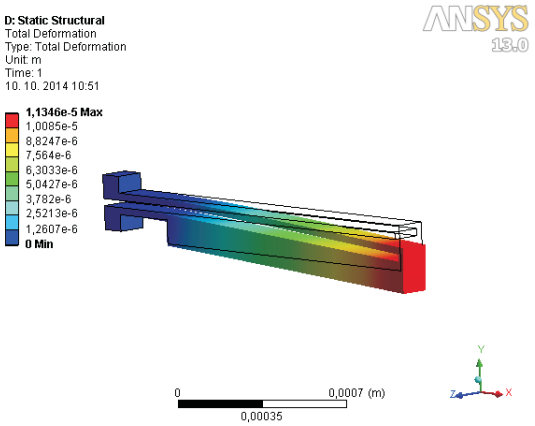
   Špeciálnou sumáciou prvkových rovníc, ktorá bude opísaná neskôr, dostaneme algebraický systém rovníc celej oblasti (telesa alebo sústavy telies). Ako už bolo spomínané, tento systém rovníc vyjadruje závislosť medzi primárnymi neznámymi v uzlových bodoch všetkých konečných prvkov diskretizujúcich riešenú oblasť, a akciami pôsobiacimi v daných uzlových bodoch. Táto vzájomná závislosť je vyjadrená prostredníctvom matice celého telesa, ktorá obsahuje matice jednotlivých konečných prvkov. Matica prvku, ako aj matica celého telesa (konštrukcie) je pozitívne definitná, symetrická a pásová, takže riešenie rovníc MKP je na počítači veľmi jednoduché a rýchle. Pred ich vyriešením treba ešte zohľadniť príslušné okrajové podmienky.

7. Výpočet sekundárnych neznámych;

   Ak sú primárne neznáme vypočítané, potom použitím prípustných fyzikálnych vzťahov vieme vypočítať potrebné sekundárne neznáme, ako sú mechanické napätia, hustotu tepelných tokov, prúdovú hustotu, tlak prúdiacej tekutiny a podobne.

8. Interpretácia výsledkov riešenia a optimalizácia riešenej úlohy;

   Výsledky analýz podáva Postprocesor programu MKP vo forme tabuliek, grafov, a grafických máp (izočiary, izoplochy atď.) Obr. 1.10. Úlohou riešiteľa je tieto výsledky klasifikovať a využiť ich na optimalizáciu riešeného problému. Táto veľmi náročná časť postupu riešenia pomocou MKP vyžaduje značnú odbornú erudovanosť riešiteľa.



Obr. 1.10. Deformácia aktuátora

Kapitola 2

Elastostatika kontinua a MKP

2.1 Cieľ kapitoly

Mechanické prvky a sústavy sa vyznačujú základnými mechanickými vlastnosťami: pružnosťou a pevnosťou.

a) *Pružnosť materiálu* je schopnosť materiálu nadobúdať po prerušení pôsobenia zaťažujúcich síl svoj pôvodný tvar.

b) *Pevnosť materiálu* je schopnosť materiálu odolávať pôsobeniu zaťažujúcich síl bez prerušenia.

Na rozdiel od statiky, kde sa materiál mechanických prvkov považuje za dokonale tuhý (čiže nedeformovateľný), pružný materiál účinkom vonkajších síl sa deformuje, pričom môže meniť svoj objem i tvar. Táto zmena sa nazýva *deformácia*. Hmotnému telesu schopnému sa deformovať hovoríme *poddajné teleso*, alebo tiež *poddajné kontinuum*. V mechanike poddajného telesa sa skúma jeho deformačná odozva na pôsobenie zaťažujúcich síl. Po zostavení matematického modelu daného konštrukčného prvku je jej cieľom navrhnúť jeho optimálne rozmery tak, aby nenastala porucha materiálu prekročením jeho pevnosti alebo neprimeranou deformáciou, čím bude zabezpečená jeho bezpečná prevádzka.

Cieľom tejto kapitoly je uviesť čitateľa do problematiky základných pojmov pružnosti a pevnosti pevných a poddajných telies, ktorá je základom pre implementáciu numerických metód výpočtovej mechaniky ako aj ich aplikáciu prostredníctvom komerčných softvérov na riešenie konkrétnych pevnostných a tuhostných úloh technickej a inžinierskej praxe.

2.2 Základné pojmy a rovnice elastostatiky kontinua

Materiál konštrukčných prvkov možno rozdeliť do dvoch skupín.

a) kryštalické

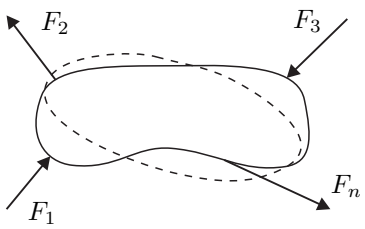
b) amorfné

Kryštalické materiály pozostávajú z veľkého počtu malých zŕn. Každé zrno tvorí sústava atómov pravidelne rozložených v radoch, ktoré tvoria kryštalickú mriežku. Naproti tomu amorfné materiály nemajú pravidelne usporiadané atómy. Ak by sme pristupovali ku skúmaniu účinku zaťažujúcich síl na poddajné teleso *mikroskopickým spôsobom*, narazili by sme na problémy spojené najmä so zložitosťou matematického modelu a s odlišnosťami od ideálneho kryštalického zloženia konštrukčných materiálov (dané nerovnomernosťou kryštalizácie, nečistotami a vmestkami v kryštalickej mriežke). Preto sa abstrahuje od skutočného zloženia hmotného telesa – aplikujeme *makroskopický prístup*. Hmotné poddajné teleso budeme považovať za *kontinuum*.

Koncept kontinua je odvodený z matematiky. Predpokladá sa, že systém reálnych čísiel je kontinuum. Medzi každými dvoma určitými číslami sú iné čísla, vlastne medzi uvažovanými dvoma číslami existuje nekonečne veľa reálnych čísiel. Intuitívne, čas môže byť reprezentovaný systémom reálnych čísiel t a trojdimenzionálny priestor je reprezentovaný troma systémami reálnych čísiel x, y, z. Čas a priestor identifikujeme ako štvorrozmerné kontinuum. Rozšírením pojmu kontinua na hmotu budeme hovoriť o spojitom rozdelení hmoty v priestore. Hmotné teleso bude takto pozostávať z hmotných bodov, z ktorých každý obsahuje veľké množstvo elementárnych častíc (atómov, elektrónov). Koncept materiálneho kontinua je matematická abstrakcia (idealizácia) reálneho sveta a je aplikovateľný na problémy, v ktorých jasnosť štruktúry sa môže zanedbať.

2.2.1 Rozdelenie síl pôsobiacich na poddajné kontinuum

Jednotlivé časti konštrukcií v spojení s inými tvoria konštrukčný celok, ktorý je buď v pokoji (napr. karoséria automobilu, závesy kolies, hriadele a ložiská, prevodovky a spojky, časti točivých elektrických strojov a pohonov, mechatronické a elektronické prvky a systémy atď.), alebo vykonávajú priamočiary rovnomerný pohyb. Pritom prostredníctvom vnútorných väzieb prenášajú vzájomne sily na seba. Sily, ktorými pôsobia ostatné časti konštrukcie na uvažovanú súčiastku, nazývame *vonkajšie sily*, alebo tiež *vonkajšie zaťaženie*. Vonkajšie zaťaženie možno ďalej deliť na *trvalé* a *dočasné*. Trvalé zaťaženie pôsobí po celý čas prevádzky konštrukcie, napr. jej vlastná tiaž a pod. Dočasné zaťaženie je len nejaký časový úsek, napr. tiaž posádky, sila vetra, zotrvačná a ostredivá sila, akčná sila a podobne. Podľa charakteru pôsobenia možno zaťaženie ešte rozdeliť na *statické* a *dynamické*. Statické zaťaženie vzrastá postupne od nuly až na vlastnú, menovitú hodnotu (napr. krútiaci moment elektromotora na hriadeľ). Pôsobenie dynamických síl vzniká spravidla v krátkej časovej perióde a pritom aj súčiastky, na ktoré dynamické sily pôsobia, sú obyčajne v pohybe.



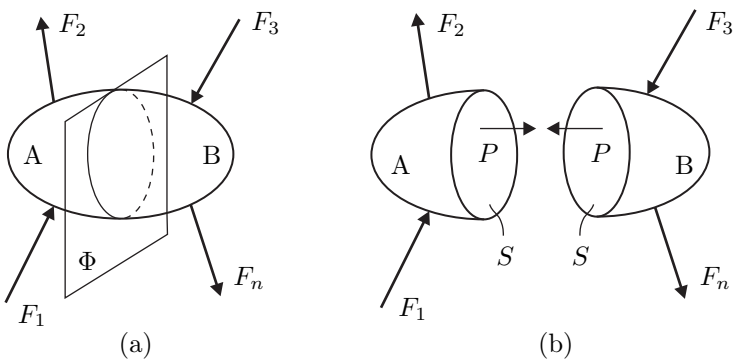
Obr. 2.1. Poddajné teleso

Na Obr. 2.1 vidíme poddajné kontinuum zaťažené silovou sústavou F_1, F_2, ..., F_n. Teleso, ktoré malo pred zaťažením tvar vyznačený plnou čiarou sa po zaťažení zdeformuje do tvaru vyznačeného čiarkovanou čiarou. Deformácia telesa je pre názornosť nakreslená prehnane zväčšená. Vo všetkých kapitolách tejto učebnice bude prijatý predpoklad vzniku nekonečne malých deformácií. Odozvou telesa na zaťažujúce sily je jeho deformácia. Ak zaťažujúce sily (akcie aj reakcie) prestanú pôsobiť, pružnosť materiálu spôsobí jeho návrat do pôvodného stavu. To znamená, že v prvkoch konštrukcie vznikajú pôsobením vonkajších síl *doplnkové vnútorné sily*, ktoré pôsobia proti úsiliu vonkajších síl porušiť konštrukčný prvok, alebo meniť jeho tvar. V ďalšom budeme tieto sily nazývať *vnútorné sily*. Keby sme teleso chápali mikroskopicky, atómy sa v mriežke udržiavajú vzájomne pôsobiacimi medziatómovými silami. Vplyvom vonkajších síl sa vzdialenosti medzi atómami menia (teleso sa deformuje), čo je spôsobené zmenou vzájomne pôsobiacich síl medzi atómami. Analogicky pri makroskopickom prístupe sa nachádzajú hmotné body v telese v rovnováhe. Ak začneme pôsobiť vonkajšími silami, hmotné body sa bránia vysunutiu zo svojej rovnovážnej polohy – vznikajú už spomenuté *vnútorné sily*. Tieto vnútorné sily sú, podobne ako pojem kontinua, matematickou abstrakciou, ktorú zaviedli Cauchy a Euler.

Aby sa dal číselne charakterizovať stupeň účinku vonkajších síl na deformovaný prvok, treba vedieť vypočítať veľkosť vnútorných síl. Na to sa v pružnosti a pevnosti používa metóda *jedného alebo viacerých myslených rezov*. Voľba ich počtu závisí od zložitosti riešenej úlohy.

2.2.2 Metóda mysleného rezu na určenie výslednice vnútorných síl

Metóda mysleného rezu tkvie v nasledujúcich úvahách: Teleso na Obr. 2.2a, ktoré je v statickej rovnováhe rozrežeme mysleným rovinným rezom Φ na dve konečné časti A a B.



Obr. 2.2. Metóda mysleného rezu

Pôsobením vonkajších síl sa obe časti telesa usilujú oddeliť a udržiavajú sa pohromade vzájomnými vnútornými silami pôsobiacimi medzi hmotnými bodmi, ktoré sú na oboch stranách mysleného rezu. Na Obr. 2.2b sú nakreslené výslednice týchto síl. Vnútorné sily pôsobiace na časť A od časti B a vnútorné sily pôsobiace na časť B od časti

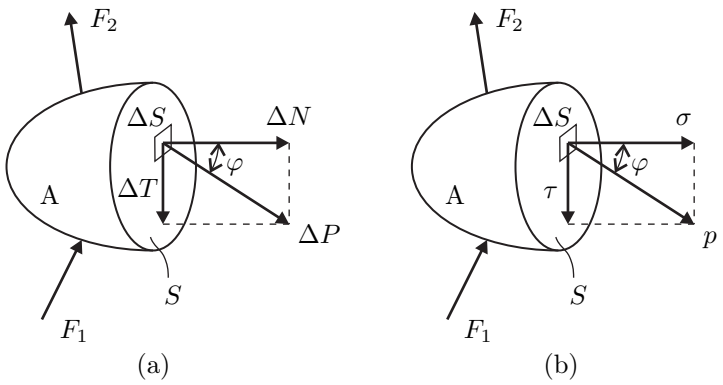
A sa podľa zákona akcie a reakcie sebe rovnajú (Cauchyho-Eulerov princíp). Ak má nastať rovnováha každej z odrezaných častí, musia byť vnútorné sily pôsobiace na časť A v rovnováhe s vonkajšími silami pôsobiacimi na túto časť a rovnako i na časti B. Výslednicu vnútorných síl P nazývame *vektorom napätia* a určíme ho zo statických podmienok rovnováhy vonkajších a vnútorných síl.

2.2.3 Normálové a tangenciálne (šmykové) napätie

Vnútorné sily sú vo všeobecnosti nepravidelne rozložené po priereze, takže statické podmienky rovnováhy nestačia na určenie rozloženia vnútorných síl v jednotlivých hmotných bodoch ležiacich v rovine mysleného rezu. Zo statických podmienok rovnováhy možno určiť len výslednicu vnútorných síl, t.j. vektor napätia P.
Aby sme mohli lepšie porovnávať účinok vnútorných síl v rôznych rezových plochách, zavádzame pomer vnútorných síl na jednotku prierezovej plochy, ktorý nazývame *mechanickým napätím.*

Vybratý hmotný bod si nahradíme pravouhlým elementárnym hranolčekom, ktorého jedna plocha sa nachádza v rovine rezu a jej veľkosť je ΔS, Obr. 2.3. Na tejto plôške pôsobí elementárna vnútorná sila ΔP, ktorá s normálou k rezovej rovine zviera uhol φ. Túto silu rozložíme do normály a tangenty k rezovej rovine. Potom podľa Obr. 2.3 platí:

$$\begin{aligned} \Delta N &= \Delta P \cos\varphi \\ \Delta T &= \Delta P \sin\varphi \end{aligned} \tag{2.1}$$



Obr. 2.3. Pojem mechanického napätia

Limita pomeru vnútorných síl ΔP, ΔN, ΔT k ploche ΔS sa nazýva napätie, jeho smer a zmysel sa zhoduje so smerom a zmyslom vnútornej sily a jeho rozmer je N.mm^{-2} (MPa), prípadne iné odvodené jednotky. Napätie budeme v ďalšom texte označovať písmenami našej, resp. gréckej abecedy. Označenie p budeme používať pre *napätie* ľubovolne sklonené k vyšetrovanej plôške, písmenom σ budeme označovať *normálové napätie*, ktoré je kolmé na rovinu rezu a písmenom τ *šmykové napätie*, ktoré leží v rovine rezu Obr. 2.3.

Jednotlivé napätia sú definované vzťahmi:

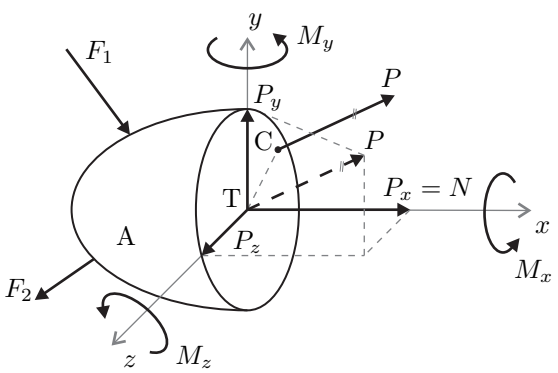
$$
\begin{aligned}
p &= \lim_{x\to 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{dP}{dS} \\
\sigma &= \lim_{x\to 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} = \frac{dN}{dS} \\
\tau &= \lim_{x\to 0} \frac{\Delta T}{\Delta S} = \frac{dT}{dS}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Normálovému napätiu priraďujeme tiež znamienko, a to: *kladné*, keď zmysel sily ΔN smeruje von z plochy rezu a nazývame ho napätím ťahovým. Ak je zmysel sily ΔN opačný, priraďujeme mu znamienko *záporné* a takéto napätie nazývame tlakové. Na orientácii šmykového napätia obvykle nezáleží, ale len na jeho veľkosti.
Iné napätie ako ťahové, tlakové alebo šmykové na plôške ΔS nie je mysliteľné. Ich smer a veľkosť závisí od vonkajšieho zaťaženia a od veľkosti a polohy plôšky ΔS. Pri každom druhu namáhania sa môžu vyskytovať iba tieto napätia, a to každé samostatne, alebo v ich kombinácii.
Z Obr. 2.3 je zrejmé, že:

$$
\sigma = p\cos\varphi \qquad \tau = p\sin\varphi \qquad p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \tag{2.3}
$$

2.2.4 Základné prípady namáhania

V bode C sme určili výslednicu vnútorných síl pre rezovú plochu S. Táto výslednica P je v statickej rovnováhe s vonkajšími silami, pôsobiacimi na časť telesa A, Obr. 2.4.



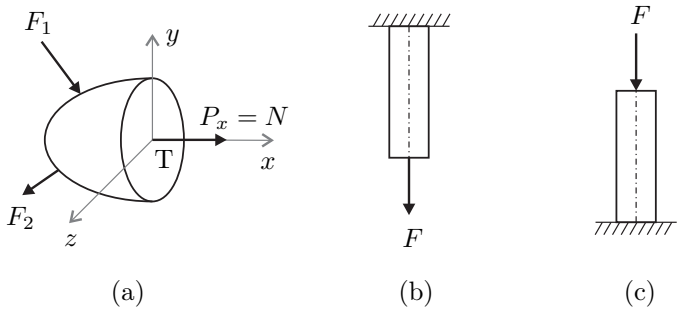
Obr. 2.4. Zložky výslednice vnútorných síl

Preložme vnútornú silu P do ťažiska T plochy prierezu S a rozložme ju do súradnicových osí x, y, z, z ktorých os x je kolmá na rezovú rovinu. Tieto zložky výslednej vnútornej sily sú na obrázku vyznačené P_x, P_y a P_z. Aby táto transformácia sily bola ekvivalentná, treba k preloženej sile P pripojiť dvojicu síl, ktorej zložky otáčavého účinku do súradných osí sú M_x, M_y, M_z. Tak sme dostali v ťažisku plochy prierezu šesť zložiek výslednice vnútorných síl (tri sily a tri momenty síl). Ak pôsobí v ťažisku plochy S viac zložiek výslednice vnútorných síl ako jedna, hovoríme o *kombinovanom* (*zloženom*) *namáhaní*. Ak pôsobí v uvažovanom reze len jedna z uvažovaných zložiek,

hovoríme o *jednoduchom* (*prostom*) *namáhaní*. Podľa toho rozoznávame päť základných (jednoduché, prosté, čisté) prípadov namáhaní: prostý ťah (tlak), prostý šmyk, prosté krútenie, prostý ohyb a vzper.

Prostý ťah (tlak)

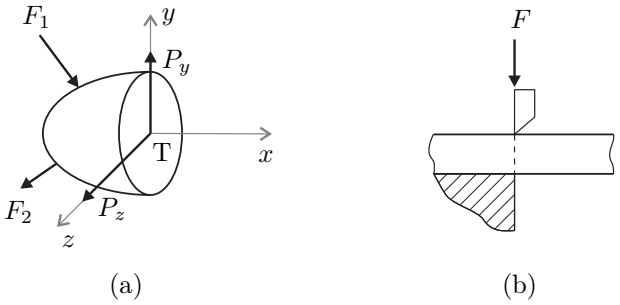
O prostom ťahu alebo tlaku hovoríme vtedy, ak v myslenom reze pôsobí len zložka výslednice vnútorných síl $P_x = N$ (Obr. 2.5a). Najjednoduchší prípad ťahového namáhania je tenká priama tyč, konštantného prierezu namáhaná osovou silou F (Obr. 2.5b). Najjednoduchší prípad tlakového namáhania je prípad podľa Obr. 2.5c. Pretože v myslenom reze pôsobí výslednica vnútorných síl na normále k prierezu, pri ťahu, resp. tlaku vzniká normálové napätie σ ($+\sigma$ pre ťah a -σ pre tlak). Takto sú namáhané napríklad prúty a prútové sústavy, vodiče a laná, mechanické prvky mechatronických systémov pospájaných navzájom kĺbmi a iné.



Obr. 2.5. Čistý ťah, tlak

Prostý šmyk

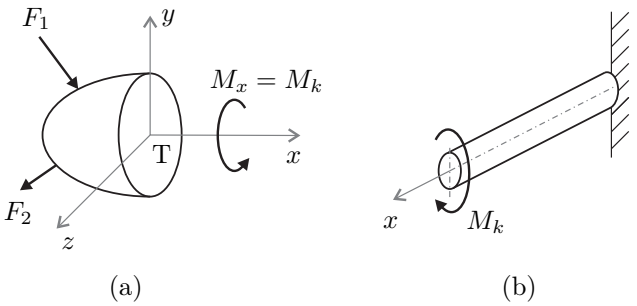
O prostom šmyku hovoríme vtedy, ak v myslenom reze pôsobia len zložky výslednice vnútorných síl P_y a P_z (Obr. 2.6a) alebo len jedna z nich. Výsledná šmyková sila v danom reze je daná vektorovým súčtom obidvoch zložiek. Najjednoduchší prípad šmykového namáhania je strihanie materiálu (Obr. 2.6b). Pretože výslednica vnútorných síl leží v myslenom reze, pri prostom šmyku vzniká šmykové napätie τ.



Obr. 2.6. Čistý šmyk

Prosté krútenie

O tomto druhu namáhania hovoríme vtedy, ak v myslenom reze zo všetkých možných zložiek pôsobí len moment $M_x = M_k$, ktorého rovina pôsobenia je totožná s rovinou rezu (Obr. 2.7a). Najjednoduchší prípad namáhania tohto druhu je krútenie tyče (hriadeľa) kruhového prierezu (Obr. 2.7b).

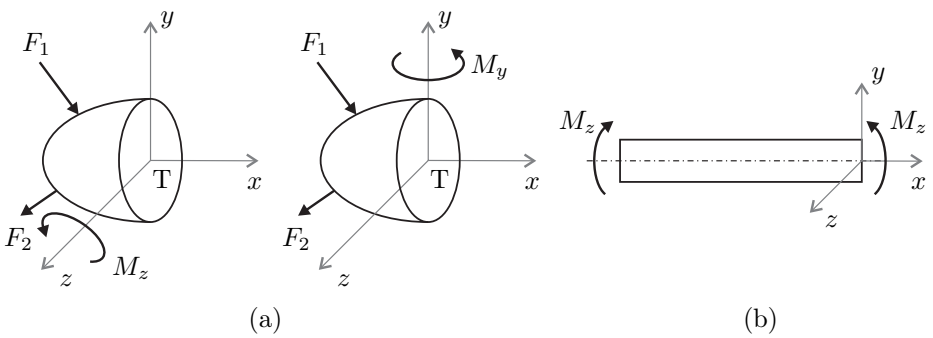


Obr. 2.7. Čistý krut

Krútením sú napr. namáhané hriadele a osi točivých strojov a pohonov.

Prostý ohyb

O prostom ohybe hovoríme vtedy, ak v myslenom reze pôsobí len moment M_y alebo len M_z Obr. 2.8a. Ak pôsobia obidve zložky súčasne, hovoríme spravidla o *šikmom ohybe.* Najjednoduchší prípad tohoto druhu namáhania je znázornený na Obr. 2.8b. Konštrukčné prvky prenášajúce ohybový moment nazývame nosníky.

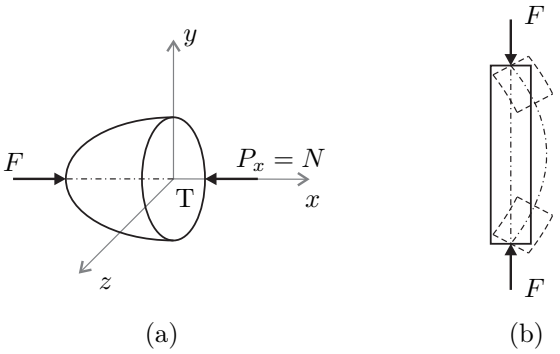


Obr. 2.8. Čistý ohyb

Vzper

Podobne ako pri prostom tlaku i v tomto prípade pôsobí v myslenom reze tlaková sila $P_x = N$ Obr. 2.9a. Ak priečny prierez tyče je proti jej dĺžke malý (štíhly prút), dôjde po prekročení určitej (kritickej) hodnoty osovej sily k vybočeniu priamej pozdĺžnej osi

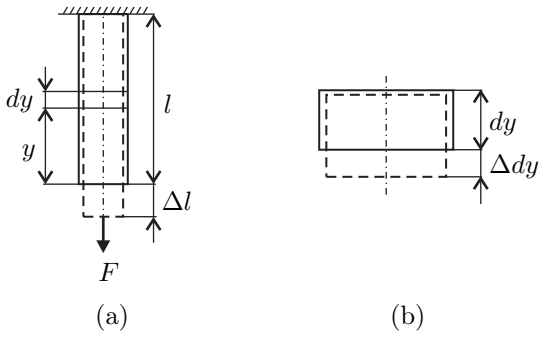
prúta, tyč sa prehne, až sa zlomí – stratí stabilitu Obr. 2.9b. Stratiť stabilitu môžu konštrukčné prvky (štíhle, tenkostenné) namáhané tlakovou silou, ako sú napríklad prúty a nosníky senzorových a aktuátorových systémov a iných mikro-elektro-mechanických prvkov.



Obr. 2.9. Vzper štíhleho prúta

2.2.5 Pomerné predĺženie a pomerné skosenie

Ak namáhame priamu tyč ťahom podľa Obr. 2.10a, pozorujeme, že tyč sa predlžuje a jej prierez sa zužuje. Zúženie prierezu tyče oproti jej predĺženiu býva zanedbateľné.



Obr. 2.10. Namáhanie osovou silou

Dvoma rovnobežnými myslenými rezmi vyberme z tyče valček nekonečne malej výšky dy vo vzdialenosti y (Obr. 2.10b) od spodného okraja tyče. Zaťažením tyče sa valček predĺži o hodnotu Δdy.
Pomer

$$\varepsilon = \frac{\Delta dy}{dy} \tag{2.4}$$

nazývame *pomerné predĺženie* tyče. Je to predĺženie pripadajúce na jednotku dĺžky tyče. Ak je pomerné predĺženie vo všetkých bodoch prierezu a vo všetkých priečnych

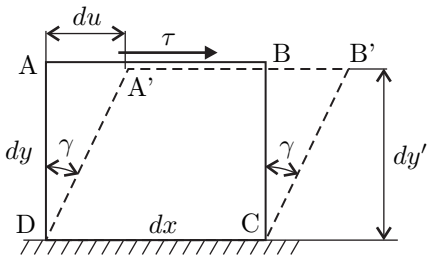
prierezoch rovnaké, možno celkové predĺženie tyče vyjadriť vzťahom

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dy = \int_0^l \varepsilon \, dy = \varepsilon \, l \tag{2.5}$$

Odkiaľ

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{2.6}$$

Ako vidieť z týchto rovníc pomerné predĺženie je veličina bezrozmerná.
Uvažujeme elementárnu časť plochy prierezu ABCD s rozmermi dx, dy podľa Obr. 2.11, ktorá sa vplyvom šmykových napätí τ pretvorí, ako je to na obrázku vyznačené.



Obr. 2.11. Pomerné skosenie

Ak je toto pretvorenie malé, môžeme zmenu dĺžky dy zanedbať. Posunutie du môžeme potom vyjadriť vzťahom

$$du = \tan \gamma \, dy \tag{2.7}$$

pretože

$$dy' \cong dy \tag{2.8}$$

Keďže uhol γ je malý, možno písať:

$$\tan \gamma \cong \gamma \tag{2.9}$$

takže bude

$$du = \gamma \, dy \tag{2.10}$$

a z toho pomer

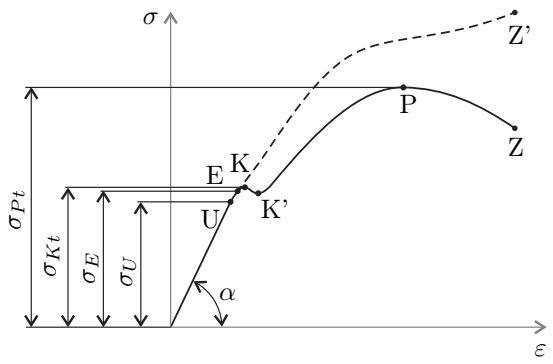
$$\gamma = \frac{du}{dy} \tag{2.11}$$

nazývame *pomerné skosenie* (tiež zmena pravého uhla v elementárnom hranolčeku). Tak ako pomerné predĺženie, aj táto veličina je bezrozmerná. Pomerné predĺženie a skosenie sú základné zložky deformácie telesa.

2.2.6 Pracovný diagram trhacej skúšky

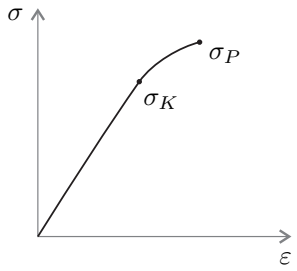
Informácie o pružnosti a pevnosti materiálu nám dávajú *skúšky mechanických vlastností.* Jedna z takýchto skúšok je trhacia skúška ťahom. Skúšobná tyč normalizovaného tvaru a rozmerov sa upne do čeľustí trhacieho stroja a postupne sa plynule zaťažuje prostým ťahom. Pritom sa automaticky zaznamenáva závislosť medzi zaťažením a príslušným predĺžením skúšobnej tyče. Pri známych rozmeroch skúšobnej tyče (počiatočný prierez S, dĺžka l) možno získať závislosť pomerného predĺženia od napätia.

Na Obr. 2.12 je nakreslený diagram napätia a pomerného predĺženia "mäkkej" konštrukčnej ocele. Ako vidieť na tomto obrázku, časť závislosti $\sigma - \varepsilon$ až po bod U je lineárna, čiže napätie je úmerné pomernému predĺženiu. Napätie prislúchajúce bodu U nazývame *medza úmernosti* σ_U. Pri skúške možno nájsť také napätie, po hodnotu ktorého bude mať tyč len pružné deformácie. Toto napätie sa nazýva *medza pružnosti* σ_E. Bod E leží spravidla vyššie, ale veľmi blízko k bodu U. Ak skúšobnú tyč odľahčíme v stave pod medzou pružnosti, pružné (elastické) deformácie vymiznú a skúšobná tyčka nadobudne svoj pôvodný tvar. Po prekročení medze pružnosti začnú vznikať trvalé (plastické) deformácie. V bode K sa začne skúšobná tyč predlžovať bez toho, že by napätie stúpalo. Napätie prislúchajúce bodu K (resp. K') nazývame *horná* (resp. *spodná*) *medza klzu.* Veľkosť elastoplastických deformácií pri dosiahnutí medze klzu pri konštrukčných oceliach neprekračuje hodnotu 0,001 $\sim$ 0,003.



Obr. 2.12. Skúška v ťahu

Najväčšia hodnota napätia pri skúške je daná napätím σ_{Pt} (bod P) – *medza pevnosti v ťahu.* Konečné porušenie nastáva však pri napätí, ktoré prislúcha bodu Z. Na Obr. 2.12 je čiarkovanou čiarou vyznačený priebeh tej istej závislosti, vzťahovaný však na okamžitý prierez skúšobnej vzorky. Materiál, pri ktorom nastáva porucha po značných elastoplastických deformáciách, sa nazýva *húževnatý.*
Na Obr. 2.13 je znázornený diagram ťahovej skúšky liatiny. Tento materiál má veľmi nízku medzu úmernosti a nemá jasne vyhranenú medzu klzu. Medza klzu sa nachádza blízko medze pevnosti materiálu. Takýto materiál pri ktorom nastane porucha bez významnejších elastoplastických deformácií, nazývame *krehký.* Skrehnúť môže aj pôvodne húževnatý materiál, napr. vplyvom teplotného namáhania. Materiál krehne aj vplyvom radiačného žiarenia. Typický krehký materiál je tiež sklo, keramika a iné.



Obr. 2.13. Krehký materiál

2.2.7 Hookov zákon

Lineárnu závislosť medzi napätím a deformáciou do medze úmernosti σ_U definoval roku 1860 Robert Hooke jedným zo základných zákonov pružnosti a pevnosti:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{konšt.} = E = \tan\alpha \quad \text{alebo} \quad \sigma = E\,\varepsilon \tag{2.12}$$

ktorý nazývame Hookov zákon.

Konštantu úmernosti E nazývame *modul pružnosti v ťahu*. Modul pružnosti charakterizuje mechanickú vlastnosť – pružnosť materiálu a je závislý od druhu materiálu skúšobnej tyčky. Pretože pomerné predĺženie ε je bezrozmerná veličina, má modul pružnosti v ťahu rozmer napätia, teda [N.m^{-2} = 1 Pa] alebo [N.mm^{-2}=1 MPa = 10^6 Pa].

Tabuľka 2.1. Modul pružnosti E vybraných materiálov

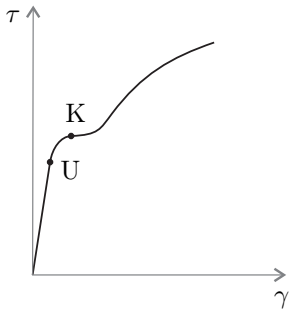
materiál	Modul pružnosti E [MPa]
oceľ	210000
hliník	78000
sklenná výstuž optických vlákien	50000
nikel	223950
zirkón	244270
alumina	69000
titanium-carbid	480000
kremík	130000 - 188000

Moduly pružnosti vybraných materiálov sú uvedené v Tabuľke 2.1. Modul pružnosti rôznych materiálov je závislý od technológií výroby a jeho ďalšieho spracovania, ako aj od teploty. Fyzikálne vlastnosti materiálov možno nájsť v materiálových listoch uvedených bežne aj na internete.

Ak namáhame skúšobnú vzorku prostým šmykom, možno skúškami určiť vzťah medzi šmykovým napätím τ a pomerným skosením γ. Na Obr. 2.14 je nakreslený diagram konštrukčnej ocele, ktorý sa zistil pri namáhaní tenkostennej rúrky prostým krútením.

Diagram sa podobá diagramu skúšok v ťahu a možno na ňom vidieť medzu úmernosti τ_U (bod U) a medzu klzu τ_K (bod K). Po medzu úmernosti platí vzťah

$$\tau = G\,\gamma \tag{2.13}$$



Obr. 2.14. Závislosť medzi šmykovým napätím a pomerným skosením

kde G je materiálová konštanta a nazýva sa *modul pružnosti v šmyku*. Pretože γ je bezrozmerná veličina, má i tento modul (tak ako aj E) rozmer napätia. Hodnota modulu pružnosti v šmyku pre oceľ je $G = 0,8 \times 10^5\,\mathrm{N.mm^{-2}} = 0,8 \times 10^{11}\,\mathrm{N.m^{-2}}$.

Ak je modul pružnosti materiálu v danom bode vo všetkých smeroch rovnaký, hovoríme, že látka je *izotropná*. Materiály používané v konštrukčnej praxi považujeme spravidla za *izotropné* a *homogénne*, t. j. také, ktoré majú vo všetkých smeroch a bodoch rovnaké materiálové vlastnosti. V opačnom prípade hovoríme o *anizotropných látkach*. Modul pružnosti, ako aj iné vlastnosti materiálov, možno nájsť na web stránkach, napr. aj na stránke www.mems.org.

2.2.8 Priečne zúženie

Súčasne s predĺžením skúšobnej tyče v smere pozdĺžnej osi pozorujeme pri prostom ťahu aj skrátenie jej priečnych rozmerov. Toto skrátenie je, ako ukázali skúšky, v rozsahu platnosti Hookovho zákona pri izotropných materiáloch úmerné napätiu σ, a tým i osovému pomernému predĺženiu ε_x. Keď vytkneme zo skúšobnej tyče elementárny hranolček (EH) podľa Obr. 2.15, potom možno priečne zúženia v smere y a z opísať rovnicami

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{m\,E} = -\nu\frac{\sigma}{E} = \varepsilon_z \tag{2.14}$$

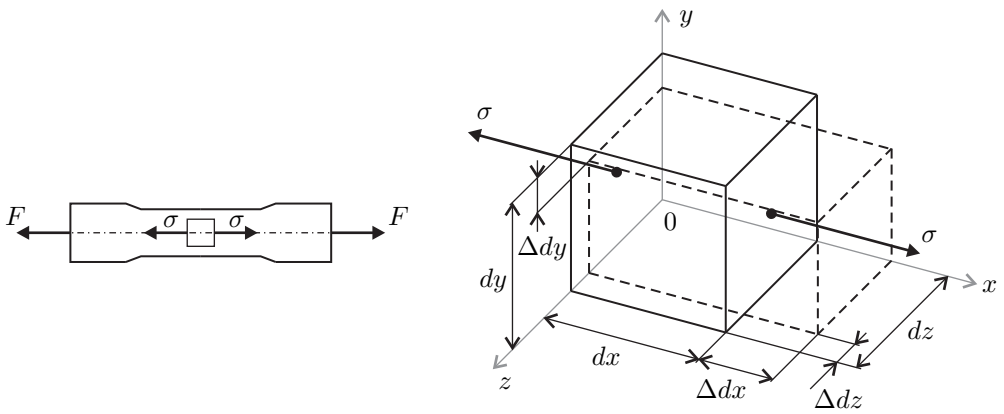
Súčiniteľa m nazývame *Poissonova konštanta*. Často, najmä v numerických metódach, sa používa jej prevrátená hodnota, ktorú nazývame *Poissonovým číslom* a označuje sa písmenom gréckej abecedy ν. Pre oceľ je Poissonova konštanta

$$m = \frac{10}{3} \tag{2.15}$$

resp. Poissonovo číslo

$$\nu = \frac{1}{m} = 0,3 \tag{2.16}$$

Poissonové číslo ν i konštanta m sú bezrozmerné veličiny, pričom ich hodnota závisí od typu materiálu. Dá sa dokázať, že $\nu \in (0; 0,5)$, resp. $m \in (0; 2)$.



Obr. 2.15. Deformácia pri jednoosovej napätosti

2.2.9 Energia napätosti

Energiou napätosti rozumieme energiu, ktorá sa skumuluje v pôvodne nezaťaženom telese, keď nadobudne určité pretvorenie, a to od všetkých vnútorných síl pôsobiacich na nekonečne malé elementy telesa. Táto energia – za predpokladu platnosti Hookovho zákona – sa rovná práci vonkajších síl, vykonanou pri pretvorení telesa. Vonkajšie a vnútorné sily musia byť pritom v statickej rovnováhe.

Deformačnú prácu vonkajších síl – podľa definície známej z fyziky – určíme podľa vzťahu

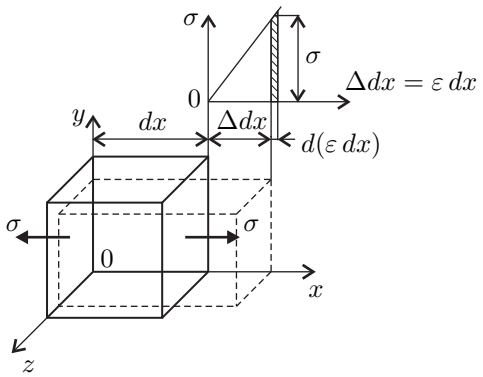
$$W = \int_s F\,ds \tag{2.17}$$

kde F je zaťažujúca sila, ktorá pôsobí na dráhe s. Energiu napätosti určíme osobitne pre normálové a osobitne pre šmykové napätia, pričom využijeme horeuvedený vzťah.

Energia napätosti normálových napätí

Pri namáhaní normálovým napätím v smere osi x vzniká deformácia elementárneho hranola podľa Obr. 2.16. Za predpokladu platnosti Hookovho zákona je závislosť medzi napätím σ a pretvorením ε lineárna.
Vnútorná sila pôsobiaca na plochu dS elementárneho hranolčeka bude $dF = \sigma\,dS$. Potom elementárna deformačná práca dW_σ, ktorá sa rovná energii napätosti dA_σ elementárneho hranolčeka, bude

$$dW_\sigma = dA_\sigma = \int_s dF\,ds = \int_0^{\Delta dx} \sigma\,dS\,d(\Delta dx) = \int_0^{\varepsilon\,dx} \sigma\,dy\,dz\,d(\varepsilon dx) \tag{2.18}$$



Obr. 2.16. Energia napätosti normálových napätí

Pretože $\sigma = E\,\varepsilon$ a dx, dy a dz sú konštanty, možno túto rovnicu upraviť do tvaru

$$dA_\sigma = dy\,dy\,E\int\limits_0^{\varepsilon\,dx}\varepsilon\,d(\varepsilon\,dx) = dy\,dz\frac{E}{dx}\int\limits_0^{\varepsilon\,dx}\varepsilon\,dx\,d(\varepsilon\,dx) = dy\,dz\frac{E}{dx}(\varepsilon\,dx)^2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}E\,\varepsilon^2\,dV \tag{2.19}$$

kde $dV = dx\,dy\,dz$ je objem elementu. Celková energia napätosti potom je

$$A_\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_V E\,\varepsilon^2\,dV = \frac{1}{2}\int\limits_V \sigma\,\varepsilon\,dV \tag{2.20}$$

Poznámka: Energia napätosti A_σ je vždy kladná, i keď pôjde o namáhanie v tlaku. Vtedy

$$A_\sigma = \frac{1}{2}\int\limits_V (-\sigma)(-\varepsilon)\,dV = \frac{1}{2}\int\limits_V \sigma\,\varepsilon\,dV \tag{2.21}$$

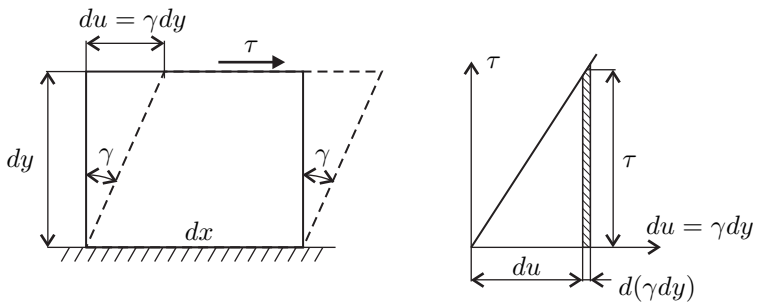
Energia napätosti šmykových napätí

Podobne ako pri normálových napätiach, možno vyjadriť energiu napätosti šmykových napätí (Obr. 2.17)

$$A_\tau = \frac{1}{2}\int\limits_V \tau\,\gamma\,dV \tag{2.22}$$

Celková energia napätosti v danom telese je vo všeobecnom prípade daná súčtom energie napätosti normálových a šmykových napätí

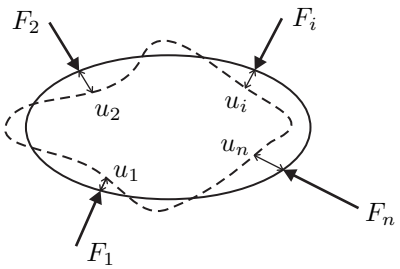
$$A = A_\sigma + A_\tau \tag{2.23}$$



Obr. 2.17. Energia napätosti šmykových napätí

2.2.10 Castiglianova veta

Uvažujeme poddajné teleso, ktoré je zaťažené rovnovážnou silovou sústavou F_1, F_2, ..., F_i,..., F_n (Obr. 2.18).



Obr. 2.18. Castiglianova veta

Pôsobiská vonkajších síl na povrchu telesa sa pri pretvorení telesa posunú o hodnoty u_1, u_2,..., u_i,..., u_n. Pretože napätia σ a τ sú v konečnom dôsledku pre teleso daných rozmerov funkciou zaťažujúcich síl, bude aj celková energia napätosti funkciou síl $A = f(F_1, F_2, ..., F_i, ..., F_n)$. Ak zväčšíme napr. silu F_1 o veľmi malú hodnotu dF_i, zväčší sa posunutie o du_i a energia napätosti o hodnotu

$$dA = \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i \tag{2.24}$$

takže energia napätosti bude

$$A + dA = A + \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i = (F_i + dF_i)(u_i + du_i) = F_i(u_i + du_i) + dF_i\, u_i + dF_i\, du_i \tag{2.25}$$

kde A je práca sily F_i na posunutiach $(u_i + du_i)$, a súčin dvoch malých veličín $dF_i\, du_i$ zanedbáme. Potom

$$A + \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i = A + u_i\, dF_i \tag{2.26}$$

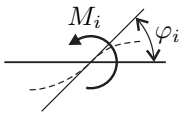
resp.

$$u_i = \frac{\partial A}{\partial F_i} \tag{2.27}$$

Výsledná rovnica je matematické vyjadrenie prvej Castiglianovej vety, podľa ktorej posunutie pôsobiska ľubovoľnej sily pri deformácii telesa (za predpokladu platnosti Hookovho zákona) sa rovná parciálnej derivácii celkovej energie napätosti podľa tejto sily. Zmysel posunutia sily u_i súhlasí so zmyslom sily F_i. Analogický prístup sa používa pri odvádzaní rovníc metódy konečných prvkov z princípu minima potenciálnej energie.

Poznámka: 1. Castiglianova veta vyžaduje taktiež platnosť *zákona superpozície účinkov*, ktorý si vysvetlíme neskôr. Zákon superpozície účinkov hovorí: *Ak na teleso pôsobí sústava vonkajších síl, potom výsledný napäťový a deformačný účinok sa rovná súčtu účinkov od jednotlivých síl, pričom nezáleží na poradí pôsobiacich síl.*

Pri odvádzaní tejto vety sme mohli však znakom F_i označiť aj moment točivej dvojice síl M_i a znakom u_i zase príslušné natočenie φ_i (Obr. 2.19).



Obr. 2.19. Uhol natočenia

Postup i výsledok by boli rovnaké a preto možno tiež písať:

$$\varphi_i = \frac{\partial A}{\partial M_i} \tag{2.28}$$

1. Castiglianova veta sa využíva najmä v analytických metódach výpočtu deformácie telesa v tvare jednoduchšej prútovej či nosníkovej konštrukcie, kde možno celkovú energiu napätosti vyjadriť v uzatvorenom tvare. Treba pripomenúť existenciu aj 2. Castiglianovej vety, ktorá sa používa pri analytickom výpočte staticky neurčitých väzbových reakcií.

2.2.11 Miera bezpečnosti a dovolené namáhanie

Trhacia skúška v ťahu nám dáva dôležité údaje o mechanických vlastnostiach materiálu. Ak z nej poznáme medzu klzu a medzu pevnosti materiálu, môžeme určiť pre každú technickú úlohu veľkosť mechanického napätia, ktoré môžeme pokladať za bezpečné. Toto prípustné napätie voláme *dovolené namáhanie*. Pri voľbe dovoleného namáhania pre oceľ si treba uvedomiť, že tento materiál pri napätiach pod medzou úmernosti môžeme považovať za dokonale pružný a pri napätiach nad touto medzou dochádza k trvalému plastickému pretvoreniu. Ak chceme pripustiť len pružné deformácie, dovolené namáhanie musí byť nižšie ako je medza úmernosti daného materiálu. Pretože zisťovanie tejto medze je dosť obtiažne a jej poloha závisí od presnosti merania, berieme na určenie dovoleného namáhania materiálu obyčajne medzu klzu alebo medzu pevnosti. Veľkosť dovoleného namáhania potom určujeme podľa rovníc

$$\sigma_{dov} = \frac{\sigma_K}{s_K} \qquad \text{resp.} \qquad \sigma_{dov} = \frac{\sigma_P}{s_P} \tag{2.29}$$

kde s_K, resp. s_P sú miery bezpečnosti vzhľadom na medzu klzu σ_K, resp. na medzu pevnosti σ_P.

Pri konštrukčných oceliach a iných húževnatých materiáloch berieme obvykle za základ na výpočet dovoleného namáhania medzu klzu σ_K. Pri statickom namáhaní pritom uvažujeme mieru bezpečnosti $s_K \in (1,4 \sim 1,6)$. Pre krehké materiály (liatinu a pod.) berieme za základ na určenie dovoleného namáhania medzu pevnosti σ_{Pt}. Mieru bezpečnosti volíme v závislosti od presnosti zvoleného matematického modelu danej konštrukcie, ako aj metódy riešenia homogenity použitých látok. Pre mnohé konštrukcie sú hodnoty miery bezpečnosti určené normami STN, resp. EN.

Podľa rovnakých metód volíme dovolené namáhanie v šmyku

$$\tau_{dov} = \frac{\tau_K}{s_K} \qquad \text{resp.} \qquad \tau_{dov} = \frac{\tau_P}{s_P} \tag{2.30}$$

Vzájomný vzťah medzi σ_{dov} a τ_{dov} možno určiť pomocou hypotéz pevnosti. Pre húževnaté materiály je pomer $\frac{\sigma_{dov}}{\tau_{dov}} \cong 0,6$. Je zrejmé, že ak súčiastka má pracovať s príslušnou bezpečnosťou, potom pre príslušný základný prípad namáhania musí byť splnená *pevnostná podmienka*

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{dov} \tag{2.31}$$

alebo

$$\tau_{max} \leq \tau_{dov} \tag{2.32}$$

kde σ_{max}, resp. τ_{max} sú maximálne hodnoty napätia v najviac namáhanom priereze, či v bode mechanického prvku. Ak je mechanický prvok namáhaný kombinovaným (zloženým) spôsobom, keď v hmotných bodoch vznikajú súčasne normálové aj šmykové napätia, potom má pevnostná podmienka tvar:

$$\sigma_r \leq \sigma_{dov} \tag{2.33}$$

Redukované (porovnávacie) napätie σ_r sa vypočíta s príslušnej hypotézy napätia pre daný stav zloženej napätosti. Predstavuje fiktívnu hodnotu napätia v bode telesa pri kombinovanom namáhaní pretransformovanú na jednoosovú napätosť v čistom ťahu (tlaku).

2.2.12 Napätosť a deformácia v bode telesa

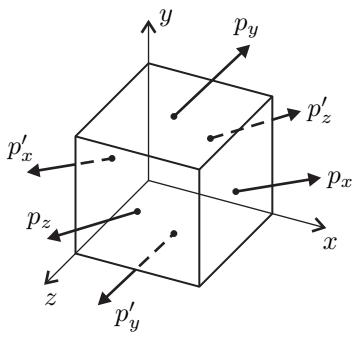
Pojem napätosti v bode telesa

Uvažujme hmotné kontinuum zaťažené vonkajšími silami. Zodpovedajúce hmotné body vo vnútri telesa pôsobia vzájomne na seba plošnými silami, ktoré nazývame vektor napätia. Napätie p v ľubovoľnom bode telesa bude funkciou veľkosti plôšky, na ktorej pôsobí vektor napätia, jej orientácie vzhľadom na vzťažný súradnicový systém a od polohy uvažovaného hmotného bodu. Orientácia sledovanej plôšky "hmotného bodu" je daná voľbou rezovej roviny. Keďže daným bodom možno preložiť nekonečný počet rezových rovín, v danom bode máme nekonečný počet výsledníc vnútorných síl. *Napätosť v bode telesa* je mechanický stav, daný súhrnom napätí v jednotlivých rezových rovinách, ktoré možno daným bodom preložiť. Vzhľadom na tenzorové vlastnosti napätia je napätosť v bode dostatočne určená, ak poznáme napätia, pôsobiace v rovinách elementárneho hranolčeka (fyzikálny model hmotného bodu).

Napätosť vo všeobecnosti delíme na:

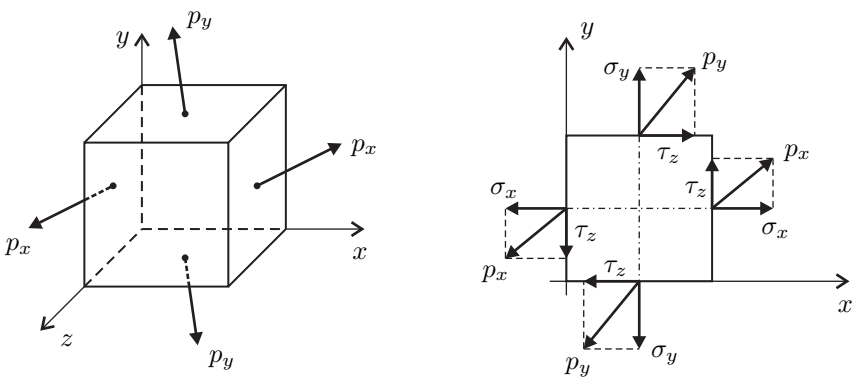
1. priestorovú (trojosovú),
2. rovinnú (dvojosovú),
3. priamkovú (jednoosovú).

Na určenie druhu napätosti v bode telesa, spôsobenom vonkajšími silami, uvažujme elementárny hranol dx, dy, dz (Obr. 2.20). Účinok odstránených častí nahradíme vnútornými silami.



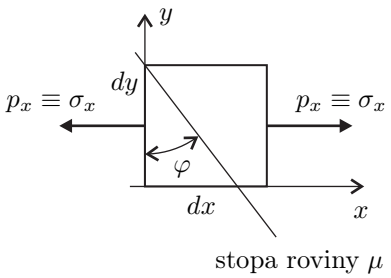
Obr. 2.20. Napätosť v bode telesa

Napätie môže byť vo všeobecnosti rozložené po priereze nerovnomerne, no na stenách elementárneho hranola toto rozloženie môžeme pokladať za rovnomerné. Vnútorné sily pripadajúce na jednotku plochy, teda vektory napätia, prechádzajú ťažiskami príslušných plôch. Z podmienok rovnováhy hranola je zrejmé, že $p_x = p'_x$, $p_y = p'_y$, $p_z = p'_z$. Ak sú všetky napätia nenulové, ide o *priestorovú napätosť*. Ak nájdeme polohu elementárneho hranola v telese tak, že v dvoch protiľahlých stenách budú napätia (napr. p_z) rovné nule (Obr. 2.21) a v ostatných stenách sú napätia nenulové, ide o *napätosť rovinnú*.



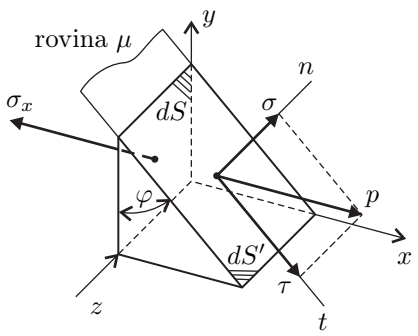
Obr. 2.21. Rovinná napätosť

Ak nájdeme takú polohu elementárneho hranola v bode telese, aby napr. p_y a p_z boli rovné nule (Obr. 2.22), musí byť $p_x = \sigma_x$, potom hovoríme o *priamkovej napätosti.*



Obr. 2.22. Jednoosová napätosť

Z uvedeného vyplýva, že priamková napätosť je špeciálnym prípadom rovinnej resp. priestorovej napätosti. Ďalej si ukážeme, že ak poznáme napätia v rovinách elementárneho hranola, potom možno z nich určiť napätia v ľubovoľnej inej rovine, prechádzajúcej daným bodom.



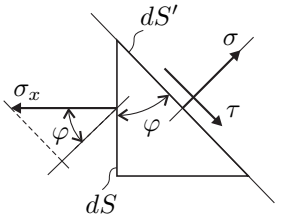
Obr. 2.23. Určenie σ a τ v rovine μ jednoosovej napätosti

Jednoosová napätosť

Úlohou bude z napätia σ_x určiť napätia v ľubovoľnej rovine μ, ktorá prechádza daným bodom. To nám potom umožní klasifikovať napätosť v danom bode a určiť roviny, v ktorých sú napätia extremálne. Elementárny hranol rozrežeme rovinnou μ (Obr. 2.23 a 2.24). Z podmienok rovnováhy vnútorných síl elementu (Obr. 2.24) do smeru normálových a šmykových napätí dostaneme

$$\begin{aligned} \sum F_n = 0: &\quad \sigma\, dS' - \sigma_x \cos\varphi\, dS = 0 \\ \sum F_t = 0: &\quad \tau\, dS' - \sigma_x \sin\varphi\, dS = 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Pretože $dS' = \dfrac{dS}{\cos\varphi}$, napätia v rovine μ budú: $\sigma = \sigma_x \cos^2\varphi$ a $\tau = \sigma_x \sin\varphi \cos\varphi$.



Obr. 2.24. Rovnováha vnútorných síl

Ak použijeme vzťahy

$$\begin{aligned} \cos^2\varphi &= \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} \\ \sin\varphi\cos\varphi &= \frac{\sin 2\varphi}{2} \end{aligned} \tag{2.35}$$

potom

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\varphi \\ \tau &= \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\varphi \end{aligned} \tag{2.36}$$

Keďže v týchto rovniciach nevystupuje plocha dS a ani žiadna materiálová konštanta, napätie σ a τ závisí len od σ_x a uhla φ. Hľadaním extrému pre napätie σ zistíme, že normálové napätie je najväčšie v rovine kolmej na $\sigma(\varphi = 0)$

$$[\sigma]_{\varphi=0} = \sigma_{max} = \sigma_x \tag{2.37}$$

a minimálne v rovine na ňu kolmej $\sigma(\varphi = 90°)$

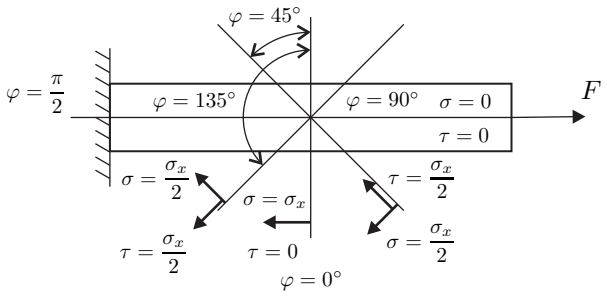
$$[\sigma]_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \sigma_{min} = 0 \tag{2.38}$$

V týchto rovinách sa šmykové napätie rovná 0. Naproti tomu šmykové napätie je maximálne v rovinách určených uhlami $\varphi = 45°$, resp. $\varphi = 135°$

$$[\tau]_{\varphi=\frac{\pi}{4}} = [\tau]_{\varphi=\frac{3\pi}{4}} = \tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2} \tag{2.39}$$

pričom normálové napätie tam nie je nulové. Znázornenie priamkovej napätosti pri čistom ťahu (tlaku) je znázornené na Obr. 2.25. Z veľkosti napätia v jednotlivých rovinách je zrejmá voľba rezovej roviny (kolmá na osové sily) pri namáhaní osovými silami. V tejto rovine je napätie maximálne, a keď nemá nastať porušenie tyče, potom

$$\sigma_{max} = \sigma_x \leq \sigma_{dov} \tag{2.40}$$



Obr. 2.25. Napätie σ a τ vo vybratých rovinách

Mohrova kružnica jednoosovej napätosti

Priebeh napätia σ a τ v rezových rovinách v závislosti od uhla φ možno znázorniť graficky, keď rovnice prepíšeme na tvar

$$\begin{aligned} \sigma - \frac{\sigma_x}{2} &= \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\varphi \\ \tau &= \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\varphi \end{aligned} \tag{2.41}$$

Po umocnení a sčítaní týchto rovníc dostaneme:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 \tag{2.42}$$

Ak vo zvolenom súradnicovom systéme vynášame na os x napätia σ a na os y napätia τ, potom výsledná rovnica je rovnicou kružnice

$$(x - m)^2 + y^2 = R^2 \tag{2.43}$$

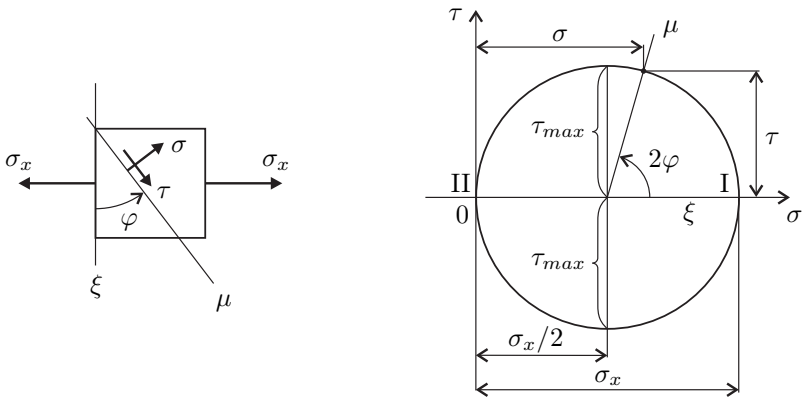
ktorej stred leží na osi σ vo vzdialenosti $m = \frac{\sigma_x}{2}$ od počiatku súradnicového systému, má polomer $R = \frac{\sigma_x}{2}$. Túto kružnicu nazývame Mohrovou kružnicou jednoosovej napätosti (Obr. 2.26). Medzi elementárnym hranolčekom a Mohrovou kružnicou platí táto závislosť:
Každej rezovej rovine elementárneho hranola zodpovedá na Mohrovej kružnici jednojednoznačne jeden bod, ktorého súradnice sú hodnotami napätia σ a τ v príslušnej rovine.
Postup grafického riešenia napätia σ a τ v ľubovoľnej rovine μ je takýto:

1. Pre dané σ_x zostrojíme Mohrovu kružnicu (Obr. 2.26).

2. Od bodu na kružnici, ktorý zodpovedá rezu ξ v elementárnom hranole, nanesieme stredový uhol 2φ v rovnakom zmysle, ako v elementárnom hranole (vždy od ξ ku μ).

3. Sprievodič stredového uhla 2φ vytína na Mohrovej kružnici bod μ, ktorého súradnice určujú v príslušnej mierke veľkosť napätí σ a τ.

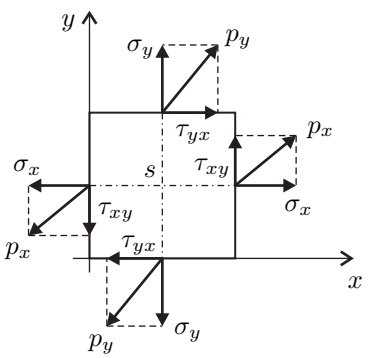
Body I a II predstavujú polohu 1. a 2. hlavnej roviny jednoosovej napätosti. Im prislúchajú prvé hlavné napätie $\sigma_I = \sigma_x$ a druhé hlavné napätie jednoosovej napätosti $\sigma_{II} = 0$. Hlavné roviny napätosti sú v bode telesa na seba kolmé.
Mohrova kružnica čistého ťahu (Obr. 2.25) je znázornená na Obr. 2.26.



Obr. 2.26. Mohrova kružnica jednoosovej napätosti

Rovinná (dvojosová) napätosť

Uvažujme rovinnú napätosť zadanú napätiami p_x a p_y ($p_z = 0$) podľa Obr. 2.27.



Obr. 2.27. Rovinná napätosť

Tieto napätia rozložíme do smerov súradnicových osí. Dostaneme tak normálové napätia σ_x a σ_y a šmykové napätia τ_{xy}, τ_{yx}. Prvý index šmykového napätia, napr. τ_{xy}, značí, že pôsobí na plôške kolmej na os x. Druhý index označuje smer pôsobenia napätia.
Z momentovej podmienky rovnováhy vnútorných síl k bodu s dostaneme:

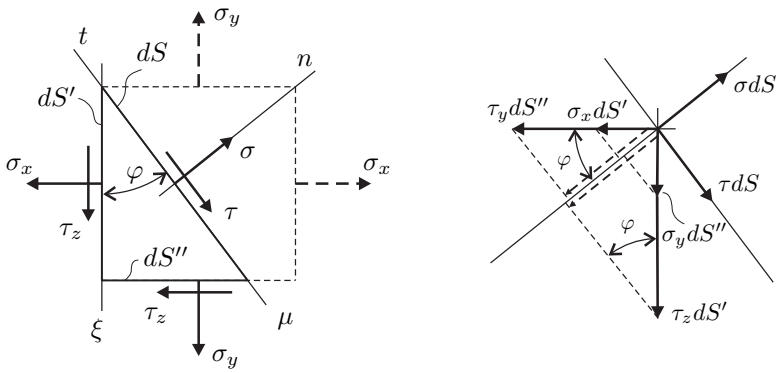
$$\sum M_s = 0: \quad \tau_{yx} dx\, dz \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dx\, dz \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dx\, dz \frac{dy}{2} - \tau_{xy} dx\, dz \frac{dy}{2} = 0 \qquad (2.44)$$

a po úprave

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z \qquad (2.45)$$

Pretože elementárny hranol je vlastne bod telesa, možno všeobecne povedať, že v určitom bode telesa sú v rezoch vzájomne kolmých šmykové napätia rovnaké a smerujú buď k priesečnici, alebo od nej a nazývame ich *združené šmykové napätia.* Označujeme ich potom podľa toho, ku ktorej osi (priesečnici) smerujú. V našom prípade to je os z. Podobne to platí aj pre šmykové napätia v ostatných rovinách elementárneho hranola, napr. $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_y$ a pod.

Napätia v myslenom reze μ určíme z podmienok rovnováhy odrezanej časti hranola (Obr. 2.28):



Obr. 2.28. Určenie σ a τ

$$\begin{aligned} \sum F_n = 0: &\quad \sigma\, dS - (\tau_z\, dS'' + \sigma_x\, dS')\cos\varphi - (\tau_z\, dS' + \sigma_y\, dS'')\sin\varphi = 0 \\ \sum F_t = 0: &\quad \tau\, dS - (\sigma_y\, dS'' + \tau_z\, dS')\sin\varphi - (\sigma_x\, dS' + \tau_z\, dS'')\cos\varphi = 0 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Ako však vidieť z Obr. 2.28, platí: $dS' = dS\,\cos\varphi$ a $dS'' = dS\,\sin\varphi$.
Dosadením týchto vzťahov do predchádzajúcich rovníc dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + 2\tau_z \sin\varphi\cos\varphi \\ \tau &= \sigma_x \sin\varphi\cos\varphi - \sigma_y \sin\varphi\cos\varphi + \tau_z \sin^2\varphi - \tau_z \cos^2\varphi \end{aligned} \tag{2.47}$$

Tieto rovnice možno ďalej upraviť použitím vzťahov

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}; \qquad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}; \qquad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi \tag{2.48}$$

do tvaru

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_z \sin 2\varphi \\ \tau &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi - \tau_z \cos 2\varphi \end{aligned} \tag{2.49}$$

Z poslednej rovnice vidieť, že napätia σ a τ v reze μ, ktorý je odklonený od rezu ξ o uhol φ, sú nezávislé od dS a materiálových konštánt. Podobne ako pri priamkovej napätosti možno určiť rezy I. a II., v ktorých normálové napätie nadobúda extrémne

hodnoty. Hľadaním extrému funkcie $\sigma = \sigma(\varphi)$ nájdeme maximálne σ_1 a minimálne σ_2 normálové napätie v tvare

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2} \tag{2.50}$$

Roviny I. a II. nazývame *hlavné roviny* a napätia σ_1 a σ_2 v nich pôsobiace *hlavné napätia*. Ďalej by sme zistili, že v hlavných rovinách sú šmykové napätia nulové a hlavné roviny napätosti sú navzájom kolmé. Podobným postupom pre maximálne šmykové napätia dostaneme

$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2} \tag{2.51}$$

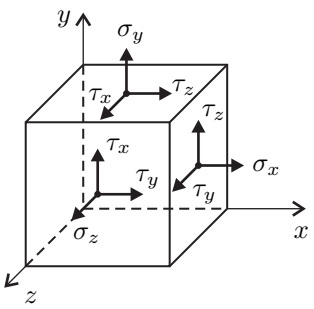
Extrémne šmykové napätia, pôsobiace v dvoch vzájomne na seba kolmých rovinách sa od seba líšia len znamienkami (čo znovu len potvrdzuje zákon združených šmykových napätí). V rezoch, kde pôsobia extrémne šmykové napätia, súčasne pôsobia i normálové napätia. Ak urobíme súčet hlavných napätí definovaných rovnicou pre maximálne a minimálne normálové napätie, dostaneme

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y = \text{konšt.} \tag{2.52}$$

To znamená, že súčet normálových napätí v dvoch ľubovoľných na seba kolmých rovinách v tom istom bode telesa je konštantný a rovná sa súčtu hlavných napätí. Tento súčet je invariantný voči voľbe vzťažného súradnicového systému v danom bode. Preto túto rovnicu nazývame 1. invariant napätí. Pre rovinnú napätosť možno obdobným spôsobom ako pri jednoosovej napätosti zostrojiť Mohrovú kružnicu. Táto kružnica je grafické znázornenie rovinnej napätosti v bode telesa.

Priestorová (trojosová) napätosť

Vo všetkých troch rovinách elementárneho hranola pôsobia nenulové napätia. Priestorová napätosť je zadaná tromi normálovými napätiami σ_x, σ_y, σ_z a tromi združenými šmykovými napätiami τ_x, τ_y a τ_z (Obr. 2.29), z ktorých možno určiť vektor napätia v ľubovoľnej rovine elementárneho hranola.



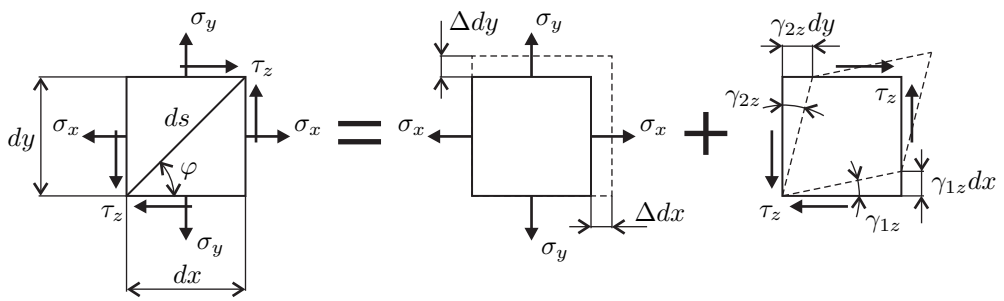
Obr. 2.29. Priestorová napätosť

Zo zložiek tenzora napätia možno určiť tri hlavné normálové napätia (ako hlavné

hodnoty tenzora napätia) σ_1, σ_2, σ_3, ktoré pôsobia v troch navzájom na seba kolmých – hlavných rovinách I, II, III. Pomerne zložitým postupom možno zostrojiť aj Mohrovú kružnicu. Hlavné normálové napätia slúžia na výpočet redukovaného napätia z hypotéz pevnosti pri dimenzovaní mechanických prvkov podrobené zloženému (kombinovanému) namáhaniu. Podrobnejšiu analýzu priestorovej napätosti však neuvádzame a pri potrebe riešiť takúto napätosť odporúčame použiť literatúru uvedenú v závere tejto monografie. Treba však uviesť, že rovinná a priamková napätosť sú špeciálne prípady priestorovej napätosti.

Pretvorenie v bode telesa

Analýzou pretvorenia telesa nazývame skúmanie zmeny vzdialenosti dvoch vybratých hmotných bodov telesa. Pretvorením v bode telesa budeme rozumieť deformáciu elementárneho hranolčeka. Ak elementárny hranol (Obr. 2.30) je zaťažený rovinnou napätosťou, môžeme na základe zákona superpozície účinkov jeho deformáciu rozdeliť na pretvorenia od normálových napätí σ_x, σ_y a zmenu pravého uhla elementárneho hranola (EH) od šmykových napätí τ_z.



Obr. 2.30. Rovinná napätosť - zložky pretvorenia

Predĺženie strán hranola od normálových napätí bude

$$\begin{aligned} \Delta dx &= \varepsilon_x \, dx \\ \Delta dy &= \varepsilon_y \, dy \end{aligned} \tag{2.53}$$

Výsledné pretvorenie EH je na Obr. 2.31. Uhlopriečka EH – ds sa zmení na ds'

$$ds' = ds + \Delta ds = (1+\varepsilon)ds \tag{2.54}$$

resp. podľa Obr. 2.31

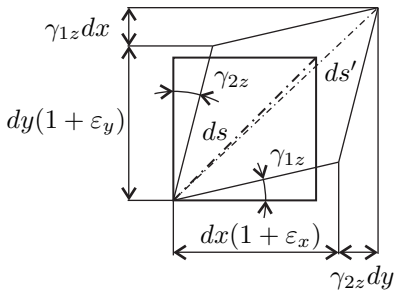
$$ds' = \sqrt{\big((1+\varepsilon_x)dx + \gamma_{1z}\, dy\big)^2 + \big((1+\varepsilon_y)dy + \gamma_{2z} dx\big)^2} \tag{2.55}$$

Ak potom celú rovnicu umocníme a vykrátime ds a podľa Obr. 2.30 dosadíme za

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi \tag{2.56}$$

Dostaneme

$$(1+\varepsilon)^2 = \big((1+\varepsilon_x)dx + \gamma_{1z}\sin\varphi\big)^2 + \big((1+\varepsilon_y)dy + \gamma_{2z}\cos\varphi\big)^2 \tag{2.57}$$



Obr. 2.31. Celkové pretvorenie EH

Vykonaním vyznačených operácií a prijatím predpokladov, že pomerné predĺženie ε, ε_x, ε_y a uhlové pretvorenia γ_{1z}, γ_{2z} sú oproti jednotke veľmi malé, možno ich štvorce a súčiny ako veličiny malé (vyšších rádov) zanedbať a tak po úprave bude

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi + (\gamma_{1z} + \gamma_{2z}) \sin\varphi \cos\varphi \tag{2.58}$$

Ak ešte označíme celkovú zmenu pravého uhla $\gamma_z = \gamma_{1z} + \gamma_{2z}$ a použijeme tiež vzťahy

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\varphi + \frac{\gamma_z}{2}\sin 2\varphi \tag{2.59}$$

dostaneme po úprave vzťah pre pomerné predĺženie uhlopriečky

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\varphi + \frac{\gamma_z}{2}\sin 2\varphi \tag{2.60}$$

Tento výraz je analogický s prvou rovnicou v (2.49) na určenie σ z daných σ_x, σ_y a τ_z v rovinnej napätosti. V obidvoch rovniciach si navzájom zodpovedajú:

$$\begin{aligned} \sigma &\approx \varepsilon & \tau &\approx \frac{\gamma}{2} \\ \sigma_x &\approx \varepsilon_x & \tau_z &\approx \frac{\gamma_z}{2} \\ \sigma_y &\approx \varepsilon_y \end{aligned} \tag{2.61}$$

Použitím tejto analógie možno potom použiť všetky výsledné vzorce pre rovinnú napätosť, ak príslušné napätia nahradíme pomerným predĺžením a uhlovým pretvorením. Pre hlavné pomerné predĺženia a uhlové pretvorenia budú platiť vzťahy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma_z}{2}\right)^2} \\ \frac{\gamma}{2} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}\sin 2\varphi - \frac{\gamma_z}{2}\cos 2\varphi \end{aligned} \tag{2.62}$$

Podobne bude platiť invariant pomerných predĺžení

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \text{konšt.} \tag{2.63}$$

ako aj fakt, že možno nakresliť Mohrovu kružnicu pomerného pretvorenia v bode telesa. Roviny hlavných pomerných pretvorení sú na seba kolmé a nazývajú sa hlavné roviny deformácie v bode telesa. V hlavných rovinách normálového pretvorenia sú pomerné skosenia rovné nule.

Keďže vo všetkých tu odvodených vzťahoch sa nevyskytuje žiadna materiálová konštanta, platia tieto rovnice pre všetky materiály, a to pre deformácie elastické i plastické, a to tým presnejšie, čím sú pretvorenia menšie.

Dá sa ukázať, že hlavné roviny mechanického napätia v každom bode telesa sú totožné z hlavnými rovinami pomernej deformácie.
Podobným spôsobom možno odvodiť vzťahy pre jednoosový i trojosový stav deformácie v bode telesa.

2.2.13 Zovšeobecnený Hookov zákon

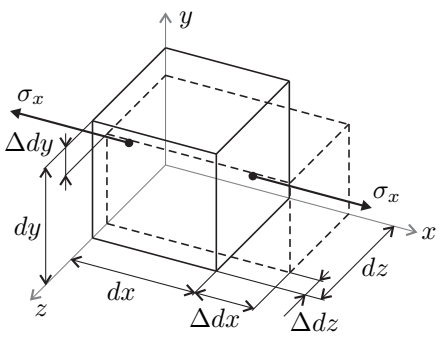
Vzájomnú závislosť medzi napätím σ a pomerným predĺžením ε tyče nám vyjadruje v lineárne pružnej oblasti zaťažovania Hookov zákon v tvare

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{2.64}$$

kde E sme nazvali modulom pružnosti materiálu v ťahu. Platnosť Hookovho zákona sa zovšeobecňuje aj pre rovinnú a priestorovú napätosť. Vo všetkých ďalších vzťahoch budeme predpokladať v každom bode uvažovaného telesa izotropné mechanické vlastnosti materiálu.

Hookov zákon jednosovej (priamkovej) napätosti

Treba určiť pretvorenie elementárneho hranola, na ktorý pôsobí len napätie σ_x (Obr. 2.32).



Obr. 2.32. Pretvorenie hranola

Pre smer osi x možno napísať Hookov zákon

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\Delta dx}{dx} \tag{2.65}$$

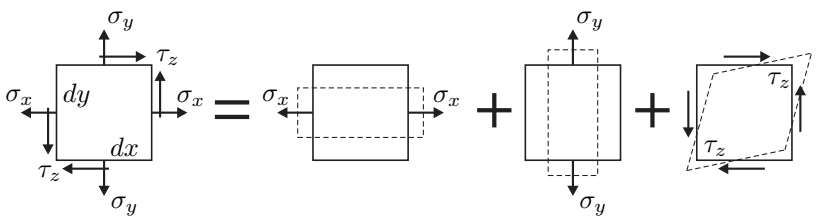
Okrem predĺženia ε_x sa hranol priečne zúži o rovnaké pomerné hodnoty (vyplýva to z pozorovania deformácie ťahanej tyče)

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\Delta dy}{dy} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{m\,E} \\ \varepsilon_z &= \frac{\Delta dz}{dz} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma_x}{m\,E} = \varepsilon_y \end{aligned} \tag{2.66}$$

Z toho vyplýva, že aj priamková napätosť vyvoláva priestorové pretvorenie.

Hookov zákon rovinnej napätosti

Rovinná napätosť je určená napätiami σ_x, σ_y, τ_z. Na základe zákona o superpozícii účinkov budeme vyšetrovať pretvorenie hranola postupne od jednotlivých zložiek napätia (Obr. 2.33).



Obr. 2.33. Superpozícia účinkov

Vyjdeme z predpokladu, že normálové napätia spôsobia pomerné predĺženie hrán a šmykové napätie spôsobí zmenu pravých uhlov (pomerné skosenie) elementárneho hranola.
Pretvorenie od σ_x

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon'_y = \varepsilon'_z = -\frac{\sigma_x}{m\,E} \tag{2.67}$$

Pretvorenie od σ_y

$$\varepsilon''_x = \varepsilon''_z = -\frac{\sigma_y}{m\,E} \qquad \varepsilon''_y = \frac{\sigma_y}{E} \tag{2.68}$$

Celkové pomerné predĺženie bude

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon'_x + \varepsilon''_x = \frac{1}{E}\Big(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{m}\Big) \\ \varepsilon_y &= \varepsilon'_y + \varepsilon''_y = \frac{1}{E}\Big(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{m}\Big) \\ \varepsilon_z &= \varepsilon'_z + \varepsilon''_z = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{m\,E} \end{aligned} \tag{2.69}$$

Pomerné skosenie od τ_z je dané Hookovým zákonom v šmyku

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \tag{2.70}$$

Posledné štyri rovnice nazývame rovnice *elasticity rovinnej napätosti*. Podobne ako pri jednoosovej napätosti, aj pri rovinnej napätosti je pretvorenie priestorové. V špeciálnom prípade, ak ε_z je veľmi malé, možno ho v praktických úlohách zanedbať, a vtedy

hovoríme o *rovinnej deformácii*.
Z týchto rovníc možno stanoviť inverznú závislosť

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{m^2\,E}{m^2-1}\Big(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_y}{m}\Big)\\
\sigma_y &= \frac{m^2\,E}{m^2-1}\Big(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x}{m}\Big)\\
\tau_z &= G\,\gamma_z
\end{aligned} \tag{2.71}$$

ktorú nazývame zovšeobecnený Hookov zákon rovinnej napätosti. Ľahko možno ukázať, že v maticovom zápise bude mať tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{m^2\,E}{m^2-1} & \dfrac{m\,E}{m^2-1} & 0 \\ \dfrac{m\,E}{m^2-1} & \dfrac{m^2\,E}{m^2-1} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

Ak zohľadníme platné vzťahy: $m = \dfrac{1}{\nu}$ a $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, potom možno Hookov zákon rovinnej napätosti vyjadriť v závislosti od modulu pružnosti v ťahu (tlaku) E a Poissonovho čísla ν v tvare

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

Hookov zákon priestorovej napätosti

Postupným určením pretvorenia hranola od napätí σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z, (Obr. 2.29) a sčítaním jeho zložiek (podobne ako pri rovinnej napätosti) dostaneme

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{1}{E}\Big(\sigma_x - \frac{\sigma_y+\sigma_z}{m}\Big)\\
\sigma_y &= \frac{1}{E}\Big(\sigma_y - \frac{\sigma_x+\sigma_z}{m}\Big)\\
\sigma_z &= \frac{1}{E}\Big(\sigma_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{m}\Big)\\
\gamma_x &= \frac{\tau_x}{G}\\
\gamma_y &= \frac{\tau_y}{G}\\
\gamma_z &= \frac{\tau_z}{G}
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Tieto rovnice predstavujú rovnice elasticity priestorovej napätosti. Inverzné vzťahy k nim predstavujú zovšeobecnený Hookov zákon priestorovej napätosti

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{m\,E}{m+1}\Big(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{m-2}\Big)\\
\sigma_y &= \frac{m\,E}{m+1}\Big(\varepsilon_y + \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{m-2}\Big)\\
\sigma_z &= \frac{m\,E}{m+1}\Big(\varepsilon_z + \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z}{m-2}\Big)\\
\tau_x &= G\,\gamma_x\\
\tau_y &= G\,\gamma_y\\
\tau_z &= G\,\gamma_z
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

Úpravou týchto rovníc použitím Poissonového čísla $\nu = \dfrac{1}{m}$ a $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ možno maticový tvar Hookovho v obvykle používanom tvare

$$
\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}
= \frac{E}{1+\nu}
\begin{bmatrix}
\frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0\\
\frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0\\
\frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}
\tag{2.76}
$$

Po príslušnej úprave možno dostať inverzný tvar Hookovho zákona v tvare

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}
= \frac{1}{E}
\begin{bmatrix}
1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0\\
-\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0\\
-\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu)
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix}
\tag{2.77}
$$

Pomerná zmena objemu

Uvažujeme elementárny hranol s dĺžkou strán dx, dy a dz. Pretvorenie elementárneho hranola je vo všeobecnosti dané pomernými deformáciami ε_x, ε_y, ε_z a pomernými skoseniami γ_x, γ_y a γ_z. Pôvodný objem hranola bol

$$dV = dx\,dy\,dz \tag{2.78}$$

Ak zanedbáme vplyv zmeny pravých uhlov hranola na zmenu dĺžok jeho hrán, bude zmena objemu spôsobená predĺžením (skrátením) hrán hranola od pomerných predĺžení

$$dV' = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz) = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)dx\,dy\,dz \tag{2.79}$$

Po roznásobení výrazov v zátvorkách a zanedbaním mocnín veličín malého rádu dostaneme:

$$dV' = dx\,dy\,dz(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = dV + (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dV \tag{2.80}$$

z toho zmena objemu

$$\Delta dV = dV' - dV = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dV \tag{2.81}$$

a pomerná zmena objemu

$$\Theta = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{2.82}$$

sa rovná súčtu pomerných predĺžení strán hranola. Ak dosadíme do pomernej zmeny objemu rovnice elasticity priestorovej napätosti, dostaneme

$$\Theta = \frac{m-2}{m}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{2.83}$$

Poznámka: V prípade všestranného ťahu alebo tlaku bude

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p \tag{2.84}$$

čo znamená, že

$$\Theta = \frac{m-2}{m\,E}\,3p \tag{2.85}$$

Pre nestlačiteľné telesá je pomerná zmena objemu $\Theta = 0$. Potom musí platiť $m - 2 = 0$ a v tom prípade $m = 2$ a $\nu = 0,5$.

Z hľadiska fyzikálneho významu pre rovnice pomernej zmeny objemu musí platiť

$$\begin{aligned} &m - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m \geq 2 \\ &(\nu \leq 0,5) \end{aligned} \tag{2.86}$$

V opačnom prípade, t. j. pre $m - 2 \geq 0 \Rightarrow (m \geq 2)$, by bola, ako to vyplýva z hore uvedených rovníc, pri všestrannom ťahu pomerná zmena objemu Θ záporná, čo zrejme odporuje skutočnosti.

Energia priestorovej napätosti

Celková energia napätosti bude daná súčtom energií napätosti od jednotlivých napätí σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z:

$$A = A_{\sigma_x} + A_{\sigma_y} + \cdots + A_{\tau_z} \tag{2.87}$$

Využitím vzťahov z úvodu tejto kapitoly potom platí

$$A = \frac{1}{2} \int\limits_V (\sigma_x \, \varepsilon_x + \cdots + \tau_z \, \gamma_z) dV \tag{2.88}$$

Merná energia napätosti (na jednotku objemu) bude

$$A_1 = \frac{dA}{dV} = \frac{1}{2}(\sigma_x \, \varepsilon_x + \cdots + \tau_z \, \gamma_z) \tag{2.89}$$

Ak použijeme rovnice elasticity, dostaneme

$$A_1 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{2}{m}(\sigma_x \, \sigma_y + \sigma_y \, \sigma_z + \sigma_x \, \sigma_z) + \frac{\tau_x^2}{G} + \frac{\tau_y^2}{G} + \frac{\tau_z^2}{G} \tag{2.90}$$

Ak je priestorová napätosť zadaná hlavnými napätiami σ_1, σ_2 a σ_3 (šmykové napätia sú v hlavných rovinách EH rovné nule), posledná rovnica prejde do tvaru

$$A_1 = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{2}{m}(\sigma_1 \, \sigma_2 + \sigma_2 \, \sigma_3 + \sigma_1 \, \sigma_3)\right) \tag{2.91}$$

V prípade rovinnej napätosti treba do posledných dvoch vzťahov dosadiť $\sigma_x = \tau_z = \tau_y = 0$, resp. $\sigma_3 = 0$.
V prípade jednoosovej napätosti je len σ_x rôzne od nuly, resp. σ_1 je rôzne od nuly.

Ako už bolo uvedené, jednou z metód zostavenia MKP – rovníc pružného telesa je minimalizácia jeho potenciálnej energie, ktorej jedna časť je hore uvedená celková energia napätosti.

2.3 Riešenie statickej úlohy pružnosti metódou konečných prvkov

Základným problémom riešenia statickej úlohy pružného telesa je určiť deformáciu a mechanické napätie v hmotných bodoch kontinua ako odozvu na pôsobenie vonkajších zaťažujúcich síl. Na základe tejto odozvy možno posúdiť únosnosť, spoľahlivosť, životnosť a bezpečnosť mechanických prvkov a sústav. Počítačovo orientované numerické metódy, ako napríklad metóda konečných prvkov, nám umožňujú vychádzať z relatívne veľmi presných a reálnych podmienok jedno-jednoznačnosti riešenia rovníc MKP (geometria, materiálové vlastnosti, okrajové podmienky), čím možno dosiahnuť veľmi presné a pritom vysoko efektívne riešenie. Oblasť mechaniky, ktorá sa zoberá vývojom a aplikáciou numerických, počítačovo orientovaných metód, sa nazýva Výpočtová mechanika (Computational mechanics). Všeobecný postup výpočtovej mechaniky možno zhrnúť do týchto bodov:

- zostavenie základných rovníc úlohy;
- implementácia výpočtovej metódy;
- vytvorenie počítačového programu a jeho aplikácia na riešenie konkrétnej úlohy.

Základné rovnice elastostatickej analýzy opisujú kinematiku, kinetiku, konštitutívne rovnice a termodynamiku deformácie telesa. Kinematické rovnice obsahujú vektorové pole posunutia hmotných bodov telesa ako funkciu polohy príslušného hmotného bodu, z ktorého možno určiť pole pomerných pretvorení okolia hmotných bodov (pozri podkapitolu 2.2.12). Kinetické rovnice definujú vnútorné sily a mechanické napätia (pozri podkapitolu 2.2.12). Konštitutívne rovnice predstavuje Hookov zákon (pozri podkapitolu 2.2.13). Termodynamika deformačného procesu spočíva v zákone zachovania potenciálnej energie vnútorných a vonkajších síl pôsobiacich na povrchu a v objeme telesa. Ak za primárnu neznámu v základných rovniciach zvolíme pole posunutia bodov telesa, potom hovoríme o deformačnej metóde. Ak za primárnu neznámu zvolíme vnútorné sily, potom hovoríme o silovej metóde. Ak sa na určitej množine hmotných bodov považujú za primárnu neznámu posunutia, a na inej množine bodov sily, hovoríme o hybridnej alebo tiež zmiešanej formulácii základných rovníc. V elastostatike poddajného telesa sa presadila deformačná metóda, pretože na určitej časti telesa sú posunutia vzhľadom na uloženie telesa známou veličinou. Základné rovnice MKP možno odvodiť:

- priamou tuhostnou metódou;
- energetickou metódou;
- variačnou metódou.

Priama tuhostná metóda, založená na priamom vzťahu medzi silami a posunutiami, je vhodná pre takzvané jednorozmerné prvky – prútové a nosníkové. Pre prvky spojitého telesa sa osvedčila variačná metóda založená na princípe virtuálnych prác. Energetická metóda je typická inžinierska metóda, ktorá je založená na princípe minima potenciálnej energie, a možno ju uplatniť pre všetky typy konečných prvkov. Z priamej tuhostnej formulácie MKP bol prevzatý len základný princíp, že riešená oblasť (teleso) sa diskretizuje na jej konečné časti – konečné prvky, ktoré sú navzájom pospájané v uzlových bodoch. Cez tieto uzlové body sa prenášajú všetky sily a pretvorenia telesa. Rozdelenie neznámych veličín v ostatných bodoch elementu sa aproximuje zo známych hodnôt v uzlových bodoch prostredníctvom "náhradných" (tvarových) funkcií. Takto formulované rovnice riešia daný problém len približne a presnosť riešenia závisí od jemnosti delenia oblasti na konečné prvky a uzlové body. Ak je riešenie úlohy známe v uzlových bodoch, potom prostredníctvom náhradných funkcií možno určiť statické a kinematické veličiny vo vnútri elementov a na povrchu telesa.

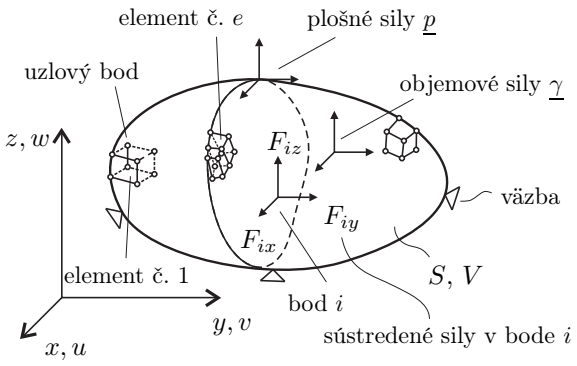
2.3.1 Formulácia všeobecnej elastostatickej úlohy a jej MKP riešenie

Na Obr. 2.34 je znázornené priestorové teleso, nachádzajúce sa v statickej rovnováhe. Na teleso pôsobia vonkajšie sily (vrátane väzbových reakcií)

- objemové sily $\underline{\gamma}$ [N/m^3] (napr. vlastná tiaž),
- plošné sily $\underline{p}$ [N/m^2] (napr. plošný tlak),
- sústredené sily a momenty $\underline{F_i}$ [N], $\underline{M_i}$ [Nm],

so zložkami

$$\underline{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \\ \gamma_z \end{bmatrix}; \quad \underline{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}; \quad \underline{F_i} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix}; \quad \underline{M_i} = \begin{bmatrix} M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix} \tag{2.92}$$



Obr. 2.34. Priestorové teleso v statickej rovnováhe

Tieto sily spôsobujú pretvorenie pružného telesa. Vektor posunutia vybraného bodu je

$$\underline{u} = \left[u, v, w\right]^T \tag{2.93}$$

pretvorenie okolia tohoto bodu

$$\underline{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\right]^T \tag{2.94}$$

napätia v bode

$$\underline{\sigma} = \left[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\right]^T \tag{2.95}$$

Lineárnu elastostatickú úlohu možno formulovať takto:
Dané je: mechanické vlastnosti materiálu, geometria telesa, vonkajšie zaťaženie, okrajové podmienky.
Treba určiť: vektorové pole posunutia $\underline{u}$, pole pretvorenia $\underline{\varepsilon}$ a napätia $\underline{\sigma}$ v celom objeme telesa V a na povrchu S.

Energetická formulácia riešenia lineárnej úlohy je takáto:
Zložky pretvorenia v ľubovoľnom bode telesa možno určiť zo zložiek vektora posunutia.
Pomerné predĺženia

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

Pomerné uhly skosenia

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

Konštitutívna rovnica (zovšeobecnený Hookov zákon) vyjadruje vzťah medzi napätím $\underline{\sigma}$ a pretvorením $\underline{\varepsilon}$:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\,\underline{\varepsilon} \tag{2.96}$$

Pričom, ako je známe, matica pružnosti priestorovej napätosti

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{2.97}$$

kde E je modul pružnosti v ťahu-tlaku, a ν je Poissonove číslo ($\nu = \frac{1}{m}$, $\nu = 0,3$ pre oceľ, $\nu = 0,33$ pre hliník, $\nu = 0,31$ pre nikel, $\nu = 0,28$ pre kremík), m je Poissonova konštanta – ako už bolo uvedené, charakterizuje priečne zúženie materiálu.
Ďalej zadefinujme počiatočné pretvorenie

$$\underline{\varepsilon_0} = \left[\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0y}, \varepsilon_{0z}, \gamma_{0xy}, \gamma_{0yz}, \gamma_{0zx}\right]^T \tag{2.98}$$

ktoré vyvolá v materiáli počiatočné napätie

$$\underline{\sigma_0} = -\underline{D}\,\underline{\varepsilon_0} \tag{2.99}$$

Výsledné napätie dostaneme superpozíciou

$$\underline{\sigma} = \underline{D}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon_0}) \tag{2.100}$$

Rovnovážny stav telesa možno opísať *princípom minima potencionálnej energie systému*: potencionálna energia systému, daná súčtom potenciálnej energie vonkajších a vnútorných síl, nadobúda v rovnovážnom stave minimálnu hodnotu.
Potencionálna energia systému je daná vzťahom

$$\pi = \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma}\, dV}_{\substack{\text{potenciálna energia} \\ \text{vnútorných síl}}} \underbrace{- \int_V \underline{u}^T \underline{\gamma}\, dV - \int_{S_1} \underline{u}^T \underline{P}\, dS_1 - \sum_{i=1}^{m} \underline{u}_i^T F_i}_{\text{potenciálna energia vonkajších síl}} \tag{2.101}$$

pričom sa predpokladá, že povrch telesa $S = S_1 + S_2$, t. j. na časti povrchu S_1 sú predpísané plošné sily, na S_2 sú predpísané posunutia.

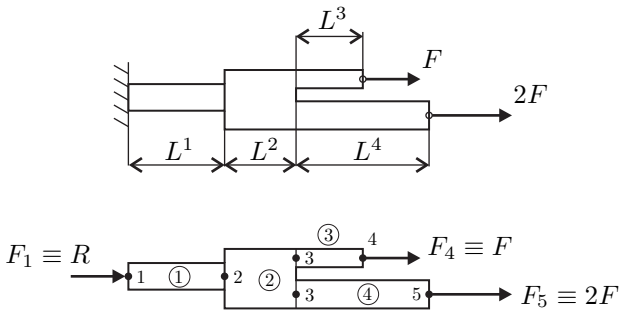
Zo vzťahu (2.101) vidieť, že potenciálna energia je funkciou vektorového poľa posunutia jeho bodov, t. j. $\pi = \pi(\underline{u})$. Ak vektorové pole $\underline{u}$ odpovedá zaťaženiu telesa a okrajovým podmienkam, potom $\pi(\underline{u})$ nadobúda minimálnu hodnotu, čo znamená, že

$$\frac{\partial \pi(\underline{u})}{\partial \underline{u}} = 0 \tag{2.102}$$

Prakticky to znamená, že po zostavení funkcionálu $\pi(\underline{u})$ a jeho minimalizáciou podľa (2.101), dostaneme systém rovníc na výpočet neznámeho poľa posunutí bodov telesa $\underline{u}$, čo je vlastne riešenie základnej úlohy elastostatiky.

Príklad 2.1

Pre mechanickú sústavu na Obr.2.35 zostavte funkcionál potenciálnej energie $\pi(\underline{u})$ a jeho minimalizáciou zostavte systém rovníc na výpočet posunutí uzlových bodov.



Obr. 2.35. Jednorozmerná úloha

Riešenie:

Za predpokladu, že priečné rozmery sústavy sú v porovnaní s ich dĺžkou relatívne malé, možno uvoľnené teleso diskretizovať na 4 prútové elementy a 5 uzlových bodov. Celková potenciálna energia (2.101) sa pre jednoosové namáhanie (v pozdĺžnom smere) zjednoduší do tvaru

$$\pi = \sum_{e=1}^{4} \frac{1}{2} \int_{V^e} \sigma^e \varepsilon^e dV - \sum_{n=1}^{5} F_n u_n = A_\sigma + W_F \tag{2.103}$$

pričom normálové napätie vybraného elementu e je $\sigma^e = \dfrac{N^e}{A^e}$; pomerné predĺženie je $\varepsilon^e = \dfrac{u_k^e - u_i^e}{L^e}$; osová sila $N^e = N_i^e = N_k^e$, a u_n sú posunutia uzlových bodov s číslom uzlového bodu $n \in \langle 1, 5 \rangle$ v pozdĺžnom smere (v ostatných dvoch smeroch sú posuntia uzlových bodov nulové). Indexy i a k označujú prvý a druhý uzol príslušného e - teho elementu.

Potenciálna energia vnútorných síl vybraného elementu e ($e \in \langle 1, 4 \rangle$) je

$$A_\sigma^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} E^e \left(\varepsilon^e\right)^2 dV = \frac{1}{2} \frac{E^e A^e}{L^e} \left(u_k^e - u_i^e\right)^2 = \frac{k^e}{2} \left(u_k^e - u_i^e\right)^2 \tag{2.104}$$

Pričom $\sigma^e = E^e \varepsilon^e$; $k^e = \dfrac{E^e A^e}{L^e}$; $\int\limits_{V^e} dV = A^e L^e$.

Práca vonkajších síl $W_F = -\sum\limits_{n=1}^{5} F_n u_n = -F_1 u_1 - F_4 u_4 - F_5 u_5$, pretože v uzlových bodoch 2 a 3 nepôsobí žiadna vonkajšia sila ani vonkajšia väzbová reakcia.
Výsledný vzťah funkcionálu potenciálnej energie (za predpokladu spojitosti deformácie: $u_i^1 = u_1$, $u_k^1 = u_i^2 = u_2$, $u_k^2 = u_i^3 = u_3$ atď.) dostaneme v tvare

$$\begin{aligned}
\pi(\underline{u}) &= \pi(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \\
&= \frac{k^1}{2}\big(u_2 - u_1\big)^2 + \frac{k^2}{2}\big(u_3 - u_2\big)^2 + \frac{k^3}{2}\big(u_4 - u_3\big)^2 + \frac{k^4}{2}\big(u_5 - u_3\big)^2 \\
&- F_1 u_1 - F_4 u_4 - F_5 u_5
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Minimalizáciou funkcionálu 2.105 dostaneme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} &= k^1(u_1 - u_2) - F_1 = 0 \\
\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} &= k^1(u_2 - u_1) + k^2(u_2 - u_3) = 0 \\
\frac{\partial \Pi}{\partial u_3} &= k^2(u_3 - u_2) - k^3(u_3 - u_4) + k^4(u_3 - u_5) = 0 \\
\frac{\partial \Pi}{\partial u_4} &= k^3(u_4 - u_3) - F_4 = 0 \\
\frac{\partial \Pi}{\partial u_5} &= k^4(u_5 - u_3) - F_5 = 0
\end{aligned} \tag{2.106}$$

alebo v maticovom tvare: $\underline{K}\,\underline{a} = \underline{F}$, resp.

$$\begin{bmatrix}
k^1 & -k^1 & 0 & 0 & 0 \\
 & k^1 + k^2 & -k^2 & 0 & 0 \\
S & & k^2 + k^3 + k^4 & -k^3 & -k^4 \\
 & Y & & k^3 & 0 \\
 & & M & & k^4
\end{bmatrix} \cdot
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

Matica $\underline{K}$ sa nazýva maticou tuhosti konštrukcie, $\underline{a}$ je vektor uzlových posunutí konštrukcie a $\underline{F}$ je vektor vonkajších uzlových síl konštrukcie. Pretože sme do potenciálnej energie vnútorných síl dosadili exaktné vzťahy pre pretvorenie telesa (bez náhradných funkcií), odvodený systém rovníc po jeho redukcii a vyriešení dodáva exaktné výsledky v rámci lineárnej teórie prúta. Toto však nie je možné pri zložitejších úlohách a preto všeobecná energetická formulácia rovníc MKP, ako bude uvedené ďalej, používa aproximácie vektorového poľa posunutia prostredníctvom náhradných funkcií. Pre jednoduché úlohy možno tieto náhradné funkcie zvoliť tak, že opisujú hľadané pole posunutia presne. Vo väčšine prípadov je však táto náhrada len približná.

2.3.2 Základné vzťahy energetickej formulácie rovníc MKP

Predpokladajme, že teleso na Obr. 2.34 má NET elementov a každý element má NUE uzlových bodov. Každý uzlový bod má 3 stupne voľnosti pohybu, dané tromi zložkami posunutia v smere osí GSS – x, y, z. Uvažujme, že posunutia všetkých uzlových bodov vybraného elementu e sú známe. Vektor posunutia ľubovoľného bodu vo vnútri elementu vyjadríme prostredníctvom náhradných (tvarových) funkcií $\underline{N}$ a zložiek posunutí uzlových bodov daného elementu $\underline{a}^e$. Čiže

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & \dots & N_{NUE} & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & \dots & 0 & N_{NUE} & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & \dots & 0 & 0 & N_{NUE} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \vdots \\ u_{NUE} \\ v_{NUE} \\ w_{NUE} \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{N}\,\underline{a}^e \tag{2.108}$$

V (2.108) predstavuje $\underline{N}$ maticu tvarových funkcií, ktoré sú spravidla polynómami v súradniciach x, y a z. Znak podčiarknutia pod symbolom N a ďalších veličín znamená, že ide o maticu. Ako vidieť z (2.108), aproximácia zložky vektora posunutia ľubovoľného bodu elementu je zvolená tak, že zložka vektora posunutia tohto bodu v smere príslušnej súradnicovej osi je funkciou posunutí všetkých uzlových bodov daného elementu v smere tej istej osi.

Náhradné funkcie $\underline{N}$ musia byť volené tak, aby boli splnené okrajové podmienky, t. j., pre ľubovoľný uzlový bod k elementu e musí byť funkcia $N_k(x_k, y_k, z_k) = 1$ a vo všetkých ostatných uzloch elementu musí byť táto funkcia rovná nule. T. j., pre $x = x_k$, $y = y_k$, $z = z_k$ je

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= N_k(x_k,y_k,z_k)u_k \equiv u_k \\ v(x,y,z) &= N_k(x_k,y_k,z_k)v_k \equiv v_k \\ w(x,y,z) &= N_k(x_k,y_k,z_k)w_k \equiv w_k \end{aligned} \tag{2.109}$$

Konkrétny tvar náhradných funkcií $\underline{N}$ možno stanoviť nasledujúcim spôsobom. Nech

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix} = \Phi(x,y,z)\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & z & xy\dots \\ 1 & x & y & z & xy\dots \\ 1 & x & y & z & xy\dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{NUE} \end{bmatrix} = \underline{N}\,\underline{a}^e = \underline{\Phi}\,\underline{\alpha}^e \tag{2.110}$$

kde α_k sú koeficienty polynómov Φ a ich počet je zhodný s počtom neznámych zložiek posunutí všetkých uzlových bodov elementu.
Ako sme ukázali, pre všetky uzlové body i ($i = (1, NUE)$) platia okrajové podmienky, t. j. pre $x = x_i$, $y = y_i$, $z = z_i$ je $\underline{u} = \underline{a_i}$. Postupným dosadzovaním súradníc uzlových bodov do 2.110 dostaneme

$$\underline{a}^e = \begin{bmatrix} \underline{a}_i \\ \underline{a}_j \\ \vdots \\ \underline{a}_{NUE} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\Phi} & (x_i, y_i, z_i) \\ \underline{\Phi} & (x_j, y_j, z_j) \\ \vdots & \\ \underline{\Phi} & (x_{NUE}, y_{NUE}, z_{NUE}) \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underline{\alpha} = \underline{A}\,\underline{\alpha} \Rightarrow \underline{\alpha} = \underline{A}^{-1}\underline{a}^e \tag{2.111}$$

pričom $\underline{A} = \underline{\Phi}(x = x_i, y = y_i, z = z_i)$.
Potom $\underline{u} = \underline{N}\,\underline{a}^e = \underline{\Phi}\,\underline{\alpha} = \underline{\Phi}\,\underline{A}^{-1}\underline{a}^e \Rightarrow \underline{N} = \underline{\Phi}\,\underline{A}^{-1}$, čiže matica takých tvarových funkcií $\underline{N}$, ktoré spĺňajú okrajové podmienky v uzlových bodoch je

$$\underline{N}(x, y, z) = \underline{\Phi}(x, y, z)\,\underline{A}^{-1} \tag{2.112}$$

kde $\underline{A}^{-1}$ predstavuje inverziu matice konštánt $\underline{A}$, a $\underline{a}^e$ je vektor posunutia uzlových bodov elementu e.
Zo známeho posunutia v bode elementu možno určiť pretvorenia v danom bode

$$\underline{\varepsilon}(x, y, z) = \underline{L}\,\underline{u}(x, y, z) = \underline{L} \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ z(x, y, z) \end{bmatrix} = \underline{\varepsilon}^e \tag{2.113}$$

kde $\underline{L}$ predstavuje operátor parciálnych derivácií

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \tag{2.114}$$

Uplatnením (2.112) - (2.114) dostaneme

$$\underline{\varepsilon}^e = \underline{L}\,\underline{N}\,\underline{a}^e = \underline{L}\,\underline{\Phi}\,\underline{A}^{-1}\underline{a}^e = \underline{B}^e\underline{a}^e \tag{2.115}$$

pričom

$$\underline{B}^e = \underline{L}\,\underline{\Phi}\,\underline{A}^{-1} = \underline{L}\,\underline{N} \tag{2.116}$$

je transformačná matica, vyjadrujúca závislosť medzi pretvorením v bode elementu (x, y, z) a vektorom uzlových posunutí elementu.
Napätie v bode elementu (x, y, z) možno vyjadriť zo vzťahu (2.96), (kde $\underline{\varepsilon}_0$ je počiatočné pretvorenie)

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D}(\underline{\varepsilon}^e - \underline{\varepsilon}_0) = \underline{D}\,\underline{B}^e\,\underline{a}^e - \underline{D}\,\underline{\varepsilon}_0 \tag{2.117}$$

Potenciálna energia (2.101) elementu e (bez potenciálnej energie sústredených síl – pridáme ju až do potenciálu celého systému)

$$\pi^e = \frac{1}{2}\int\limits_{V^e} \underline{\sigma}^{eT}\underline{\varepsilon}^e dV - \int\limits_{V^e} \underline{u}^{eT}\underline{\gamma}^e dV - \int\limits_{S_i^e} \underline{u}^{eT}\underline{p}^e dS_i \tag{2.118}$$

Dosadením vzťahov $\underline{u}^e = \underline{N}\,\underline{a}^e$; $\underline{\varepsilon}^e = \underline{L}\,\underline{u}^e = \underline{B}^e\underline{a}^e$; a $\underline{\sigma}^e = \underline{D}\,\underline{B}^e\underline{a}^e - \underline{D}\,\underline{\varepsilon}_0$ do (2.118) a za predpokladu symetrie pružnosti pre izotropický matriál (index T označuje transponovaný tvar matice), dostaneme

$$\pi^e = \frac{1}{2}\int\limits_{V^e} \underline{a}^{eT}\underline{B}^{eT}\underline{D}\,\underline{B}^e a^e dV - \frac{1}{2}\int\limits_{V^e} \underline{\varepsilon}_0^T\underline{D}\,\underline{B}^e\underline{a}^e dV - \int\limits_{V^e} \underline{a}^{eT}\underline{N}^T\underline{\gamma}^e dV - \int\limits_{S_i^e} \underline{a}^{eT}\underline{N}^T\underline{p}^e dS_1 \tag{2.119}$$

Pri odvádzaní (2.119) sme použili známe pravidlá pre násobenie štvorcových matíc A a B: $(A\,B)^T = B^T A^T$; $(A\,B\,C)^T = C^T(A\,B)^T = C^T B^T A^T$; $A\,B = B^T A$ čiže

$$\underline{\sigma}^{eT} = (\underline{D}\,\underline{B}^e\underline{a}^e)^T - (\underline{D}\,\underline{\varepsilon}_0)^T = \underline{a}^{eT}(\underline{D}\,\underline{B}^e)^T - (\underline{D}\,\underline{\varepsilon}_0)^T = \underline{a}^{eT}\underline{B}^{eT}\underline{D} - \underline{\varepsilon}_0^T\underline{D}$$
$$\underline{u}^{eT} = (\underline{N}\,\underline{a}^e)^T = \underline{a}^{eT}\underline{N}^T$$

Ďalej pri integráli s počiatočným pretvorením $\underline{\varepsilon}_0$ vynecháme koeficient 1/2, pretože toto pretvorenie pôsobí hneď na začiatku deformačného procesu. Výsledný tvar potenciálnej energie elementu potom je

$$\pi^e = \frac{1}{2}\underline{a}^{eT}\left(\int\limits_{V^e} \underline{B}^{eT}\underline{D}\,\underline{B}^e dV\right)\underline{a}^e dV - \underline{a}^{eT}\left(\int\limits_{V^e} \underline{B}^{eT}\underline{D}\,\underline{\varepsilon}_0 dV - \int\limits_{V^e} \underline{N}^T\underline{\gamma}^e dV - \int\limits_{S_1^e} \underline{N}^T\underline{p}^e dS_1\right) \tag{2.120}$$

Ak označíme

$$\int\limits_{V^e} \underline{B}^{eT}\underline{D}\,\underline{B}^e dV = \underline{K}^e \tag{2.121}$$

a všetky ostatné integrály, v ktorých vystupujú známe vonkajšie sily ako $\underline{F}^e$, potom (2.120) sa zjednoduší na tvar

$$\pi^e = \frac{1}{2}\underline{a}^{eT}\underline{K}^e\underline{a}^e - \underline{a}^{eT}\underline{F}^e \tag{2.122}$$

Vektor vonkajšieho uzlového zaťaženia elementu

$$\underline{F}^e = \underline{F}^e_{\varepsilon_0} + \underline{F}^e_V + \underline{F}^e_S \tag{2.123}$$

kde

$$\underline{F}^e_{\varepsilon_0} = \int\limits_{V^e} \underline{B}^{eT}\underline{D}\,\underline{\varepsilon}_0 dV \tag{2.124}$$

sú uzlové sily od počiatočných pretvorení.

$$\underline{F}_V^e = \int\limits_{V^e} \underline{N}^T \underline{\gamma}^e dV \tag{2.125}$$

sú objemové sily, a

$$\underline{F}_S^e = \int\limits_{S_i^e} \underline{N}^T \underline{p}^e dS_1 \tag{2.126}$$

sú plošné sily.
Potenciálna energia celej konštrukcie

$$\pi = \sum_{e=1}^{NET} \pi^e + W_F = \sum_{e=1}^{NET} \left(\frac{1}{2} \underline{a}^{eT} \underline{K}^e \underline{a}^e - \underline{a}^{eT} \underline{F}^e \right) - \underline{a}^T \underline{F}_F \tag{2.127}$$

Do (2.127) sme pridali prácu všetkých sústredených vonkajších síl pôsobiacich v uzlových bodoch konštrukcie

$$W_F = \underline{a}^T \underline{F}_F \tag{2.128}$$

pričom globálny vektor sústredených uzlových síl je

$$\underline{F}_F = \left[\underline{F}_1^T, \underline{F}_2^T, \ldots, \underline{F}_{NUT}^T \right] = \left[F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, \ldots, F_{NUTx}, F_{NUTy}, F_{NUTz} \right] \tag{2.129}$$

Ďalej $\underline{a}$ je celkový vektor uzlových posunutí konštrukcie a $\underline{a}^T$ je jeho transponovaný tvar.
V potenciálnej energii elementu rozšírime matice tuhosti a uzlové zaťaženia konečných prvkov (rozšírená matica tuhosti konečného prvku má formálne rozmer ako celková matica tuhosti konštrukcie, avšak okrem členov matice tuhosti elementu sú ostatné členy rozšírenej matice tuhosti rovné nule – bližšie sa s konštrukciou rozšírenej matice tuhosti budeme zaoberať neskôr), resp. urobíme náhradu

$$\underline{a}^{eT} \underline{K}^e \underline{a}^e = \underline{a}^T \underline{K}^{e*} \underline{a}, \qquad \underline{a}^{eT} \underline{F}^e = \underline{a}^T \underline{F}^{e*} \tag{2.130}$$

Potom

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{NET} \underline{a}^T \underline{K}^{e*} \underline{a} - \sum_{e=1}^{NET} \underline{a}^T \underline{F}^{e*} - \underline{a}^T \underline{F}_F \tag{2.131}$$

a po úprave

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{a}^T \left(\sum_{e=1}^{NET} \underline{K}^{e*} \right) \underline{a} - \underline{a}^T \left(\left(\sum_{e=1}^{NET} \underline{F}^{e*} \right) - \underline{F}_F \right) \tag{2.132}$$

Ak $\underline{K} = \sum\limits_{e=1}^{NET} \underline{K}^{e*}$ je matica tuhosti konštrukcie a $\underline{F} = \sum\limits_{e=1}^{NET} \underline{F}^{e*} + \underline{F}_F$ je vektor celkového uzlového zaťaženia konštrukcie, potom

$$\pi = \frac{1}{2} \underline{a}^T \underline{K}\, \underline{a} - \underline{a}^T \underline{F} = \pi(\underline{a}) \tag{2.133}$$

Minimalizáciou (2.133)

$$\frac{\partial \pi}{\underline{a}} = \underline{K}\,\underline{a} - \underline{F} = 0 \tag{2.134}$$

vznikne už z predchádzajúcich kapitol známy systém rovníc MKP

$$\underline{K}\,\underline{a} = \underline{F} \tag{2.135}$$

ktorý približne opisuje danú elastostatickú úlohu.

V literatúre uvedenej na konci tejto práce je podrobne spracovaný postup určenia tvarových funkcií a ich konkrétny tvar pre rôzne typy konečných prvkov. Podľa typu použitých tvarových funkcií sa delia konečné prvky na izoparametrické, subparametrické a superparametrické.

O izoparametrických prvkoch hovoríme vtedy, ak sú použité rovnaké tvarové funkcie na vyjadrenie polohy ako aj posunutia ľubovoľného bodu elementu.

Pri superparametrických a subparametrických prvkoch sa na vyjadrenie polohy bodu a zložiek jeho posunutia používajú rôzne typy tvarových funkcií.

Pri prútových prvkoch sa používajú obidve skupiny konečných prvkov. Izoparametrické prútové prvky sú všeobecnejšie, možno do ich formulácie ľahšie zahrnúť rôzne vplyvy (ako napr. vplyv priečnych síl pre premenlivý prierez atď.), sú však zložitejšie pretože ich matica tuhosti sa počíta numerickou integráciou. Vo väčšine komerčných programov MKP sa presadili napríklad nosníkové konečné prvky, ktorých tvarové funkcie sú zostavené z hermiteovských interpolačných funkcií. Tieto prvky možno považovať za superparametrické a vzhľadom na ich rozšírenosť a kvalitu sa budeme nimi zaoberať podrobnejšie neskôr.

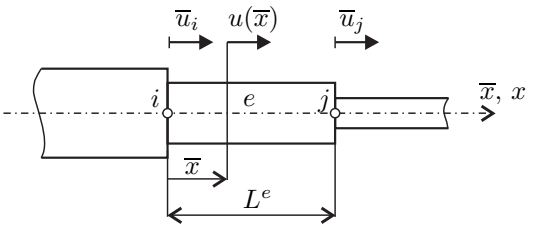
Príklad 2.2

Pre jednoosovo namáhaný prútový prvok:

a) zostavte lokálnu maticu tuhosti pomocou náhradných funkcií posunutia,

b) stanovte vektor uzlových posunutí od počiatočného teplotného pretvorenia $\varepsilon_0 = \alpha_T^e \Delta T$ a síl vlastnej tiaže $\gamma_{\overline{x}}$.

Dané je: E^e, A^e, L^e, ε_0^e a merná tiaž $\gamma_{\overline{x}}$. α_T^e je koeficient teplotnej rozťažnosti, ΔT je teplotný rozdiel počiatočného ohriatia prúta e (oteplenie celej sústavy je konštantné).



Obr. 2.36. Prútový element

Riešenie:
Pretože $\overline{x} \equiv x$, lokálne a globálne vzťahy splývajú. Kvôli jednoduchosti použijeme označenia prijaté pre lokálne vzťahy.
Vektor lokálneho uzlového posunutia elementu je $\underline{\overline{a}}^e$ (lokálne veličiny budú v ďalšom formálne označené hornou a dolnou čiarou)

$$\underline{\overline{a}}^e = \left[\overline{u}_i, \overline{u}_j\right] \tag{2.136}$$

Vzhľadom na dve neznáme posunutia, vzťah s náhradnými funkciami 2.110 nadobudne tvar

$$u(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = u\,\overline{x} = \alpha_1 + \alpha_2 \overline{x} = [1, \overline{x}] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \underline{\Phi}(\overline{x})\underline{\alpha} \tag{2.137}$$

Zohľadneným okrajových podmienok

$$\overline{x} = 0 \ldots u(\overline{x}) = \overline{u}_i = \alpha_1$$
$$\overline{x} = L^e \ldots u(\overline{x}) = \overline{u}_j = \alpha_1 + \alpha_2 L^e = \overline{u}_i + \alpha_2 L^e$$

dostane vzťah (2.108) konkrétny tvar

$$\underline{\overline{a}}^e = \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \underline{A}\,\underline{\alpha} \tag{2.138}$$

Odtiaľ

$$\underline{\alpha} = \underline{A}^{-1}\underline{\overline{a}}^e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{L^e} & \dfrac{1}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{bmatrix} \tag{2.139}$$

Dosadením (2.139) do (2.137) máme

$$\begin{aligned} u(\overline{x}) = [1, \overline{x}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{L^e} & \dfrac{1}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\overline{x}}{L^e} & \dfrac{\overline{x}}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_i & \overline{u}_j \end{bmatrix}^T = \underline{N}\,\underline{\overline{a}}^e \end{aligned} \tag{2.140}$$

Takto sme dostali jednoznačný vzťah pre posunutie ľubovoľného bodu elementu v smere osi $\overline{x}$ v závislosti na uzlových posunutiach a tvarových funkcií v uzloch i a j

$$N_i = 1 - \frac{\overline{x}}{L^e}, \qquad N_j = \frac{\overline{x}}{L^e} \tag{2.141}$$

Tvarové funkcie spĺňajú okrajové podmienky, t. j. pre $\overline{x} = 0$ je $u(\overline{x}) = \overline{u}_i$ a pre $\overline{x} = L^e$ je $u(\overline{x}) = \overline{u}_j$. Náhradné funkcie (2.141) opisujú priebeh posunutia po dĺžke prúta presne, v zmysle lineárnej teórie jednoosovo namáhaného prúta, čo však, ako sme už spomínali, neplatí všeobecne.
Transformačný vzťah medzi posunutiami a pretvorením v danom bode prúta

$$\varepsilon(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \varepsilon(\overline{x}) = \frac{du(\overline{x})}{d\overline{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{L^e} & \dfrac{1}{L^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{bmatrix} = \underline{B}^e \underline{\overline{a}}^e \tag{2.142}$$

obsahuje transformačnú maticu

$$\underline{B}^e = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L^e} & \dfrac{1}{L^e} \end{bmatrix} \tag{2.143}$$

Lokálna matica tuhosti bude mať tvar

$$\underline{\overline{K}}^e = \int\limits_{V^e} \underline{B}^{eT} \underline{D}\, \underline{B}^e dV = \int\limits_0^{L^e} \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L^e} \\ \dfrac{1}{L^e} \end{bmatrix} E^e \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L^e} & \dfrac{1}{L^e} \end{bmatrix} A^e\, d\overline{x} \tag{2.144}$$

resp. po integrácii

$$\underline{\overline{K}}^e = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.145}$$

ktorá sa zhoduje s maticou tuhosti prúta konštantného prierezu vyjadrenej pomocou priamej tuhostnej formulácie MKP.
Zložky vektora uzlových zaťažení:

- objemové sily

$$\underline{F}_V = \int\limits_{V^e} \gamma_{\overline{x}} \underline{N}^T dV = \gamma_{\overline{x}} \int\limits_0^{L^e} \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\overline{x}}{L^e} \\ \dfrac{\overline{x}}{L^e} \end{bmatrix} A^e d\overline{x} = \frac{1}{2} \gamma_{\overline{x}} A^e L^e \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.146}$$

- sily počiatočného pretvorenia

$$\underline{F}_{\varepsilon 0} = \int\limits_{V^e} \underline{B}^{eT} \underline{D}\, \underline{\varepsilon}_0\, dV = \alpha_T^e \Delta T\, E^e \int\limits_0^{L^e} \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L^e} \\ \dfrac{1}{L^e} \end{bmatrix} A^e d\overline{x} = \alpha_T^e \Delta T\, E^e A^e \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.147}$$

Prvková rovnica vybraného konečného prvku má napokon tvar

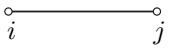
$$\frac{E^e A^e}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \gamma_{\overline{x}} A^e L^e \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_T^e \Delta T\, E^e A^e \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.148}$$

Po previazaní prvkových rovníc všetkých konečných prvkov a po zohľadnení okrajových podmienok možno dostať celkový systém rovníc MKP konštrukcie.

2.3.3 Rozdelenie konečných prvkov pre riešenie mechaniky pevných a poddajných telies

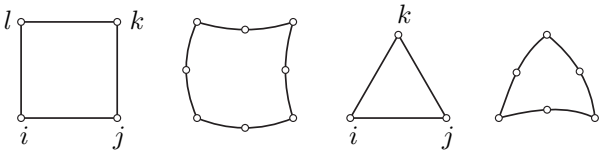
Základný krok riešenia mechaniky pevných a poddajných telies je diskretizácia riešenej oblasti (objem a povrch telesa) na konečné prvky a ich uzlové body. Ako už bolo uvedené, poznáme čiarové, plošné a objemové konečné prvky. Toto základné delenie súvisí

s geometriou diskretizovaného telesa. Ak geometria, materiálové vlastnosti a ostatné parametre ako sú mechanické napätia a deformácie sú závislé len od jednej súradnice, na jeho diskretizáciu možno použiť jednorozmerný čiarový prvok podľa Obr. 2.37. Tento dvojuzlový konečný prvok je charakterizovaný dĺžkou a plochou prierezu, ktorá môže byť po dĺžke konštatná alebo premenlivá. Ak je tento prvok namáhaný len osovou silou, nazýva sa prútový konečný prvok (LINK finite element). Ak na čiarovom konečnom prvku pôsobí vonkajšie zaťaženie len v jednej rovine, potom hovoríme o rovinnom nosníkovom prvku (2D BEAM finite element). Tento prvok prenáša ťah-tlak a rovinný ohyb. Ak čiarový prvok prenáša priestorové zaťaženie, hovoríme o priestorovom nosníkovom konečnom prvky (3D BEAM finite element). Komerčné programy MKP obsahujú aj zakrivené nosníkové konečné prvky – spravidla 3 až 5 uzlové, ktoré už však patria medzi špeciálne viacrozmerné konečné prvky.



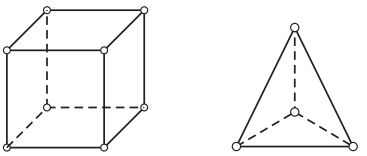
Obr. 2.37. Jednorozmerný konečný prvok

Ak možno geometriu a ostané parametre riešenej úlohy opísať pomocou dvoch súradníc, na jej diskretizáciu možno použiť plošné konečné prvky (2D SOLID element). Charakteristický rozmer plošného konečného prvku je jeho rovinná plocha a hrúbka. Základný plošný konečný prvok je trojuzlový trojuholníkový a štvoruzlový štvoruholníkový konečný prvok – Obr. 2.38. Tieto prvky patria do skupiny rovinných telesových prvkov, ktorých hrúbka môže byť konštantná alebo po uzlových bodoch premenlivá – prvky rovinnej napätosti, alebo jednotková – prvky rovinnej deformácie. Rovinnými prvkami možno modelovať taktiež prierezy rotačne symetrických úloh. Na modelovanie zakrivených oblastí možno použiť viacuzlové rovinné konečné prvky, napr. 6- uzlový trojuholník, resp 8- uzlový štvoruholník (Obr. 2.38).



Obr. 2.38. Plošné konečné prvky

Základný priestorový konečný prvok je 4-uzlový tetraéder, ktorý je analógom ku 3-uzlovému rovinnému trojuholníkovému konečnému prvku. Ďalší priestorový telesový prvok je 8-uzlový hexadrón (Obr. 2.39). Na modelovanie zakrivených plôch priestorového telesa možno použiť 10-uzlový tetraéder, resp. 20-uzlový hexadrón.



Obr. 2.39. Priestorové konečné prvky

Vo všeobecnosti sa konečné prvky s priamymi hranicami označujú ako lineárne a konečné prvky so zakrivenými hranicami ako prvky vyššieho stupňa. Spravidla to súvisí so stupňom polynómov použitých ako tvarové funkcie pri odvádzaní prvkových rovníc. Komerčné programy obsahujú veľké množstvo ďalších špeciálnych konečných prvkov, ktorých použitie je geometricky, materiálovo a fyzikálne orientované.

Kapitola 3

Konečné prvky na riešenie elastostatiky

3.1 Cieľ kapitoly

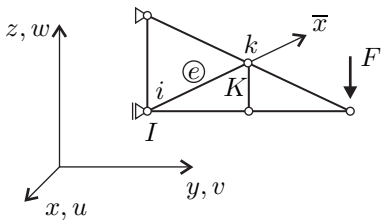
Cieľom tejto kapitoly je ukázať spôsob odvodenia prvkových rovníc základných typov konečných prvkov na riešenie pevnostných úloh jednoosovej a rovinnej napätosti pomocou prútového a nosníkového, ako aj telesového konečného prvku. Podobným spôsobom možno odvodiť prvkové rovnice ostatných typov konečných prvkov, ako sú telesové prvky priestorovej napätosti, škrupinové konečné prvky, ako aj iné špeciálne konečné prvky. Budú pritom dodržané podmienky lineárnej teórie pružnosti pre homogénny izotropický materiál, ako aj zákon superpozície účinkov.

3.2 Prútový konečný prvok

Tak, ako je zvykom v našej odbornej terminológii, budeme rozlišovať medzi jednoosovo namáhaným prútom – prútový konečný prvok (anglicky bar-element, nemecky Fachwerkstabelement) a rovinne, resp. priestorovo namáhaným prútom – nosníkový prvok (anglicky beam-element, nemecky Balkenelement). Prútový konečný prvok je vhodný len na analýzu prútových sústav, v ktorých sa predpokladá, že vnútorné a vonkajšie väzby predstavujú ideálne kĺby bez trenia. Tento predpoklad spôsobuje, že jednotlivé prúty sústavy sú namáhané len čistým ťahom, resp. tlakom. Nosníkové konečné prvky sú vhodné na modelovanie nosníkových sústav, ktoré môžu prenášať okrem namáhania osovými silami aj namáhanie na ohyb, šmyk i krútenie. Prúty a nosníky sú významné konštrukčné prvky nielen pri projektovaní veľkorozmerných konštrukcií v stavebníctve a strojárstve, v stavbe automobilov, mechanizmov a robotov, ale aj v projektovaní mikro-elektro-mechanických prvkov a systémov (MEMS) ako sú senzory, aktuátory a tiež bio- a nano-mechatronických prvkov a systémov.

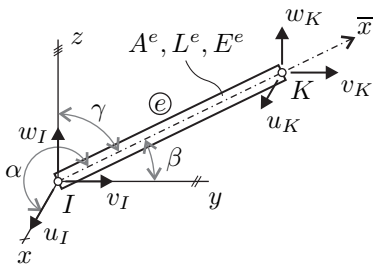
3.2.1 Prvková rovnica prúta v lokálnom a globálnom súradnicovom systéme

Na Obr. 3.1 je znázornená prútová sústava, pozostávajúca z prútov a styčníkov. Styčníky predstavujú body spojenia prútov medzi sebou, prípadne ich uchytenie o "rám" charakterizované vonkajšími väzbami. Všetky pripojenia považujeme za ideálne kĺby bez trenia. Vybratý prút (element, konečný prvok) e má uzlové body označené i, k vzhľadom na lokálnu os $\overline{x}$ (LSS – lokálny súradnicový systém) a I, K označené vzhľadom na globálny súradnicový systém x, y, z – (GSS). Jediná výslednica vnútorných síl v prúte je osová sila N.



Obr. 3.1. Prútová sústava

Typický element e (pre jednoduchosť volíme konštantný prierez) je charakterizovaný plochou prierezu A^e, dĺžkou prúta L^e a modulom pružnosti v ťahu (tlaku) E^e. Ďalej predpokladáme, že všetky vonkajšie zaťaženia prútov sú pretransformované do ich uzlových bodov (styčníkov). Účinkom vonkajších síl sa styčníky premiestňujú a ich nová poloha je určená posunutiami u, v a w, meranými vzhľadom na globálny súradnicový systém. Kladná orientácia globálnych statických a kinematických veličín je daná kladnou orientáciou globálnych osí x, y a z. Vyrezaný prút e s koncovými bodmi I a K je znázornený na Obr. 3.2.



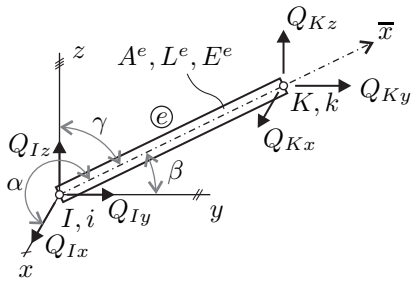
Obr. 3.2. Prútový prvok – posunutie uzlov prúta v GSS

Uzlové posunutia (stupne voľnosti pohybu) elementu v GSS predstavuje:
vektor posunutia uzla I: $\underline{a}_I = [u_I, v_I, w_I]^T$;
vektor posunutia uzla K: $\underline{a}_K = [u_K, v_K, w_K]^T$;
resp. vektor posunutia elementu (globálne veličiny budú v ďalšom označené so spodnou čiarou)

$$\underline{a}^e = [a_I, a_K]^T = [u_I, v_I, w_I, u_K, v_K, w_K]^T \tag{3.1}$$

Prútový prvok v priestore má teda 6 stupňov voľnosti, určené šiestimi zložkami posunutia jeho dvoch uzlových bodov.

Výslednicu vnútorných osových síl $N_I = -N_K$, za predpokladu existencie len uzlových zaťažení (spojité zaťaženie v poli prúta – napr. vlastná tiaž – sa musí ekvivalentne pretransformovať do uzlových síl), možno rozdeliť do zložiek vektora uzlových síl elementu (Obr. 3.3)



Obr. 3.3. Vektor uzlových síl v GSS

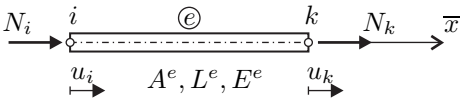
$$\underline{q}^e = [\underline{q}_I, \underline{q}_K] = [Q_{Ix}, Q_{Iy}, Q_{Iz}, Q_{Kx}, Q_{Ky}, Q_{Kz}]^T \tag{3.2}$$

pozostávajúceho z vektora síl v uzle I: $\underline{q}_I$, a v uzle K: $\underline{q}_K$. V zmysle všeobecnej deformačnej metódy bude medzi posunutiami uzlových bodov a uzlovými silami platiť globálny tuhostný vzťah

$$\underline{q}^e = \underline{K}^e \underline{a}^e \tag{3.3}$$

kde $\underline{K}^e$ je globálna matica tuhosti elementu s rozmerom [6 x 6], vektory posunutia a uzlových síl elementu sú stĺpcové matice rozmeru [6 x 1]. Globálna rovnica tuhosti sa určí z lokálneho tuhostného vzťahu prútového prvku.

Prút v LSS (Obr. 3.4) má dva stupne voľnosti, definované posunutiami uzlov i a k v smere lokálnej osi $\overline{x}$: u_i a u_k. Lokálny vektor posunutia elementu je



Obr. 3.4. Prút v LSS

$$\overline{\underline{a}}^e = [u_i, u_k]^T \tag{3.4}$$

a lokálny vektor uzlových síl je

$$\overline{\underline{q}}^e = [N_i, N_k]^T \tag{3.5}$$

Tuhostný vzťah v LSS je

$$N_i = -N_k = \frac{\Delta L^e A^e E^e}{L^e} = \underbrace{\frac{A^e E^e}{L^e}}_{k^e}[u_i - u_k] = k^e[u_i - u_k] \tag{3.6}$$

pričom ΔL^e je predĺženie (skrátenie) prúta a k^e je tuhosť prúta [N/m].
Rovnicu (3.6) možno vyjadriť v maticovom tvare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix}}_{\underline{\overline{q}}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix}}_{\underline{\overline{K}}^e} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ u_k \end{bmatrix}}_{\underline{\overline{a}}^e} = k^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_k \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

resp.

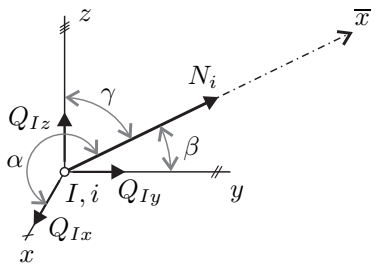
$$\underline{\overline{q}}^e = \underline{\overline{K}}^e \underline{\overline{a}}^e \tag{3.8}$$

kde lokálna matica tuhosti prútového prvku konštantného prierezu

$$\underline{\overline{K}}^e = \frac{A^e E^e}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = k^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

3.2.2 Transformačné vzťahy medzi lokálnymi a globálnymi veličinami

Transformácia uzlových síl
Na Obr. 3.5 je znázornená lokálna osová sila N_i v uzle i (I) spolu s jej zložkami do smerov osi GSS.



Obr. 3.5. Uzlové sily v uzle i, I

Medzi lokálnou silou N_i a jej globálnymi zložkami platí transformačný vzťah

$$N_i = Q_{Ix} \cos\alpha + Q_{Iy} \cos\beta + +Q_{Iz} \cos\gamma \tag{3.10}$$

resp. v skrátenom tvare

$$N_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{bmatrix}}_{\underline{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{Ix} \\ Q_{Iy} \\ Q_{Iz} \end{bmatrix}}_{\underline{q}_I} = \underline{T}\,\underline{q}_I \tag{3.11}$$

Podobne pre uzol k (K) $N_k = \underline{T}\,\underline{q}_K$.
Pre celý element máme

$$\overline{\underline{q}}^e = \begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{\cos\alpha \;\; \cos\beta \;\; \cos\gamma}^{\underline{T}} & \overbrace{0 \quad 0 \quad 0}^{\underline{0}} \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{\underline{0}} & \underbrace{\cos\alpha \;\; \cos\beta \;\; \cos\gamma}_{\underline{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{Ix} \\ Q_{Iy} \\ Q_{Iz} \\ Q_{Kx} \\ Q_{Ky} \\ Q_{Kz} \end{bmatrix} = \tag{3.12}$$

resp. v skrátenom tvare

$$\overline{\underline{q}}^e = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{T} & 0 \\ 0 & \underline{T} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^e} \underline{q}^e = \underline{T}^e \underline{q}^e \tag{3.13}$$

Výraz (3.13) predstavuje transformačný vzťah medzi lokálnymi a globálnymi silami v uzlových bodoch elementu, vyjadrený prostredníctvom transformačnej matice elementu $\underline{T}^e$.
Analogický vzťah platí aj medzi lokálnymi a globálnymi zložkami posunutia

$$\overline{\underline{a}}^e = \underline{T}^e \underline{a}^e \tag{3.14}$$

Dosadením (3.13) a (3.14) do (3.8) máme

$$\underline{T}^e \underline{q}^e = \overline{\underline{K}}^e \underline{T}^e \underline{a}^e \tag{3.15}$$

Vynásobením rovnice (3.15) inverznou maticou $\underline{T}^{e-1}$ (transformačná matica je maticou ortogonálnou $\underline{T}^{e^{-1}} = \underline{T}^{e^T}$) dostaneme globálny tuhostný vzťah (3.3) v tvare

$$\underline{q}^e = \underline{T}^{eT} \overline{\underline{K}}^e \underline{T}^e \underline{a}^e = \underline{K}^e \underline{a}^e \tag{3.16}$$

s globálnou maticou tuhosti konečného prvku

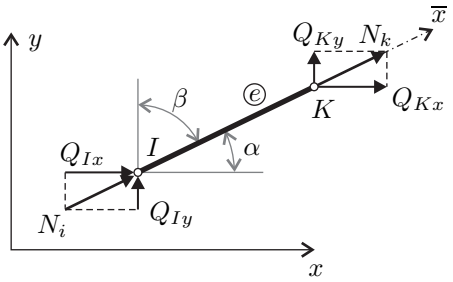
$$\underline{K}^e = \underline{T}^{eT} \overline{\underline{K}}^e \underline{T}^e \tag{3.17}$$

Globálnu maticu tuhosti prúta v zmysle všeobecnej deformačnej metódy dostaneme z lokálnej matice tuhosti prostredníctvom jej transformácie z LSS do GSS. Jej konkrétny tvar je:

a) Rovinná úloha
   Pre prút v rovine (Obr. 3.6) je $L^e = \sqrt{(x_K - x_I)^2 + (y_K - y_I)^2}$
   $\cos\alpha = \dfrac{x_K - x_I}{L^e} \qquad \cos\beta = \dfrac{y_K - y_I}{L^e} = \sin\alpha$

   Prút v rovine má 4 stupne voľnosti, z čoho vyplýva, že matica tuhosti (3.17) má rozmer [4 x 4]

$$\underline{K}^e = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} k^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{3.18}$$



Obr. 3.6. Prút v rovine

Po roznásobení matíc máme

$$\underline{K}^e = k^e \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ & \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \\ & & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ SYM & & & \sin^2\alpha \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

b) Priestorová úloha
Pre prút podľa Obr. 2.40 platí: $L^e = \sqrt{(x_K - x_I)^2 + (y_K - y_I)^2 + (z_K - z_I)^2}$
$\cos\alpha = \dfrac{x_K - x_I}{L^e}$ $\quad \cos\beta = \dfrac{y_K - y_I}{L^e}$ $\quad \cos\gamma = \dfrac{z_K - z_I}{L^e}$,
a matica tuhosti

$$\underline{K}^e = k^e \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma & -\cos^2\beta & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma \\ & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\beta & -\cos\beta\cos\gamma \\ & & \cos^2\gamma & -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & -\cos^2\gamma \\ S & & & \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma \\ & Y & & & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma \\ & & M & & & \cos^2\gamma \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

3.2.3 Riešenie jednorozmerných úloh

Všeobecná deformačná metóda, a teda aj metóda konečných prvkov, nie je vhodná na analytické riešenie konkrétnych, najmä zložitejších úloh. Pre lepšiu názornosť spôsobu riešenia metódou konečných prvkov s cieľom jeho algoritmizácie pre počítač uvedieme len postup riešenia jednoduchej jednorozmernej úlohy (rozhodujúci rozmer i zaťaženie sústavy je v smere pozdĺžnej osi), keď pri zostavení systému rovníc vystačíme len s lokálnymi vzťahmi.

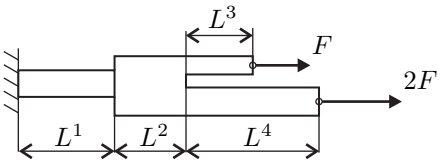
Príklad 3.1
Pre tiahlo podľa Obr. 3.7:

a) vytvorte model MKP,

b) stanovte tuhostný vzťah pre zvolené konečné prvky,

c) definujte neznáme veličiny úlohy a zostavte systém rovníc na ich výpočet,

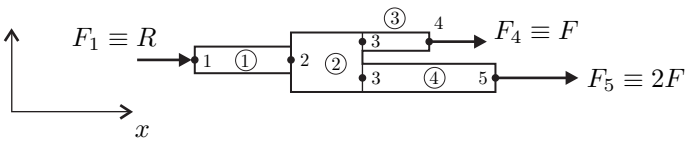
d) vypočítajte neznáme posunutia, väzbové reakcie, osové sily a napätia v jednotlivých prútoch.



Obr. 3.7. Jednorozmerná úloha

Riešenie:

a) Za predpokladu, že prierezové plochy jednotlivých častí tiahla sú oproti ich dĺžkam zanedbateľné, možno tiahlo nahradiť sústavou prútových prvkov ① až ④ a uzlových bodov 1 až 5. Uzlové sily (vrátane väzbových reakcií) označíme F_i , kde i je číslo uzla, v ktorom sily pôsobia (Obr. 3.8).



Obr. 3.8. Model MKP

b) Pre elementy ① až ④ platia lokálne tuhostné vzťahy (Obr. 3.4):

$$\underline{\overline{q}}^e = \begin{bmatrix} N_i \\ N_k \end{bmatrix}^e = k^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i \\ u_k \end{bmatrix}^e = \underline{\overline{K}}^e \underline{\overline{a}}^e \tag{3.21}$$

Ak globálna os x je paralelná s lokálnou osou $\overline{x}$, potom globálne a lokálne veličiny sú zhodné, t. j. $\underline{q}^e = \underline{\overline{q}}^e$, $\underline{a}^e = \underline{\overline{a}}^e$, $\underline{K}^e = \underline{\overline{K}}^e$

c) Neznámymi úlohy sú pozdĺžne posunutia uzlových bodov v smere lokálnej (globálnej) osi $\overline{x} \equiv x$. Vzhľadom na kompatibilitu posunutí a okrajové podmienky máme:

$$u_i^{(1)} = u_1 = 0;\ u_k^{(1)} = u_i^{(1)} = u_2;\ u_i^{(3)} = u_i^{(4)} = u_k^{(2)} = u_3;\ u_k^{(3)} = u_4;\ u_k^{(5)} = u_5$$

Číslo v zátvorke predstavuje číslo elementu. Pravý dolný index predstavuje číslo uzlového bodu. Máme teda 4 neznáme posunutia. Systém rovníc MKP na ich vyriešenie získame, v zmysle všeobecnej deformačnej metódy, z rovnováhy uzlových bodov. Myslenými rezmi uvoľníme uzlové body a elementy a do rezov vložíme osové

sily (Obr. 3.4).
Rovnováha uzlového bodu:

$$
\begin{array}{llll}
\text{č. 1:} & N_i^1 = F_1 & \Rightarrow & k^1u_1 - k^1u_2 = F_1 \\
\text{č. 2:} & N_k^1 + N_i^2 = 0 & \Rightarrow & -k^1u_1 + k^1u_2 + k^2u_2 - k^2u_3 = 0 \\
\text{č. 3:} & N_k^2 + N_i^3 + N_i^4 = 0 & \Rightarrow & -k^2u_2 + k^2u_3 + k^3u_3 - k^3u_4 + k^4u_3 - k^5u_5 = 0 \\
\text{č. 4:} & N_k^3 = F_4 & \Rightarrow & -k^3u_3 + k^3u_4 = F_4 \\
\text{č. 5:} & N_k^4 = F_5 & \Rightarrow & -k^4u_3 + k^5u_5 = F_5
\end{array}
\tag{3.22}
$$

Maticový tvar systému rovníc MKP (3.22) je

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 & 0 & 0 \\ -k^1 & k^1+k^2 & -k^2 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & k^2+k^3+k^4 & -k^3 & -k^4 \\ 0 & 0 & {}^-k^3 & k^3 & 0 \\ 0 & 0 & -k^4 & 0 & k^4 \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}}_{\underline{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}}_{\underline{F}} \tag{3.23}
$$

so šírkou polpásu matice tuhosti systému $m = 3$. V skrátenom zápise má (3.23) tvar

$$
\underline{K}\,\underline{a} = \underline{F} \tag{3.24}
$$

V tomto základnom systéme rovníc MKP vystupuje matica tuhosti systému (konštrukcie) $\underline{K}$, vektor neznámych uzlových posunutí konštrukcie $\underline{a}$ a vektor pravej strany uzlového zaťaženia konštrukcie $\underline{F}$.
Matica tuhosti konštrukcie $\underline{K}$ má vlastnosti:

- je symetrická,
- je pozitívne definitná,
- má pásovú štruktúru so šírkou polpásu m.

Vzniká súčtom špeciálnych, tzv. rozšírených matíc tuhosti jednotlivých elementov. Jej stupeň je daný počtom stupňov voľnosti systému (vrátane známych posunutí – napr. v tomto prípade aj s $u_1 = 0$).
Systém rovníc (3.23) je singulárny systém. Aby sme ho mohli vyriešiť, musíme ho redukovať, t. j. vynechať riadky a stĺpce v matici tuhosti, príslušiace známemu

posunutiu. V našom prípade má *redukovaný systém rovníc* tvar

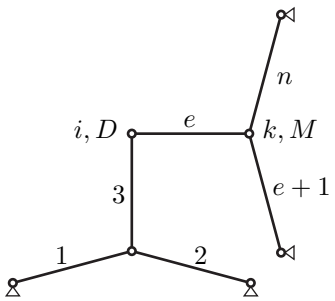
$$\underbrace{\begin{bmatrix} k^1+k^2 & -k^2 & 0 & 0 \\ -k^2 & k^2+k^3+k^4 & -k^3 & -k^4 \\ 0 & {}^-k^3 & k^3 & 0 \\ 0 & -k^4 & 0 & k^4 \end{bmatrix}}_{\underline{\widetilde{K}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}}_{\underline{\widetilde{a}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_4 \\ F_5 \end{bmatrix}}_{\underline{\widetilde{F}}} \tag{3.25}$$

alebo v skrátenom zápise $\underline{\widetilde{K}}\,\underline{\widetilde{a}} = \underline{\widetilde{F}}$, kde $\underline{\widetilde{K}}$ je redukovaná matica tuhosti systému, $\underline{\widetilde{a}}$ je redukovaný vektor uzlových posunutí a $\underline{\widetilde{F}}$ je redukovaný vektor uzlového zaťaženia konštrukcie. Dostali sme iným postupom systém rovníc zhodný s maticovou rovnicou (2.107).

d) Zo symetrického algebraického systému rovníc (3.25) možno určiť neznáme úlohy u_2, u_3, u_4 a u_5 známymi priamymi alebo iteračnými metódami.
Pomocou vypočítaných neznámych posunutí úlohy možno z prvej rovnice systému (3.23) vypočítať neznámu reakciu F_1, čiže $F_1 = R = -k^1 u_2$.
Osové sily v prútoch možno určiť z lokálneho tuhostného vzťahu (3.21), pričom $N_i^e = N_j^e = N^e$, a normálové napätie v prúte $\sigma^e = \dfrac{N^e}{A^e}$.

3.2.4 Zostavovanie matice tuhosti konštrukcie a systému rovníc MKP prútovej sústavy

Majme rovinnú sústavu uzlových bodov a prútov podľa Obr. 3.9, predstavujúca mikroaktuátor.



Obr. 3.9. Mikroaktuátor ako staticky určitá prútová sústava

Uzlovým bodom elementov pridelíme lokálne čísla i a k a globálne čísla 1, 2,..., D, M,..., NUMNODE (NUMNODE je celkový počet uzlových bodov). Celkovú maticu tuhosti konštrukcie $\underline{K}$ možno určiť pomocou súčtu tzv. rozšírených matíc tuhosti elementov

$\underline{K}^{e^*}$ (NUMEL je celkový počet elementov)

$$\underline{K} = \sum_{e=1}^{NUMEL} \underline{K}^{e^*} \tag{3.26}$$

Rozšírená matica tuhosti elementu má rovnaký rozmer ako celková matica tuhosti konštrukcie, t. j. [NDOF x NDOF], pričom NDOF je počet neznámych úlohy (počet stupňov voľnosti úlohy). Rozšírenie matice tuhosti elementu $\underline{K}^{e^*}$ sa vykoná tak, že sa doplní nulovými riadkami a stĺpcami tak, aby jej súčin s vektorom posunutí konštrukcie $\underline{K}^{e^*}\underline{a}$ dával rovnaké nenulové členy ako dáva súčin nerozšírenej matice tuhosti elementu s vektorom uzlových posunutí elementu, t. j. $\underline{K}^e\underline{a}^e$. Teda

$$\underline{K}^e\underline{a}^e = \underline{K}^{e^*}\underline{a} \tag{3.27}$$

Podobne, vektor uzlového zaťaženia konštrukcie dostaneme súčtom rozšírených vektorov uzlového zaťaženia elementov $\underline{F}^{e^*}$

$$\underline{F} = \sum_{e=1}^{NUMEL} \underline{F}^{e^*} \tag{3.28}$$

Postup zostavenia matice tuhosti konštrukcie z rozšírených matíc tuhosti elementu dokumentuje nasledujúci príklad.

Príklad 3.2
Pre tiahlo podľa Obr. 3.7 treba zostaviť maticu tuhosti konštrukcie z rozšírených matíc tuhosti elementov.
Podľa modelu MKP (Obr. 3.8) je NDOF = 5, NUMEL = 4. Matica tuhosti konštrukcie $\underline{K}$ i rozšírené matice tuhosti elementov $\underline{K}^{e^*}$ majú rozmer [5 x 5]. Rozšírená matica tuhosti pre:

- Element č. 1

$$\underline{K}^{1^*} = \begin{array}{c|ccccc} \text{uzol č.} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & \begin{matrix}(1,1)\\ k^1\end{matrix} & \begin{matrix}(1,2)\\ -k^1\end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \begin{matrix}(2,1)\\ -k^1\end{matrix} & \begin{matrix}(2,2)\\ k^1\end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- Element č. 2

$$\underline{K}^{2^*} = \begin{array}{c|ccccc} \text{uzol č.} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \overset{(2,2)}{k^2} & \overset{(2,3)}{-k^2} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \overset{(3,2)}{-k^2} & \overset{(3,3)}{k^2} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- Element č. 3

$$\underline{K}^{3^*} = \begin{array}{c|ccccc} \text{uzol č.} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \overset{(3,3)}{k^3} & \overset{(3,4)}{-k^3} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \overset{(4,3)}{-k^3} & \overset{(4,4)}{k^3} & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- Element č. 4

$$\underline{K}^{4^*} = \begin{array}{c|ccccc} \text{uzol č.} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \overset{(3,3)}{k^4} & 0 & \overset{(3,5)}{-k^4} \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & \overset{(5,3)}{-k^4} & 0 & \overset{(5,5)}{k^4} \end{array}$$

Súčtom $\underline{K} = \sum \underline{K}^{e^*} = \underline{K}^{1^*} + \underline{K}^{2^*} + \underline{K}^{3^*} + \underline{K}^{4^*}$ dostaneme maticu tuhosti konštrukcie, vystupujúcu v systéme rovníc (3.23).
Postup zostavenia matice tuhosti konštrukcie sa algoritmizuje nasledujúcim pravidlom.

Každému elementu e s globálnymi číslami uzlov D a M sa priradí vektor kódových čísel l^e, pomocou ktorého sa určí poloha členov globálnej matice tuhosti elementu v rozšírenej, resp. v konečnom dôsledku v celkovej matici tuhosti konštrukcie. Vektor kódových čísel závisí od typu úlohy:

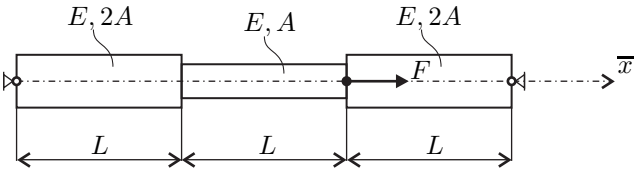
a) jednorozmerná úloha
$l^e \equiv \big[(D, M)\big]$,

b) rovinná úloha
$l^e \equiv \big[(2D-1), (2D), (2M-1), (2M)\big]^T$,

c) priestorová úloha
$l^e \equiv \big[(3D-2), (3D-1), (3D), (2M-2)(3M-1), (3M)\big]^T$.

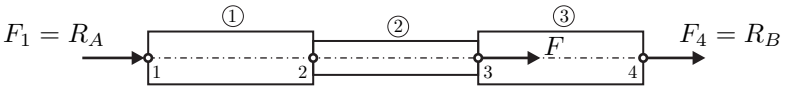
Zostavenie matice tuhosti konštrukcie z rozšírených matíc tuhosti, pomocou vektora kódových čísel, ozrejmíme na nasledujúcich príkladoch.

Príklad 3.3
Pre osadenú tyč podľa Obr. 3.10 zostavte celkový a redukovaný systém rovníc MKP, na výpočet posunutí uzlových bodov.



Obr. 3.10. Osadená tyč

Model MKP – jednorozmerná úloha



Obr. 3.11. MKP model tyče

Vektor posunutia uzlových bodov konštrukcie: $\underline{a} = \big[u_1, u_2, u_3, u_4\big]^T$.
Vektor uzlových síl konštrukcie: $\underline{F} = \big[F_1, 0, F_3, F_4\big]^T$.
Okrajové podmienky: $u_1 = u_4 = 0$.
Matica tuhosti elementu $e = 1, 2, 3, 4$: $\underline{K}^e = \overline{\underline{K}}^e = k^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
Stupeň voľnosti úlohy: NDOF $= 4 \Rightarrow$ rozmer rozšírených matíc a aj celkovej matice tuhosti je [4 x 4].
Vektor kódových čísiel pre $e = 1$:
$l^1 \equiv \big[(1, 2)\big] \equiv \big[(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\big]^T$, určuje pozíciu tuhosti $\pm k^1 = \dfrac{E\,2A}{L}$ v rozšírenej matici tuhosti elementu $\underline{K}^{1^*}$.

Vektor kódových čísiel pre $e = 2$:
$l^2 \equiv \big[(2,3)\big] \equiv \big[(2,2),(2,3),(3,3),(3,2)\big]^T$, určuje pozíciu tuhosti $\pm k^2 = \dfrac{E\,A}{L}$ v rozšírenej matici tuhosti elementu $\underline{K}^{2^*}$.
Vektor kódových čísiel pre $e = 3$:
$l^3 \equiv \big[(3,4)\big] \equiv \big[(3,3),(3,4),(4,4),(4,3)\big]^T$, určuje pozíciu tuhosti $\pm k^3 = \dfrac{E\,2A}{L}$ v rozšírenej matici tuhosti elementu $\underline{K}^{3^*}$.
Potom $\underline{K} = \sum\limits_{e=1}^{3} \underline{K}^{e^*} = \underline{K}^{1^*} + \underline{K}^{2^*} + \underline{K}^{3^*}$ resp.

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & k^1 & -k^1 & 0 & 0 \\
2 & -k^1 & k^1+k^2 & -k^2 & 0 \\
3 & 0 & -k^2 & k^2+k^3 & -k^3 \\
4 & 0 & 0 & -k^3 & k^3 \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & k^1 & -k^1 & 0 & 0 \\
 & -k^1 & k^1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
+
$$

$$
+
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & k^2 & -k^2 & 0 \\
3 & 0 & -k^2 & k^2 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
+
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & k^3 & -k^3 \\
 & 0 & 0 & -k^3 & k^3 \\
\hline
\end{array}
$$

Výsledný systém rovníc $\underline{K}\,\underline{a} = \underline{F}$ má tvar

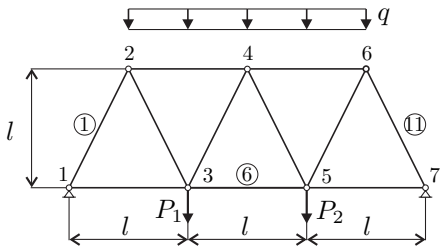
$$
\begin{bmatrix} k^1 & -k^1 & 0 & 0 \\ -k^1 & k^1+k^2 & -k^2 & 0 \\ 0 & -k^2 & k^2+k^3 & -k^3 \\ 0 & 0 & -k^3 & k^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A \\ 0 \\ F \\ R_B \end{bmatrix}
$$

Zohľadnením okrajových podmienok $u_1 = u_4 = 0$ dostaneme redukovaný systém rovníc $\underline{\widetilde{K}}\,\underline{\widetilde{a}} = \underline{\widetilde{F}}$,

$$
\begin{bmatrix} k^1+k^2 & -k^2 \\ -k^2 & k^2+k^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}
$$

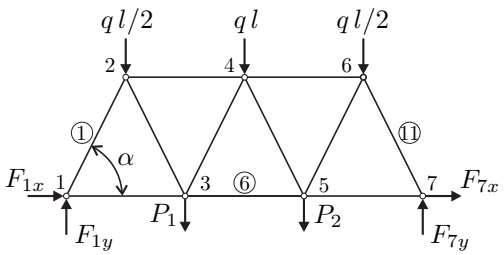
z ktorého možno vypočítať u_2 a u_3.

Príklad 3.4
Pre elementy ① a ⑥ rovinnej prútovej sústavy (Obr. 3.12) zostavte pomocou vektora kódových čísiel rozšírené matice tuhosti.
Všetky prúty $E\,A = konšt$, tuhosť $k^e = \dfrac{E\,A}{L^e}$.



Obr. 3.12. Rovinná prútová sústava

Model MKP – rovinná úloha



Obr. 3.13. Model prútovej sústavy pre MKP

Vektor posunutia uzlových bodov konštrukcie:

$\underline{a} = \left[u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}, \ldots, u_{7x}, u_{7y}\right]^T = \left[a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{13}, a_{14}\right]^T.$

Vektor uzlových síl konštrukcie:

$\underline{F} = \left[F_{1x}, F_{1y}, 0, -q\,l/2, 0, -P_1, 0, -q\,l, 0, -P_2, 0, -q\,l/2, F_{7x}, F_{7y}\right]^T$

Okrajové podmienky:

$u_{1x} = a_1 = 0; \quad u_{1y} = u_2 = 0; \quad u_{7x} = a_{13} = 0; \quad u_{7y} = u_{14} = 0$

Matica tuhosti elementov $e = 1 \sim 11$ má tvar 3.19.

Stupeň voľnosti úlohy: NDOF = 2 x 7 = 14 (každý uzlový bod má 2 stupne voľnosti).

Vektor kódových čísiel elementu č. 1:

$l^1 = \left[(1,2)\right] = \left[1,2,3,4\right]^T$

Pozícia členov globálnej matice tuhosti elementu č. 1 ($\alpha = \alpha_1$)

$$\underline{K}^1 = \frac{E\,A}{L^e}\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ & \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & -\sin^2\alpha \\ & & \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ & SYM & & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

v rozšírenej matici tuhosti $\underline{K}^{1^*}$ (s rozmerom [14 x 14]) je

$$\underline{K}^{1^*} = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) \end{bmatrix}$$

Všetky ostatné členy v $\underline{K}^{1^*}$ sa rovnajú nule.

Vektor kódových čísiel elementu č. 6:
$l^6 = \big[(3,5)\big] = \big[5,6,9,10\big]^T$
Podobne možno určiť globálnu maticu tuhosti elementu č. 6 ($\alpha = \alpha_6 = 0$). Pozície členov globálnej matice tuhosti elementu č. 6 sú

$$\underline{K}^{6^*} = \begin{bmatrix} (5,5) & (5,6) & (5,9) & (5,10) \\ (6,5) & (6,6) & (6,9) & (6,10) \\ (9,5) & (9,6) & (9,9) & (9,10) \\ (10,5) & (10,6) & (10,9) & (10,10) \end{bmatrix}$$

Podobne možno zostaviť rozšírené matice ostatných elementov.
Matica tuhosti konštrukcie $\underline{K} = \sum_{e=1}^{11} \underline{K}^{e^*}$ má tiež rozmer [14 x 14].

Príklad 3.5
Priestorová prútová konštrukcia má celkovo 5 uzlových bodov. Vybratý element e má globálne čísla uzlových bodov $D = 3$ a $M = 5$. Treba stanoviť polohu členov globálnej matice priestorového prútového elementu v rozšírenej matici tuhosti elementu (a teda aj v celkovej matici tuhosti konštrukcie).
Vektor kódových čísiel $l^e \equiv \big[(3,5)\big] \equiv \big[7,8,9,13,14,15\big]^T$ zodpovedá vektoru uzlových posunutí elementu $\underline{a}^e = \big[u_{3x}, u_{3y}, u_{3z}, u_{5x}, u_{5y}, u_{5z}\big]^T = \big[a_7, a_8, a_9, a_{13}, a_{14}, a_{15}\big]^T$.
Počet stupňov voľnosti úlohy NDOF = 3 x 5= 15 (5 uzlových bodov má po tri stupne voľnosti – posunutia v smere globálnych osí x, y, z).
Rozšírená matica tuhosti elementu má rozmer [15 x 15] a jej nenulové členy sú na pozíciách

$$\underline{K}^{e^*} = k^e \begin{bmatrix} (7,7) & (7,8) & (7,9) & (7,13) & (7,14) & (7,15) \\ & (8,8) & (8,9) & (8,13) & (8,14) & (8,15) \\ & & (9,9) & (9,13) & (9,14) & (9,15) \\ S & & & (13,13) & (13,14) & (13,15) \\ & Y & & & (14,14) & (14,15) \\ & & M & & & (15,15) \end{bmatrix}$$

Tieto pozície obsadia členy globálnej matice tuhosti elementu e

$$\underline{K}^e = k^e \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma & -\cos^2\beta & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma \\ & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos^2\beta & -\cos\beta\cos\gamma \\ & & \cos^2\gamma & -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & -\cos^2\gamma \\ S & & & \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma \\ & Y & & & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma \\ & & M & & & \cos^2\gamma \end{bmatrix}$$

Ako je zrejmé z uvedených príkladov 3.3, 3.4 a 3.5, postup riešenia je zhodný bez ohľadu na rozmernosť, statickú určitosť a zaťaženie konštrukcie. Preto ho možno zovšeobecniť a programovo spracovať. Pre elastostatickú analýzu konštrukcie je postupnosť krokov nasledovná:

a) Diskretizácia systému (konštrukcie) na konečné prvky a uzlové body – zostavenie modelu MKP.

b) Zostavenie lokálnych a globálnych matíc tuhosti a uzlového zaťaženia elementov.

c) Zostavenie celkového systému rovníc MKP pomocou globálnych matíc tuhosti a rozšírených vektorov uzlových síl elementov.

d) Zohľadnenie okrajových podmienok, ktoré vedie k redukcii celkového systému rovníc MKP na redukovaný systém rovníc.

e) Vyriešenie redukovaného systému rovníc MKP pre vektor neznámych uzlových posunutí.

f) Vypočítanie väzbových reakcií.

g) Výpočet osových síl a mechanického normálového napätia v prútoch.

h) Vyhodnotenie výsledkov a prípadná optimalizácia geometrických parametrov prútovej sústavy.

Počítačové spracovanie tohoto postupu umožňuje analyzovať zložité konštrukcie veľmi efektívne a presne.

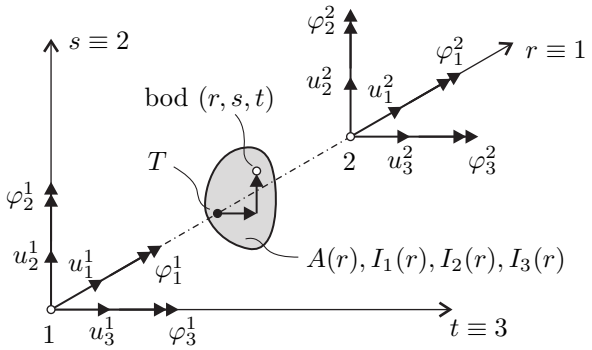
Poznámka: Ako vyplýva zo základných princípov statiky, jednoznačné riešenie možno dostať len pre statický určitú a staticky neurčitú (preurčenú) prútovú sústavu. To znamená, že statický systém musí byť nepohyblivý tuhým pohybom – vonkajšími a vnútornými väzbami musia byť odobraté minimálne všetky posuvné stupne voľnosti pohybu. Pre takúto sústavu dostaneme vždy toľko rovníc MKP, z ktorých možno vypočítať neznáme posunutia uzlových bodov a potom aj vonkajšie väzbové reakcie.

3.3 Nosníkový konečný prvok

Na statickú analýzu nosníkových a rámových konštrukcií je určený nosníkový konečný prvok. V tejto kapitole sa obmedzíme na lineárnu teóriu priameho prúta, založenú na Bernoulliho teórii šikmého ohybu a St. Venantovej teórii krútenia. Postup zostavenia základných vzťahov a rovníc MKP nosníkového prvku je zhodný s predchádzajúcim postupom pre jednoosovo namáhaný prútový prvok. V zmysle všeobecnej deformačnej metódy sa však zmení charakter a rozmer vektora uzlového posunutia, vektor uzlového zaťaženia i matica tuhosti elementu. Lokálny i globálny tuhostný vzťah sa rozšíri o zložky šikmého ohybu a krútenia prierezu prúta. Základné rovnice nosníkového konečného prvku možno zostaviť priamou tuhostnou metódou, z princípu minima potenciálnej energie, alebo z variačných princípov mechaniky kontinua. V tejto kapitole budú tieto rovnice zostavené z princípu minima potenciálnej energie, pričom budú použité tvarové funkcie vo forme hermiteovských polynómov.

3.3.1 3D - nosníkový konečný prvok

V zmysle predchádzajúcich predpokladov uvažujeme priamy dvojuzlový nosníkový prvok všeobecného uzavretého prierezu, konštantného, resp. premenlivého prierezu, na ktorý sa vzťahuje Bernoulliho teória ohybu a St. Venantova teória krútenia. Lokálny kartézsky súradnicový systém, ktorého počiatok leží v ťažisku prierezu v uzle č. 1, tvorí pozdĺžna os prúta $r \in (0, L)$ a osi s, t, tvoriace hlavné centrálne osi zotrvačnosti prierezu (Obr. 3.14).



Obr. 3.14. 3D – nosníkový konečný prvok

Prierez vo vzdialenosti r od bodu 1 je charakterizovaný plochou $A(r)$, kvadratickými momentami plochy k osi s a t – $I_2(r)$, $I_3(r)$ a odporovým momentom v krútení okolo osi r – $I_1(r)$ – (pre kruhový a medzikruhový prierez nosníka sa nazýva polárnym kvadratickým momentom prierezu a označuje sa I_p). Platí:

$$A(r) = \iint\limits_A dA \equiv \iint\limits_{s\ t} ds\, dt;\ I_p(r) = \int\limits_A \left(s^2 + t^2\right) dA;\ I_2(r) = \int\limits_A t^2 dA;\ I_3(r) = \int\limits_A s^2 dA$$

Odporový moment v krútení $I_1(r)$ možno pre ostatné typicky používané prierezy vypočítať obvyklým spôsobom známym z literatúry.

Každý uzlový bod má 6 stupňov voľnosti, po troch zložkách posunutia a troch natočeniach prierezu v zmysle osi lokálneho súradnicového systému.

Vektor posunutia vybraného bodu nosníka (r, s, t) vyjadríme pomocou tvarových funkcií $\underline{N}(r, s, t)$ a vektora posunutia uzlových bodov elementu:

$$\underline{u}(r,s,t) = \begin{bmatrix} u_1(r,s,t) \\ u_2(r,s,t) \\ u_3(r,s,t) \end{bmatrix} = \left[\underline{N}(r,s,t)\right] \cdot \left[u_1^1, u_2^1, u_3^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1, \varphi_3^1, u_1^2, u_2^2, u_3^2, \varphi_1^2, \varphi_2^2, \varphi_3^2\right]^T \tag{3.29}$$

resp. v skrátenom zápise $\underline{u}(r, s, t) = \underline{N}(r, s, t)\overline{\underline{a}}^e$, kde $\underline{N} = \underline{N}(r, s, t)$ je matica tvarových funkcií. Potom zložky tenzora deformácie $\underline{\varepsilon}(r, s, t) = \underline{B}^e\overline{\underline{a}}^e$ a lokálna matica tuhosti elementu $\overline{\underline{K}}^e = \int\limits_{V^e} \underline{B}^{eT}\underline{D}\,\underline{B}^e dV$, pričom $\underline{B}^e$ je transformačná matica pretvorenia a $\underline{D}$ je matica materiálových vlastností. Konkrétny tvar transformačnej matice závisí od typu tvarových funkcií a od zohľadnených zložiek tenzora deformácie.
V zmysle lineárnej teórie prúta sú zložky $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$; $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0$, t. j. prierezová plocha sa v priebehu deformačného procesu nemení, len sa posúva a natáča v smere a okolo lokálnych osí. Potom nenulové zložky pretvorenia sú

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1(r,s,t)}{\partial r} = u_{11} \neq 0 \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial u_2}{\partial r}\right] = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \neq 0 \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_3}{\partial r}\right] = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \neq 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

V praxi, ako bolo spomenuté, sú vo všetkých významnejších programových systémoch použité tvarové funkcie tzv. izoparametrických konečných nosníkových prvkov, ale hlavne tvarové funkcie tvaru hermiteovských interpolačných polynómov.

V ďalšom sa podrobnejšie zaoberáme s hermiteovským nosníkovým prvkom, ktorý dáva presnejšie výsledky. Jeho náhradné funkcie pre axiálne posunutie a uhol skrútenia sú lineárne polynómy, pre ohybové zložky posunutia sa používajú kubické hermiteovské interpolačné polynómy. Konkrétny tvar matice tvarových funkcií $\underline{N}$, ktorá má rozmer [3 x 12], je

$$\underline{N}(r,s,t) = \left[\begin{array}{cccccccccccc}
1-\frac{r}{L} & 6\left[\frac{r}{L}-\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]\frac{s}{L} & 6\left[\frac{r}{L}-\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]\frac{t}{L} & 0 & \left[1-4\frac{r}{L}+3\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]t & -\left[1-4\frac{r}{L}+3\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]s & \frac{r}{L} & -6\left[\frac{r}{L}-\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]\frac{s}{L} & -6\left[\frac{r}{L}-\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]\frac{t}{L} & 0 & -\left[2\frac{r}{L}-3\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]t & \left[2\frac{r}{L}-3\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]s \\
0 & 1-3\left(\frac{r}{L}\right)^2+2\left(\frac{r}{L}\right)^3 & 0 & -\left(1-\frac{r}{L}t\right) & 0 & \left[\frac{r}{L}-2\left(\frac{r}{L}\right)^2+\left(\frac{r}{L}\right)^3\right]L & 0 & 3\left(\frac{r}{L}\right)^2-2\left(\frac{r}{L}\right)^3 & 0 & -\frac{r}{L}t & 0 & -\left[\frac{r}{L}-\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]r \\
0 & 0 & 1-3\left(\frac{r}{L}\right)^2+2\left(\frac{r}{L}\right)^3 & \left(1-\frac{r}{L}\right)s & -\left[\frac{r}{L}-2\left(\frac{r}{L}\right)^2+\left(\frac{r}{L}\right)^3\right]L & 0 & 0 & 0 & 3\left(\frac{r}{L}\right)^2-2\left(\frac{r}{L}\right)^3 & \frac{r}{L}s & \left[\frac{r}{L}-\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]r & 0
\end{array}\right] \tag{3.31}$$

Transformačné vzťahy predstavujú v maticovom tvare výraz $\underline{\varepsilon}^e = \underline{B}^e \underline{a}^e$, čiže

$$\underline{\varepsilon}^e = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 6\left(\frac{1}{L}-\frac{2r}{L^2}\right)\frac{s}{L} & 6\left(\frac{1}{L}-\frac{2r}{L^2}\right)\frac{t}{L} & 0 & \left(-\frac{4}{L}-\frac{6r}{L^2}\right)t & -\left(-\frac{4}{L}-\frac{6r}{L^2}\right)s \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{s}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -6\left(\frac{1}{L}-\frac{2r}{L^2}\right)\frac{s}{L} & -6\left(\frac{1}{L}-\frac{2r}{L^2}\right)\frac{t}{L} & 0 & -\left(\frac{2}{L}-\frac{6r}{L^2}\right)t & \left(\frac{2}{L}-\frac{6r}{L^2}\right)s \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \varphi_1^1 \\ \varphi_2^1 \\ \varphi_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ \varphi_1^2 \\ \varphi_2^2 \\ \varphi_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Zovšeobecnený Hookov zákon $\underline{\sigma}^e = \underline{D}^e\, \underline{\varepsilon}^e$ pre priestorový nosník má maticový tvar

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \end{bmatrix}}_{\underline{\sigma}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}}_{\underline{D}^e} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix}}_{\underline{\varepsilon}^e} \tag{3.33}$$

kde τ_{11} je normálová zložka a τ_{12}, τ_{13} sú tangenciálne zložky napätia v priereze nosníka. Roznásobením matíc $\underline{B}^{eT}\underline{D}^e$ a $\underline{B}^e$ dostaneme výraz

$$\underline{B}^{eT}\underline{D}^e\, \underline{B}^e \tag{3.34}$$

ktorý slúži na výpočet členov lokálnej matice tuhosti.
Pre konštantný dvojnásobne symetrický prierez nosníka možno lokálnu maticu tuhosti získať priamou integráciou výrazu (3.34) cez objem elementu, pričom $dV = dr\, ds\, dt$ a $I_1(r) = I_1$, $I_2(r) = I_2$ a $I_3(r) = I_3$.

Jej konečný tvar je

$$
\underline{\overline{K}}^e = \begin{bmatrix}
\frac{E\,A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{E\,A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12E}{L^3}I_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{6E}{L^2}I_3 & 0 & -\frac{12E}{L^3}I_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{6E}{L^2}I_3 \\
0 & 0 & \frac{12E}{L^3}I_2 & 0 & -\frac{6E}{L^2}I_2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12E}{L^3}I_2 & 0 & -\frac{6E}{L^2}I_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{G}{L}I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G}{L}I_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6E}{L^2}I_2 & 0 & \frac{4E}{L}I_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{6E}{L^2}I_1 & 0 & \frac{2E}{L}I_2 & 0 \\
0 & \frac{6E}{L^2}I_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{4E}{L}I_3 & 0 & \frac{6E}{L^2}I_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{2E}{L}I_3 \\
-\frac{E\,A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E\,A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12E}{L^3}I_3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E}{L^2}I_3 & 0 & \frac{12E}{L^3}I_3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E}{L^2}I_3 \\
0 & 0 & -\frac{12E}{L^3}I_2 & 0 & \frac{6E}{L^2}I_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{12E}{L^3}I_2 & 0 & \frac{6E}{L^2}I_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{G}{L}I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G}{L}I_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6E}{L^2}I_2 & 0 & \frac{2E}{L}I_2 & 0 & 0 & 0 & \frac{6E}{L^2}I_2 & 0 & \frac{4E}{L}I_2 & 0 \\
0 & \frac{6E}{L^2}I_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{2E}{L}I_3 & 0 & -\frac{6E}{L^2}I_3 & 0 & 0 & 0 & \frac{4E}{L}I_3
\end{bmatrix} \tag{3.35}
$$

Pre pozdĺžne premenlivý prierez prebieha výpočet integrálov numericky, pričom sa odporúča minimálne trojbodová integrácia po dĺžke prúta (spravidla v počiatočnom a koncovom bode nosníka, a v jeho strede).

3.3.2 Rovinný nosníkový konečný prvok

Tento konečný prvok sa aplikuje na modelovanie rovinných nosníkových štruktúr. Spojnice ťažísk prierezu jednotlivých prútov, ako aj zaťaženie nosníkovej sústavy musí ležať v jednej rovine. V takomto prípade sústava prenáša len namáhanie ohybom v rovine sústavy ako aj namáhanie čistým ťahom a tlakom. Vplyv namáhania čistým šmykom sa u typických nosníkových štruktúr spravidla zanedbáva.
Pri rovinnom ohybe nosníka (v rovine ohybu tvorenej osami r, s) sa vzťah pre výpočet vektora posunutia vybraného bodu nosníka redukuje na tvar $\underline{u}(r,s) = \underline{N}(r,s)\,\underline{a}^e$, čiže

$$
\begin{bmatrix} u_1 \\ \hdashline u_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c}
1-\frac{r}{L} & 6\left[\frac{r}{L}-\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]\frac{s}{L} & \left[1-4\frac{r}{L}+3\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]s & \frac{r}{L} & -6\left[\frac{r}{L}-\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]\frac{s}{L} & \left[2\frac{r}{L}-3\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]s \\
\hdashline
0 & 1-3\left(\frac{r}{L}\right)^2+2\left(\frac{r}{L}\right)^3 & 1-3\left(\frac{r}{L}\right)^2+2\left(\frac{r}{L}\right)^3 & 0 & 3\left(\frac{r}{L}\right)^2-2\left(\frac{r}{L}\right)^3 & \left[\frac{r}{L}-\left(\frac{r}{L}\right)^2\right]r
\end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ \hdashline u_2^1 \\ \hdashline \varphi_3^1 \\ \hdashline u_1^2 \\ \hdashline u_2^2 \\ \hdashline \varphi_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.36}
$$

Transformačný vzťah medzi pretvorením a posunutím bodu nosníka $\underline{\varepsilon}^e = \underline{B}^e \underline{a}^e$ sa redukuje na jedinú rovnicu (v tomto prípade $2\varepsilon_{12} = 0$, lebo $u_{1,2} = -u_{2,1}$, $\varepsilon_{13} = 0$):

$$\left[\varepsilon_{11}\right] = \left[-\frac{1}{L} \vdots 6\left(\frac{1}{L} - \frac{2r}{L^2}\right)\frac{s}{L} \vdots -\left(-\frac{4}{L} + \frac{6r}{L^2}\right)s \vdots \frac{1}{L} \vdots -6\left(\frac{1}{L} - \frac{2r}{L^2}\right)\frac{s}{L} \vdots \left(\frac{2}{L} - \frac{6r}{L^2}\right)s \right] \cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \varphi_3^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ \varphi_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Maticu tuhosti dostaneme z integrálu

$$\overline{\underline{K}}^e = \int_{V^e} \underline{B}^{eT} \underline{D}^e \, \underline{B}^e dV \tag{3.38}$$

pričom $\underline{D}^e \equiv E$ – modul pružnosti v ťahu.
Ako z odvodených vzťahov vidno, táto formulácia matice tuhosti tak pri priestorovom ako aj pri rovinnom nosníkovom prvku nezohľadňuje vplyv priečnych síl.
Predpokladajme rovinný nosníkový prvok obdĺžnikového prierezu šírky b a lineárne premenlivej výšky $h = h_i + (h_j - h_i)\dfrac{r}{L} = h(r)$, kde h_i, resp. h_j je výška prierezu na začiatku, resp. v koncovom uzlovom bode.
Kvadratický moment plochy prierezu k osi ohybu

$$I = I(r) = \frac{b\,h^3(r)}{12} = I_i(I + a\,\xi)^3 \tag{3.39}$$

pričom $\xi = \dfrac{r}{L}$ a $a = \dfrac{\Delta h}{h_i} = \dfrac{h_j - h_i}{h_i}$. I_i je kvadratický moment prierezovej plochy v uzle i.
Priamou integráciou výrazu (3.38) pre lineárne premenlivý prierez nosníka dostaneme maticu tuhosti rovinného prvku v tvare

$$\overline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA_m}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_m}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_i}{L^3}k_1 & -\frac{6EI_i}{L^2}k_2 & 0 & -\frac{12EI_i}{L^3}k_1 & \frac{6EI_i}{L^2}k_4 \\ & & \frac{4EI_i}{L}k_3 & 0 & -\frac{6EI_i}{L^2}k_2 & \frac{2EI_i}{L}k_5 \\ S & & & \frac{EA_m}{L} & 0 & 0 \\ & Y & & & \frac{12EI_i}{L^3}k_1 & -\frac{6EI_i}{L^2}k_4 \\ & & M & & & \frac{4EI_i}{L}k_6 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

kde prierezová plocha $A_m = b\dfrac{h_i + h_j}{2}$; $\vartheta = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{h_j}{h_i} - 1\right)$, a ďalej

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \left(1 + \frac{3}{2}\vartheta L + \frac{5}{6}\vartheta^2 L^2 + \frac{21}{60}\vartheta^3 L^3\right); \quad k_2 = \left(1 + \vartheta L + \frac{21}{60}\vartheta^2 L^2 + \frac{1}{5}\vartheta^3 L^3\right) \\
k_3 &= \left(1 + \frac{3}{4}\vartheta L + \frac{2}{5}\vartheta^2 L^2 + \frac{1}{10}\vartheta^3 L^3\right); \quad k_4 = \left(1 + 2\vartheta L + \frac{17}{10}\vartheta^2 L^2 + \frac{1}{2}\vartheta^3 L^3\right) \\
k_5 &= \left(1 + \frac{3}{2}\vartheta L + \frac{13}{10}\vartheta^2 L^2 + \frac{2}{5}\vartheta^3 L^3\right); \quad k_6 = \left(1 + \frac{9}{4}\vartheta L + \frac{19}{10}\vartheta^2 L^2 + \frac{11}{20}\vartheta^3 L^3\right)
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Ak je prierez konštantný, potom $k_1 = k_2 = \cdots = k_6 = 1$ a (3.42) predstavuje lokálnu maticu rovinného nosníkového prvku konštantného prierezu. Lokálne MKP rovnice rovinného konečného prvku koštantného prierezu majú teda tvar:

$$
\underline{\overline{q}}^e = \begin{bmatrix} \overline{N}_i \\ \overline{Q}_{yi} \\ \overline{M}_i \\ \overline{N}_k \\ \overline{Q}_{yk} \\ \overline{M}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\
 & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\
S & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 & Y & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\
 & & M & & & \frac{4EI}{L}
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{\varphi}_i \\ \overline{u}_k \\ \overline{v}_k \\ \overline{\varphi}_k \end{bmatrix} = \underline{\overline{K}}^e \underline{\overline{a}}^e
\tag{3.42}
$$

Maticu tuhosti rovinného nosníkového prvku aj s vplyvom priečnej sily možno dostať v tvare

$$
\underline{\overline{K}}^e = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 & \frac{12EI}{L^3(1+12\rho)} & -\frac{6EI}{L^2(1+12\rho)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+12\rho)} & \frac{6EI}{L^2(1+12\rho)} \\
 & & \frac{EI}{L}\left(1 + \frac{3}{1+12\rho}\right) & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+12\rho)} & \frac{EI}{L}\left(\frac{3}{1+12\rho} - 1\right) \\
S & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 & Y & & & \frac{12EI}{L^3(1+12\rho)} & -\frac{6EI}{L^2(1+12\rho)} \\
 & & M & & & \frac{EI}{L}\left(1 + \frac{3}{1+12\rho}\right)
\end{bmatrix}
\tag{3.43}
$$

Vplyv priečných síl sa najčastejšie zohľadňuje tzv. korekčným faktorom ρ, ktorého veľkosť závisí od geometrického tvaru prierezu nosníka. Spôsob jeho výpočtu a jeho veľkosť možno nájsť v klasickej literatúre o pružnosti a pevnosti materiálu. Matica tuhosti

podľa (3.43) charakterizuje tzv. Timošenkov nosník. Vplyv priečnych síl sa prejavuje najmä pri krátkych nosníkoch, ako aj pri multivrstvových a funkcionálne gradovaných nosníkoch, ktoré sa používajú aj v projektovaní moderných mechatronických prvkov a systémov. V týchto prípadoch sa s vplyvom priečnych síl na deformáciu a napätosť nosníka musí uvažovať. Ak dosadíme v (3.43) za $\rho = 1$, dostaneme maticu tuhosti klasického rovinného Euler-Bernoulliho nosníka (3.42).
Pri riešení rovinných a priestorových nosníkových sústav sa podobne ako pri analýze prútových sústav musia zostavovať prvkové rovnice v globálnom súradnicovom systéme. Po ich rozšírení sa z nich zostaví celkový systém rovníc MKP, z ktorého po jeho redukcii možno vypočítať globálne zložky vektora posunutia a vnútorných síl. Tieto sa potom pretransformujú do lokálnych súradnicových systémov a slúžia na posúdenie tuhosti a pevnosti analyzovanej sústavy. Vzhľadom na rozsah tejto publikácie sa touto problematikou podrobnejšie zaoberať nebudeme. Možno ju však nájsť v iných rozsiahlejších monografiách zameraných na aplikáciu MKP vo výpočtovej mechanike tuhých telies.
Treba sa však zmieniť, že komerčné programy MKP obsahujú rôzne typy konečných prvkov. Ak nosníková štruktúra má aj zakrivené časti, treba ich modelovať zakrivenými nosníkovými prvkami, ktoré majú 3 až 5 uzlových bodov. Zakrivené časti nosníkových štruktúr však možno dostatočne presne modelovať jemnejšou sieťou priamych dvojuzlových nosníkových prvkov, medzi ktoré patrí aj hore uvedený hermitovský konečný prvok. Špeciálne nosníkové konečné prvky boli vyvinuté pre modelovanie nosníkov premenlivej tuhosti spôsobenej buď zmenou geometrie nosníkov alebo materiálových vlastností nosníka – kompozitné nosníky.

3.3.3 Príklady aplikácie nosníkových prvkov v mechatronike

Nosníkové konečné prvky sa používajú na modelovanie rovinných a priestorových nosníkov a nosníkových sústav. Výsledkom elasto-statickej analýzy je deformácia, priebeh vnútorných síl a mechanických napätí v mechanickej sústave. Pri 3D úlohách treba vyhodnotiť priebeh osových síl, ohybových momentov, priečnych síl a krútiacich momentov. Komerčné softvéry ponúkajú nielen výpočet zložiek mechanických napätí a hlavných napätí priestorovej napätosti, ale aj výpočet porovnávacích (tiež redukovaných, resp. efektívnych) napätí spravidla podľa 1. a 5. pevnostnej hypotézy. Pri vyhodnocovaní porovnávacieho napätia v jednotlivých prierezoch nosníka treba potom zvážiť, či konštrukcia je zhotovená z krehkého alebo húževnatého materiálu.
Jednoduchšia situácia je pri riešení rovinných nosníkových sústav, keď strednice prierezov jednotlivých časti sústavy, ako aj jej zaťaženie ležia v jednej rovine. V tomto prípade nastáva v bodoch sústavy rovinná napätosť spôsobená osovou a priečnou silou, a ohybovým momentom. Ak sú jednotlivé nosníky sústavy dostatočne dlhé oproti prierezovej ploche, šmykové napätie od priečnych síl sa pri dimenzovaní obvykle zanedbáva. V tomto prípade výsledné normálové napätie sa rovná súčtu normálového napätia od osovej sily a ohybového momentu. Ak mechanickú sústavu dimenzujeme z pevnostnej podmienky, potom výsledné normálové napätie v nebezpečnom priereze nesmie prekročiť hodnotu dovoleného normálového namáhania. Pri mechatronických systémoch, ako sú napr. MEMS, je častou návrhovou veličinou deformácia sústavy. V tomto prípade treba zobrať do úvahy, či požadované posunutia sú dostatočne malé na to aby spĺňali podmienku malých posunutí a rotácií, z ktorej formulácia lineárne-elastických nosníkových konečných prvkov vychádza. Pri štíhlych konštrukciách dochádza ku ko-

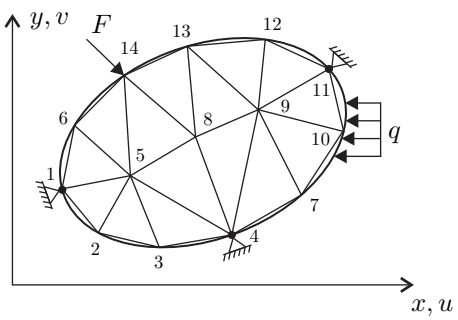
nečným posunutiam a natočeniam, preto pri takýchto systémoch treba použiť geometricky a prípadne aj materiálovo nelineárnu analýzu.
Pri dimenzovaní nosníkových štruktúr sa vychádza obvykle z pevnostnej podmienky. Pri rovinných i priestorových úlohách sa obvykle vplyv šmykových napätí od priečných síl zanedbáva. Pri rovinnej úlohe sa zisťuje nebezpečný prierez, kde je kombinácia normálového napätia od ohybového momentu a osovej sily najnepriaznivejšia. Pri priestorovej nosníkovej konštrukcii treba okrem normálových napätí zahrnúť do pevnostnej podmienky aj šmykové napätia od krútiaceho momentu. V tomto prípade treba na dimenzovanie prierezu použiť príslušnú hypotézu pevnosti (pre húževnatý materiál spravidla 5. hypotézu pevnosti a pre krehký materiál 1. hypotézu pevnosti). Na dimenzovanie otvorených a uzatvorených tenkostenných profilov treba použiť špeciálne teórie nato určené.

3.4 Konečné prvky spojitého telesa

Konečné prvky spojitého telesa – anglicky *solid finite elements* – slúžia na modelovanie priestorových telies, ktorých žiaden rozmer nie je zanedbateľný, a tak jeho odozvu na vonkajšie zaťaženie nemožno riešiť prútovými, resp. nosníkovými konečnými prvkami ako jednorozmernú úlohu. Vzhľadom na rozsah tejto publikácie sa v tejto kapitole sústredíme na odvodenie prvkovej rovnice lineárneho plošného trojuholníkového konečného prvku. Podobným spôsobom možno odvodiť prvkové rovnice štvoruholníkového rovinného prvku, i lineárneho priestorového tetrahédra a hexadrónu. V druhej časti tejto kapitoly bude uvedený postup zostavania prvkovej rovnice, tzv. izoparametrického rovinného konečného prvku s tvarovými funkciami vyššieho stupňa.

3.4.1 Lineárny trojuholníkový konečný prvok

Na Obr. 3.15 je znázornená rovinná oblasť (stena) s plochou S a s konštantnou hrúbkou steny h. Jej materiálové vlastnosti, geometria, deformačné a silové okrajové podmienky a ostatné parametre možno opísať v súradniciach x a y. Plocha oblasti S je rozdelená na trojuholníkové konečné prvky pospájané v uzlových bodoch č. 1 až 14. Po zaťažení majú uzlové body, s výnimkou upevnených uzlov, možnosť deformačného posunutia u a v v smere súradnicových osí – v každom uzlovom bode sú dva translačné stupne voľnosti pohybu.



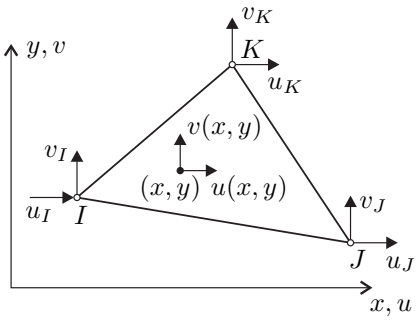
Obr. 3.15. Diskretizácia rovinnej oblasti na rovinné trojuholníkové konečné prvky

Prvková rovnica bude zostavená pre vybraný konečný prvok e s uzlovými bodmi I, J a K, ktorých súradnice sú (x_I, y_I), (x_J, y_J), (x_K, y_K).
Vektory posunutia uzlových bodov prvku e sú (Obr. 3.16):

$$\underline{a}_I = \begin{bmatrix} u_I \\ v_I \end{bmatrix} \qquad \underline{a}_J = \begin{bmatrix} u_J \\ v_J \end{bmatrix} \qquad \underline{a}_K = \begin{bmatrix} u_K \\ v_K \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

z ktorých možno zostaviť vektor posunutia konečného prvku so šiestimi stupňami voľnosti

$$\underline{a}^e = \begin{bmatrix} \underline{a}_I \\ \underline{a}_J \\ \underline{a}_K \end{bmatrix} = \left[u_I, v_I, u_J, v_J, u_K, v_K\right] \tag{3.45}$$



Obr. 3.16. Vybraný konečný prvok

Ľubovoľný bod prvku so súradnicami $(x,\ y)$ sa posunie v smere súradnicových osí o zložky posunutia $u(x,y)$ a $v(x,y)$, ktoré sa vyjadria ako lineárne polynomické funkcie s konštantnými parametrami

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} = \underline{\phi} \cdot \underline{\alpha} \tag{3.46}$$

Vektor parametrov $\underline{\alpha}$ možno určiť z okrajových podmienok pre posunutie uzlových bodov elementu:

$$\begin{aligned} x \equiv x_I,\ y \equiv y_I \ &\Rightarrow\ u(x,y) = u_I,\ v(x,y) = v_I \\ x \equiv x_J,\ y \equiv y_J \ &\Rightarrow\ u(x,y) = u_J,\ v(x,y) = v_J \\ x \equiv x_K,\ y \equiv y_K \ &\Rightarrow\ u(x,y) = u_K,\ v(x,y) = v_K \end{aligned} \tag{3.47}$$

Potom z (3.46) vyplýva

$$
\begin{aligned}
u_I &= \alpha_1 + \alpha_2 x_I + \alpha_3 y_I \\
u_J &= \alpha_1 + \alpha_2 x_J + \alpha_3 y_J \\
u_K &= \alpha_1 + \alpha_2 x_K + \alpha_3 y_K \\
\\
v_I &= \alpha_4 + \alpha_5 x_I + \alpha_6 y_I \\
v_J &= \alpha_4 + \alpha_5 x_J + \alpha_6 y_J \\
v_K &= \alpha_4 + \alpha_5 x_K + \alpha_6 y_K
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

resp. v maticovom tvare:

$$
\begin{bmatrix} u_I \\ v_I \\ u_J \\ v_J \\ u_K \\ v_K \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & x_I & y_I & 0 & 0 & 0 \\
1 & x_J & y_J & 0 & 0 & 0 \\
1 & x_K & y_K & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & x_I & y_I \\
0 & 0 & 0 & 1 & x_J & y_J \\
0 & 0 & 0 & 1 & x_K & y_K
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}
\tag{3.49}
$$

Formálne platí

$$
\underline{a}^e = \underline{A}\,\underline{\alpha} \;\Rightarrow\; \underline{\alpha} = \underline{A}^{-1}\underline{a}^e
\tag{3.50}
$$

Po ďalšej úprave

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} u_I \\ u_J \\ u_K \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_J & y_J \\ 1 & x_K & y_K \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_J & y_J \\ 1 & x_K & y_K \end{bmatrix}^{-1}
\cdot
\begin{bmatrix} u_I \\ u_J \\ u_K \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} v_I \\ v_J \\ v_K \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_J & y_J \\ 1 & x_K & y_K \end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_J & y_J \\ 1 & x_K & y_K \end{bmatrix}^{-1}
\cdot
\begin{bmatrix} v_I \\ v_J \\ v_K \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

dostaneme vzťah na výpočet parametrov vektora $\underline{\alpha}$

$$
\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_J & y_J \\ 1 & x_K & y_K \end{bmatrix}^{-1}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_J & y_J \\ 1 & x_K & y_K \end{bmatrix}^{-1}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} u_I \\ u_J \\ u_K \\ v_I \\ v_J \\ v_K \end{bmatrix}
\tag{3.52}
$$

Inverziu submatice súradníc uzlových bodov možno vykonať analyticky známym postupom. Dosadením (3.52) do (3.46) a po príslušných matematických úpravách možno dostať konkrétnu závislosť posunutí ľubovoľného bodu konečného prvku na posunutiach jeho uzlových bodov v tvare

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_I & 0 & N_J & 0 & N_K & 0 \\ 0 & N_I & 0 & N_J & 0 & N_K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_I \\ v_I \\ u_J \\ v_J \\ u_K \\ v_K \end{bmatrix} = \underline{N}\,\underline{a}^e \tag{3.53}$$

V (3.53) je $\underline{N}$ matica tvarových funkcií (shape functions). Pre uzol I platí:

$$\begin{aligned} N_I &= (a_I + b_I x + c_I y)/(2S^e) \\ a_I &= x_J y_K - x_K y_J \\ b_I &= y_J - y_K \\ c_I &= x_K - x_J \end{aligned} \tag{3.54}$$

Cyklickou zámenou indexov I, J, a K v (3.54) možno získať tvarové funkcie N_J a N_K pre uzlové body J a K. Je zrejmé, že tieto tvarové funkcie sú lineárne polynómy.
V zmysle postupu uvedenému v kapitole 2.2, teraz možno určiť transformačný vzťah medzi zložkami pretvorenia a zložkami posunutia v ľubovoľnom bode konečného prvku. Zohľadnením rovníc pružnosti pre rovinnú napätosť máme

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \gamma_z = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{3.55}$$

Vykonaním naznačených derivácií výrazu (3.53) dostaneme transformačný vzťah

$$\underline{\varepsilon}^e = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_J}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_K}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_J}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_K}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} & \frac{\partial N_J}{\partial y} & \frac{\partial N_J}{\partial x} & \frac{\partial N_K}{\partial y} & \frac{\partial N_K}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_I \\ v_I \\ u_J \\ v_J \\ u_K \\ v_K \end{bmatrix} = \underline{B}\,\underline{a}^e \tag{3.56}$$

Matica $\underline{B}$ v (3.56) sa nazýva transformačná matica deformácie, ktorú možno ešte upraviť do jednoduchšieho tvaru vykonaním derivácií tvarových funkcií (3.54). Napríklad, pre uzol I dostaneme:

$$\begin{aligned} N_I &= (a_I + b_I x + c_I y)/(2S^e) \\ \frac{\partial N_I}{\partial x} &= b_I/2S^e \qquad \frac{\partial N_I}{\partial y} = c_I/2S^e \\ \frac{\partial N_J}{\partial x} &= b_J/2S^e \qquad \frac{\partial N_J}{\partial y} = c_J/2S^e \\ \frac{\partial N_K}{\partial x} &= b_K/2S^e \qquad \frac{\partial N_K}{\partial y} = c_K/2S^e \end{aligned} \tag{3.57}$$

Analogicky možno dostať vzťahy pre zvyšné derivácie tvarových funkcií v transformačnej matici. Potom (3.56) má tvar

$$\underline{\varepsilon}^e = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2S^e} \begin{bmatrix} b_I & 0 & b_J & 0 & b_K & 0 \\ 0 & c_I & 0 & c_J & 0 & c_K \\ c_I & b_I & c_J & b_J & c_K & b_K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_I \\ v_I \\ u_J \\ v_J \\ u_K \\ v_K \end{bmatrix} = \underline{B}\,\underline{a}^e \tag{3.58}$$

Ako možno vidieť, transformačná matica $\underline{B}$ je maticou konštánt vypočítaných zo súradníc uzlových bodov konečného prvku.
V ďalšom kroku sa vyjadrí Hookov zákon rovinnej napätosti

$$\underline{\sigma}^e = \underline{D}^e \underline{\varepsilon}^e = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = \underline{D}^e\,\underline{B}\,\underline{a}^e \tag{3.59}$$

Teraz možno zostaviť maticu tuhosti konečného prvku rovinnej napätosti podľa vzťahu

$$\underline{K}^e = \int_{V^e} \underline{B}^{eT} \underline{D}^e \underline{B}^e dV \tag{3.60}$$

kde integrant je konštantná matica a objem $V^e = S^e t$ s konštantnou hrúbkou h. Potom maticu tuhosti možno vypočítať zo vzťahu

$$\underline{K}^e = \left[\underline{B}^{eT} \underline{D}^e \underline{B}^e\right] S^e h \tag{3.61}$$

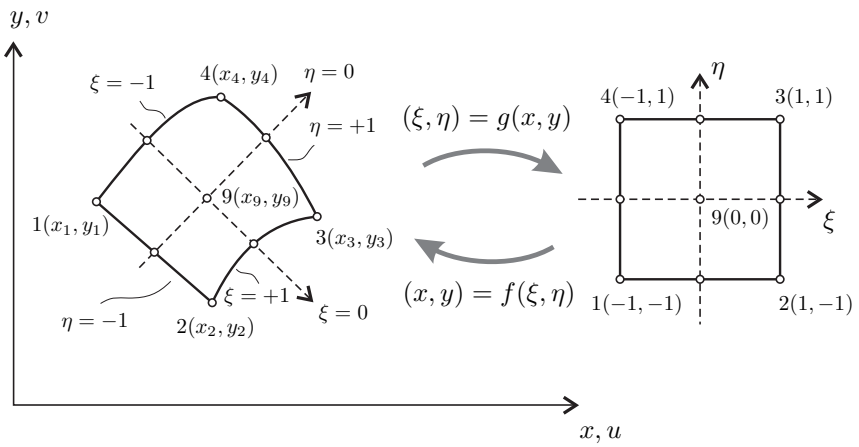
ktorá bude mať rozmer 6 x 6. Prvková rovnica, vyjadrujúca závislosť medzi uzlovými silami $\underline{F}^e$ a posunutiami v uzloch má tvar

$$\underline{K}^e \underline{a}^e = \underline{F}^e \tag{3.62}$$

Rozšírením matice tuhosti a vektora uzlových síl všetkých prvkov na rozmer zhodný s počtom stupňov voľnosti pohybu vo všetkých uzlových bodov a ich sčítaním dostaneme celkový systém rovníc, ktorý po zohľadnení okrajových podmienok možno vyriešiť. Z vypočítaných posunutí uzlových bodov možno potom určiť potrebné mechanické napätia. Podobným spôsobom sa postupuje aj pri zostavení prvkovej rovnice štvoruholníkového konečného prvku rovinnej napätosti. Pri odvádzaní plošných prvkov rovinnej deformácie a rotačnej symetrie treba zohľadniť špecifiká týchto špeciálnych stavov napätia a deformácie.

3.4.2 Izoparametrické rovinné konečné prvky

Výhodou lineárnych rovinných konečných prvkov je, že maticu tuhosti možno určiť bez numerickej integrácie. Nevýhodou však je, že zakrivené hranice rovinnej oblasti možno diskretizovať len približne. Zvýšenie počtu uzlových bodov vyžaduje použiť za tvarové funkcie polynómy vyššieho stupňa. Matica tuhosti sa potom musí vypočítať integrovaním podľa (3.60), čo nie je jednoduchá záležitosť. Preto vznikol koncept izoparametrických konečných prvkov, ktorých názov sa zakladá na skutočnosti, že tvarové funkcie na vyjadrenie posunutia ľubovoľného bodu konečného prvku v závislosti od posunutí jeho uzlových bodov sú rovnaké ako pri vyjadrení súradníc ľubovoľného bodu konečného prvku na súradniciach jeho uzlových bodov. Skutočná oblasť konečného prvku (rovinná alebo priestorová), definovaná v kartézskych súradniciach, sa jedno-jednoznačne pretransformuje na jednoduchšiu jednotkovú oblasť (napr. štvorec alebo kocku), na ktorej sa integrácia matice tuhosti vykoná numericky pomocou Gausovej integračnej metódy. Na Obr. 3.17 je znázornená transformácia 9-uzlového rovinného konečného prvku v súradniciach (x, y) na 9-uzlový konečný prvok s prirodzenými súradnicami (ξ, η). Plocha prvku v kartézskom systéme súradníc je $S(x, y)$ a v prirodzenom je $S(\xi, \eta)$.



Obr. 3.17. Transformácia 9-uzlového rovinného konečného prvku

Pre kartézske súradnice ľubovoľného bodu po transformácii platí:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{bmatrix} \tag{3.63}$$

pričom prirodzené súradnice $\xi \in \langle -1, 1 \rangle$; $\eta \in \langle -1, 1 \rangle$.

Čiže

$$\underline{x}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & N_3(\xi,\eta) & \dots & N_9(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi,\eta) & 0 & N_2(\xi,\eta) & 0 & \dots & 0 & N_9(\xi,\eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_9 \\ y_9 \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

pričom $N_i(\xi,\eta)$, $i \in \langle 1,9 \rangle$ sú aproximačné polynómy (tvarové funkcie) rovinných izoparametrických konečných prvkov. Pre štvoruzlový izoparametrický konečný prvok ($i = 4$) majú tvar (bilineárne polynómy) – Obr. 3.18:

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \tag{3.65}$$

a rovnica (3.64) sa zredukuje na:

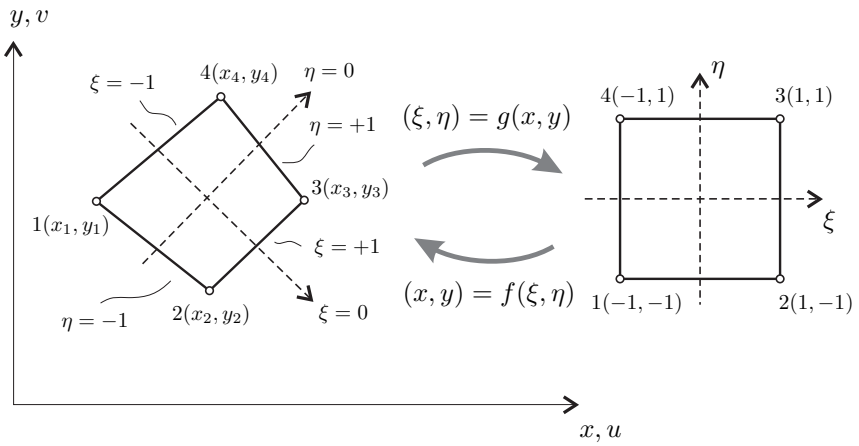
$$\underline{x}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi,\eta) & 0 & \dots & N_4(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi,\eta) & \dots & 0 & N_4(\xi,\eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

Tento konečný prvok sa označuje tiež ako bilineárny rovinný izoparametrický.
Pre 8 a 9 uzlový konečný prvok sú náhradné funkcie bikvadratické (prirodzené súradnice vystupujú v druhej mocnine) a majú tvar:

$$N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\xi(1-\xi)(1-\eta)\eta, \quad N_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\xi(1+\xi)(1-\eta)\eta \quad \dots \quad \text{atď.}$$

Jacobiho matica transformácie súradníc má tvar

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.67}$$



Obr. 3.18. Štvoruzlový izoparametrický konečný prvok

Jej determinant je

$$\det\underline{J} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} \tag{3.68}$$

Transformačný vzťah medzi plochami prvkov v kartézskom a prirodzenom súradnicovom systéme je

$$dS(x, y) = dx\, dy = dS(\xi, \eta) \det\underline{J} = d\xi\, d\eta\, det\underline{J} \tag{3.69}$$

Posunutia uzlových bodov pre 4-uzlový bilineárny konečný prvok potom sú

$$\underline{u}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta) & 0 & \dots & N_4(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & N_1(\xi, \eta) & \dots & 0 & N_4(\xi, \eta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

Podobne, ako pri lineárnych konečných prvkoch, treba vyjadriť

a) vzťah medzi posunutím ľubovoľného bodu elementu a posunutiami uzlových bodov:

$$\underline{u}(\xi, \eta) = \underline{N}\, \underline{a}^e = \underline{N}(\xi, \eta)\, \underline{a}^e \tag{3.71}$$

b) vzťah medzi pretvorením a posunutiami uzlových bodov

$$\underline{\varepsilon}(\xi, \eta) = \underline{B}(\xi, \eta)\, \underline{a}^e \tag{3.72}$$

c) maticu tuhosti

$$\underline{K}^e = \int_V \underline{B}^T(\xi,\eta)\,\underline{D}\,\underline{B}(\xi,\eta)\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \underline{B}^T(\xi,\eta)\,\underline{D}\,\underline{B}(\xi,\eta)\,h\,\det\underline{J}\,d\xi\,d\eta \tag{3.73}$$

Transformačný vzťah medzi objemami konečných prvkov je

$$dV = h\,\det\underline{J}\,d\xi\,d\eta \tag{3.74}$$

Vzťah (3.71) vychádza z rovnice 3.70. Jej deriváciou dostaneme vzťah (3.72) v tvare

$$\underline{\varepsilon}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(\xi,\eta) \\ \varepsilon_y(\xi,\eta) \\ \gamma_z(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{3.75}$$

Pričom matica derivácií tvarových funkcii podľa kartézskych súradníc je transformačná matica $\underline{B}$. Keďže tvarové funkcie závisia od prirodzených súradníc, najskôr sa vykonajú ich derivácie podľa týchto súradníc. Napríklad, pre i-tú tvarovú funkciu $N_i = N_i(\xi,\eta) = N_i[x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)]$ možno dostať:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{3.76}$$

Rovnicu (3.76) možno zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.77}$$

s Jacobiho maticou transformácie $\underline{J}$ (tiež sa nazýva Jacobián).
Po inverzii (3.77) dostaneme požadované derivácie tvarových funkcií podľa kartézskych súradníc

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

Napríklad, pre bilineárny štvoruzlový prvok a pre $i = 1$ možno dostať:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\right] = \frac{1}{4}(-1+\eta) = \frac{1}{4}(\eta - 1) \tag{3.79}$$

Analogicky možno vykonať ďalšie derivácie tvarových funkcií (3.77). Inverzný tvar Jacobiánu je:

$$\underline{J}^{-1} = \frac{1}{\det\underline{J}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \tag{3.80}$$

kde $\det\underline{J}$ je determinant Jacobiánu: Dosadením derivácií (3.79) a výrazu (3.80) do (3.78) máme:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det\underline{J}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

Derivovaním súradnice $y(\xi,\eta)$ v (3.66) podľa prirodzených súradníc dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(\xi,\eta)}{\partial \xi} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_3}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_4}{\partial \xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} y_k \\ \frac{\partial y(\xi,\eta)}{\partial \eta} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_3}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} y_k \end{aligned} \tag{3.82}$$

kde $N_k \equiv N_k(\xi,\eta)$, a $k \in \langle 1,4 \rangle$ je číslo uzlového bodu. Podobne možno derivovať súradnicu $x(\xi,\eta)$. Potom v rovnici (3.81) pre uzol $k = 1$ máme:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{\det\underline{J}} \left[\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \eta} y_k - \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi} y_k \right] \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

Po vyjadrení všetkých derivácií dostaneme všetky členy transformačnej matice $\underline{B}(\xi,\eta)$ s rozmerom [2 x 8]. Potom možno podľa (3.73) numericky vypočítať maticu tuhosti pomocou Gaussovej kvadratúry

$$\underline{K}^e = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \underline{G}(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{3.84}$$

s integrantom $\underline{G}(\xi,\eta) = \underline{B}^T(\xi,\eta)\, \underline{D}\, \underline{B}(\xi,\eta)\, h \det\underline{J}$.
Analogickým spôsobom možno postupovať pri zostavovaní matice tuhosti priestorového 8 až 20 uzlového izoparametrického konečného prvku.

3.5 Špeciálne konečné prvky

Voľba použitého konečného prvku závisí od geometrie analyzovaného telesa, od okrajových podmienok (uloženie a zaťaženie) a materiálového modelu. Komerčné softvéry ponúkajú vo svojej knižnici rôzne varianty prútových prvkov (typu LINK), nosníkových konečných prvkov (typu BEAM) a prvkov spojitého telesa (typu SOLID). Zástupcovia týchto skupín konečných prvkov boli prezentovaní v predošlých podkapitolách. Týmito základnými typmi konečných prvkov možno modelovať a analyzovať väčšinu mechatronických prvkov a systémov či už ako v jednej samostatnej fyzikálnej alebo v multifyzikálnej oblasti. Z hľadiska elastostatiky a termoelasticity mechatronických prvkov sú veľmi dôležité škrupinové konečné prvky (typu SHELL). Nimi možno modelovať priestorové systémy, ktorých rozmer v jednom smere (spravidla hrúbka) je oproti ostaným rozmerom malá. Výhodou týchto prvkov je jednoduché modelovanie aj zakrivených povrchov malej konštantnej ale aj premenlivej hrúbky. Z hľadiska modelovania a simulácie elastodynamických úloh sú výhodné kombinované konečné prvky (typu COMBINATION) a prvky sústredenej hmotnosti (typu STRUCTURAL MASS). Kombinovaný konečný prvok slúži na modelovanie pružín s tlmením a prvky sústredenej hmotnosti slúžia na zohľadnenie hmotných telies uložených na nosnej konštrukcii – napr. seizmická hmota na senzore zrýchlenia, hmotnosť pohonu na nosnom ráme automobilu, a pod. Podrobný zoznam typov konečných prvkov a ich charakteristík možno nájsť v helpových častiach komerčných softvérov metódy konečných prvkov.

Kapitola 4

Elastodynamika a MKP

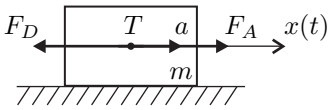
4.1 Úvod a motivácia

Cieľom podkapitoly 4.2 je poukázať na rozdielnosť účinkov statických a dynamických síl na poddajné telesá. V analytických výpočtoch je zohľadnený vplyv zotrvačných síl prostredníctvom dynamického koeficienta pri priamočiarom zrýchlenom a rotačnom pohybe. V závere podkapitoly je naznačený výpočet rotujúceho ramena konštantného napätia. V podkapitole 4.3 sa zaoberáme kmitaním pružných sústav. Sú v nej opísané základné veličiny kmitania a ich jednotky ako aj odvodené rovnice voľného kmitania. Analytickou metódou je riešené vlastné kmitanie pružného prúta v pozdĺžnom a priečnom smere, ako aj rotačné kmitanie sústavy s jedným stupňom voľnosti pohybu. Poukazuje sa na vplyv vlastnej tiaže konštrukcie na frekvenciu vlastného kmitania. V ďalšej časti tejto podkapitoly sa zaoberáme vynúteným kmitaním a jeho parametrami získanými riešením pohybových rovníc. Je znázornená amplitúdovo-frekvenčná charakteristika harmonického kmitania a je vysvetlený súčiniteľ naladenia, ktorého veľkosť stanovuje odolnosť dynamickej sústavu voči rezonančným stavom kmitania.

4.2 Zohľadnenie dynamických síl pri elasto-dynamických analýzach

Pri riešení lineárnych statických úloh pružnosti a pevnosti mechanických prvkov a sústav sa predpokladá časová nezávislosť zaťažujúcich síl. Výpočet deformácie a vnútorných síl prebehne v jednom kroku pre danú geometriu, materiál a okrajové podmienky (predpísané posunutia a vonkajšie zaťaženia na okraji mechanického prvku alebo mechanickej sústavy). Mechanická sústava sa nachádza v statickej rovnováhe ak sa nepohybuje alebo vykonáva rovnomerný priamočiary pohyb (bez zrýchlenia). Zaťažujúce sily narastú z nulovej hodnoty na konštantnú statickú hodnotu. Pre tento stav sa vypočíta pružná deformácia a mechanické napätia. Ako príklad možno uviesť stojací automobil alebo priamočiaro a konštantnou rýchlosťou sa pohybujúci automobil.
Dynamické namáhanie vznikne vtedy, ak mechanická sústava alebo jej časť sa pohybuje priamočiaro so zrýchlením, alebo vykonáva krivočiary pohyb. Tento pohyb je spôso-

bený dynamickým (časovo premenlivým) zaťažením, ktoré môže byť náhodné alebo harmonické. Dynamické namáhanie má najčastejšie charakter zotrvačných a odstredivých síl. Ako príklad možno uviesť zrýchľujúci alebo spomaľujúci pohyb automobilu. Uvažujme hmotné teleso s hmotnosťou m [kg] ktoré sa pohybuje priamočiaro po podložke bez trenia zrýchlením a [ms^{-2}]. Za čas t prekoná dráhu $x(t)$ Obr. 4.1. Podľa 2. Newtonovho zákona, pohyb telesa je spôsobený zrýchľujúcou silou $F_A = m\,a$ [N], pôsobiacej v ťažisku telesa T.



Obr. 4.1. Priamočiary zrýchlený pohyb telesa

Proti orientácii pohybu (zrýchlenia) pôsobí doplnková zotrvačná sila, nazývaná tiež ako d´Alembertová sila o veľkosti F_D. Teleso sa pod účinkom tých síl nachádza v dynamickej rovnováhe. Z podmienky rovnováhy síl do osi x vyplýva

$$F_A - F_D = 0 \tag{4.1}$$

Po dosadení za zrýchľujúcu silu dostaneme d´Alembertovú zotrvačnú silu

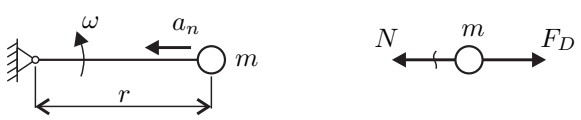
$$F_D = F_A = m\,a = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{4.2}$$

Uvažujme teraz rotačný pohyb po kružnici hmotného telesa o hmotnosti m konštantnou uhlovou rýchlosťou (tiež uhlová frekvencia) ω [rad/s] – Obr. 4.2. Teleso je pripevnené ku stredu otáčania tyčou dĺžky r. Pri kruhovom pohybe vzniká dostredivé zrýchlenie v smere normály ku kruhovej dráhe telesa – a_n. Proti tomuto zrýchleniu pôsobí odstredivá sila F_D. V myslenom reze tyče (tesne za uchytením telesa) pôsobí vnútorná osová sila $N = m\,r\,\omega^2$. Z podmienok dynamickej rovnováhy vyplýva:

$$F_D - N = 0 \tag{4.3}$$

A po dosadení za osovú silu dostaneme doplnkovú odstredivú silu

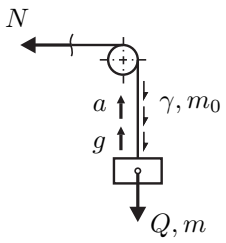
$$F_D = N = m\,r\,\omega^2 \tag{4.4}$$



Obr. 4.2. Rovnomerný kruhový pohyb

Účinkom d´Alembertovej sily vznikajú oproti statickým účinkom doplnkové deformácie a mechanické napätia. Tieto dynamické účinky môžu pri veľkých hmotnostiach a zrýchleniach vysoko prekračovať statické účinky.

Ako vidíme, doplnkové dynamické sily úzko súvisia s hmotnosťou pohybujúcej sa mechanickej sústavy. Hmotnosť mechanickej sústavy sa skladá z vlastnej hmotnosti mechanickej sústavy ako aj z hmotnosti ostatných telies, s ktorými mechanický systém manipuluje, resp. sú s ním spojené. Na Obr. 4.3 je na lane zavesené teleso o hmotnosti m, ktoré je zdvíhané vertikálnym zrýchlením a prostredníctvom lana s vlastnou hmotnosťou m_0. Ďalej, $\gamma = \rho\, g\, A$ [N/m] je merná tiaž lana (ρ je merná hmotnosť lana a g je tiažové zrýchlenie, A je prierezová plocha lana, $Q = m\, g$ je tiaž bremena m). Ak je vlastná hmotnosť lana v porovnaní s hmotnosťou zdvíhaného telesa malá, potom ju môžme v rovniciach dynamickej rovnováhy zanedbať. V opačnom prípade ju musíme do rovníc rovnováhy zahrnúť, čím sa riešenie dynamickej rovnováhy analytickou metódou komplikuje.



Obr. 4.3. Mechanická sústava s uvažovaním vlastnej hmotnosti

Riešenie dynamických účinkov v pevnostných a tuhostných analýzach možno rozdeliť na tieto typy úloh:

a) zohľadnenie účinkov zotrvačných síl do statických rovníc rovnováhy;

b) kmitanie pružných sústav;

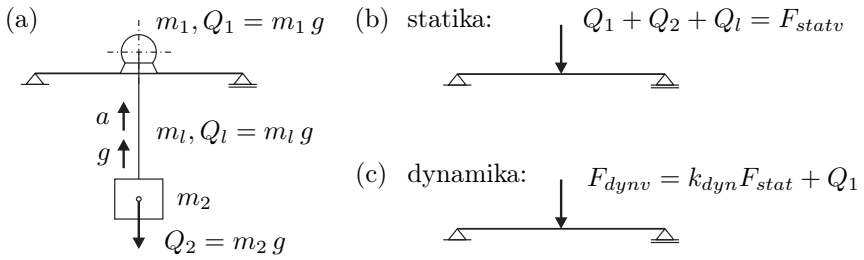
c) namáhanie rázom.

4.2.1 Zohľadnenie účinkov zotrvačných síl

Ak tiažové zrýchlenie g a zrýchlenie (spomalenie) a majú rovnaký smer, účinok zotrvačných a gravitačných síl je kvalitatívne rovnaký a je ho možno superponovať. V analytických výpočtoch sa zavádza pojem "dynamický koeficient", ktorým sa úmerne zvyšuje veľkosť statického zaťaženia a úloha sa potom rieši metódami elastostatiky. Ak sila F, normálové napätie σ, šmykové napätie τ, posunutie δ sú statické účinky, potom dynamické účinky sú $F_{dyn} = k_{dyn}F$, $\sigma_{dyn} = k_{dyn}\sigma$, $\tau_{dyn} = k_{dyn}\tau$, $\delta_{dyn} = k_{dyn}\delta$, kde $k_{dyn} = 1 + a/g$ je dynamický koeficient. Ak a je rôznobežné s g, potom treba pri superpozícii účinkov zohľadniť ich vektorový charakter.

Príklad 4.1
Na nosníku (Obr. 4.4a) je uložený pohon s hmotnosťou m_1, ktorý dvíha na lane bremeno s hmotnosťou m_2 so zrýchlením a. Hmotnosť lana, ktorá je závislá od polohy zdvíhaného bremena je m_l. Tiažové zrýchlenie je g. Treba určiť statickú a dynamickú silu pôsobiacu na nosník v mieste uloženia pohonu pri zdvíhaní bremena.

Riešenie:
Podľa Obr. 4.4b, statická sila $F_{stat} = (m_2 + m_l)g$. Výsledná statická sila pôsobiaca na nosník je $F_{statv} = F_{stat} + m_1 g$ (Obr. 4.4b).
Dynamická sila $F_{dyn} = F_{stat} k_{dyn}$, pričom k_{dyn} je dynamický koeficient. Výsledná sila pôsobiaca na nosník pri zdvíhaní bremena je $F_{dynv} = F_{dyn} + m_1 g$ (Obr. 4.4c).



Obr. 4.4. Statické a dynamické namáhanie nosníka

Poznámka: tiažová sila pohonu $Q1 = m_1 g$ sa nenásobí dynamickým koeficientom, pretože hmota pohonu sa nepohybuje. Pri dimenzovaní nosníka treba ešte do miesta uloženia pohonu vložiť krútiaci moment pohonu M, ktorý vzniká dôsledkom zdvíhania bremena navíjaním lana na vavíjací bubon a namáha dodatočne nosník na ohyb. Pri presnom riešení tejto úlohy treba vziať do úvahy aj spojité zaťaženie od vlastnej tiaže nosníka. Pri spúšťaní treba vo vzťahu pre dynamický súčiniteľ dosadiť zrýchlenie a so záporným znamienkom. Pre prípad $a = -g$ je nosník namáhaný len statickou silou F_{statv}. Je zrejmé, že dimenzovanie prierezu nosníka musí vychádzať z najväčšej hodnoty dynamickej sily, ktorá vzniká pri zdvíhaní bremena s najdlhšou aktuálnou dĺžkou lana. Ak zanedbáme vlastnú hmotnosť lana, potom statická sila pôsobiaca na nosník je $F_{stat} = m_2 g$ a dynamická sila je $F_{dyn} = F_{stat} k_{dyn}$.

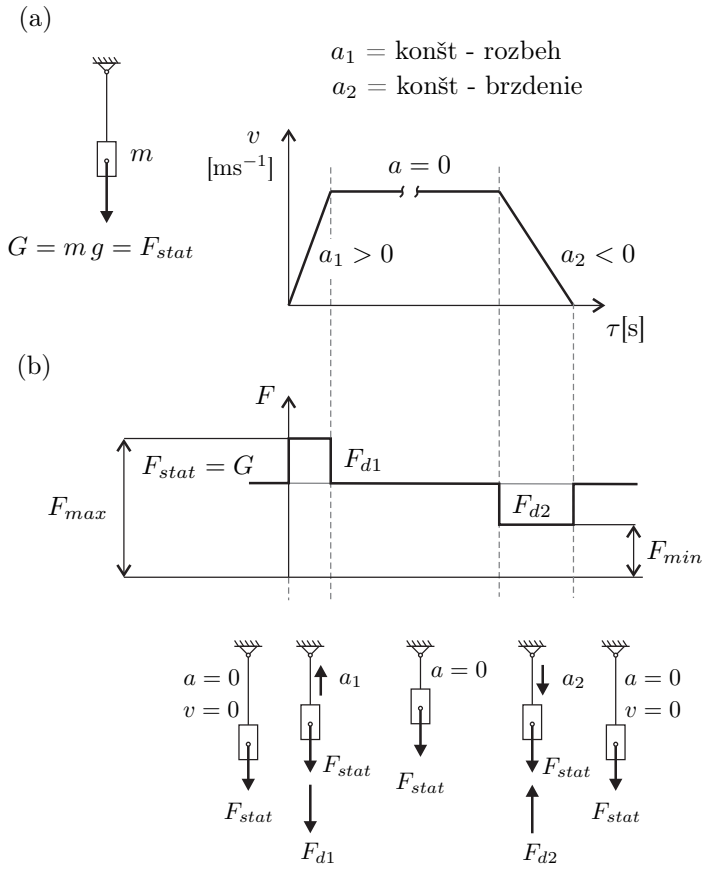
Príklad 4.2
Treba určiť dynamickú silu v lane výťahu pri:

a) rovnomerne zrýchlenom rozbehu ($a_1 > 0$), konštantnej rýchlosti zdvihu ($a = 0$) a rovnomerne spomalenom brzdení ($a_2 < 0$) pri zastavovaní výťahu (Obr. 4.5);

b) rovnomernom rozbehu ($a_1 > 0$), konštantnej rýchlosti spúšťania ($a = 0$) a rovnomernom spomalení ($a_2 < 0$) pri zastavovaní výťahu (Obr. 4.6).

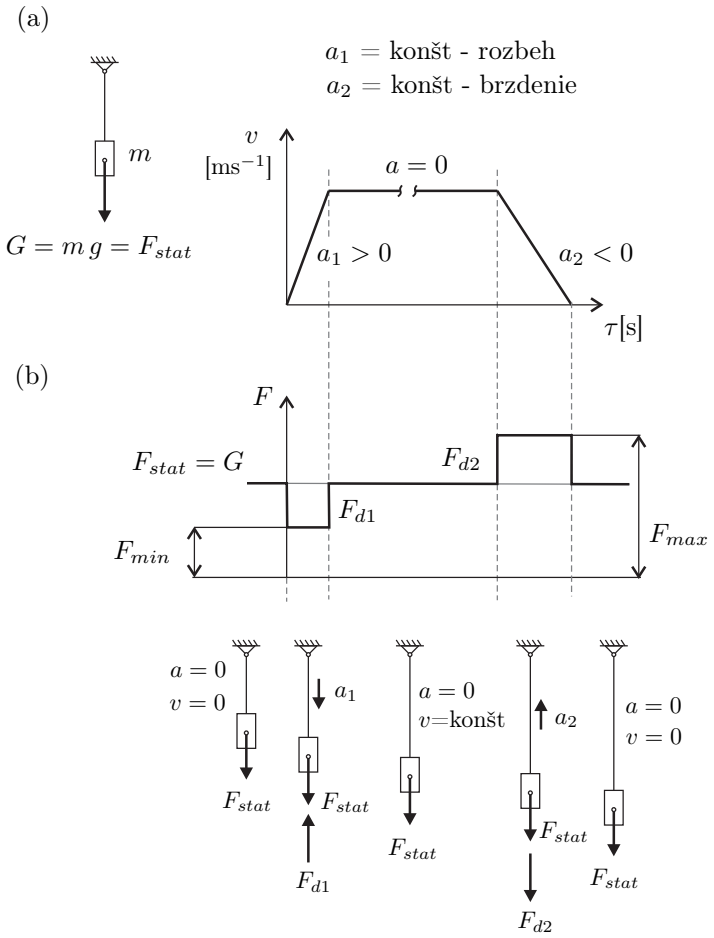
Predpokladá sa, že absolútna hodnota najväčšieho zrýchlenia (spomalenia) je menšia ako je hodnota tiažového zrýchlenia g. Vlastná tiaž kabínky s posádkou je $G = m\, g$, kde m je hmotnosť kabínky s posádkou.

Na Obr. 4.5a je znázornený priebeh rýchlosti zdvíhania kabínky v od času τ s tromi fázami zdvihu – rozbeh, zdvíhanie a brzdenie.
Na Obr. 4.5b je znázornený priebeh dynamickej sily F_{dyn} v závislosti od času τ v jednotlivých fázach zdvíhania. Ako vidieť, maximálna dynamická sila je vo fáze rovnomerne zrýchleného rozbehu.



Obr. 4.5. Dynamika zdvíhania kabínky výťahu

Na Obr. 4.6a je znázornený priebeh rýchlosti spúšťania kabínky v od času τ s tromi fázami zdvihu – rozbeh, spúšťanie a brzdenie.
Na Obr. 4.6b je znázornený priebeh dynamickej sily F_{dyn} v závislosti od času τ v jednotlivých fázach spúšťania. Ako vidieť, maximálna dynamická sila je vo fáze rovnomerne spomaleného brzdenia.

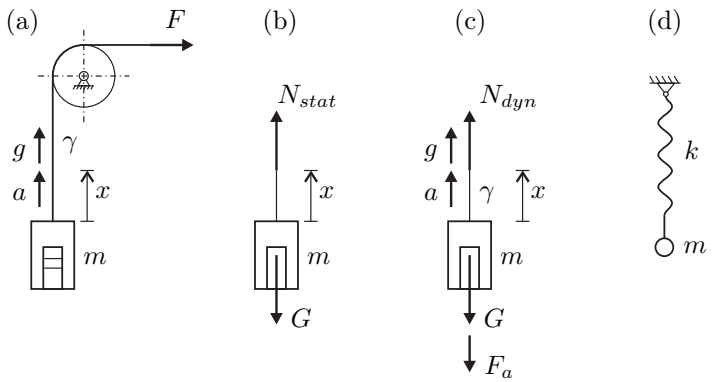


Obr. 4.6. Dynamika spúšťania kabínky výťahu

4.2.2 Analytické výpočty napätia a deformácie pri priamočiarom zrýchlenom pohybe mechanických sústav

Postup zahrnutia dynamických účinkov pri dimenzovaní mechanických systémov bude ukázaný na nasledujúcom príklade.

Príklad 4.3
Treba vypočítať dynamický koeficient k_{dyn} pre dimenzovanie lana s modulom pružnosti E, keď je dané: Tiaž bremena s hmotnosťou m [kg] je $G = m\,g$ [N], merná tiaž lana $\gamma = \rho\,g\,A$ [Nm^{-1}] s mernou hmotnosťou ρ [kgm^{-3}], tiažové zrýchlenie g [9,81 ms^{-2}], konštantné zrýchlenie pohybu a [ms^{-2}]. Napíšte pevnostnú podmienku na výpočet prierezu lana A, keď maximálna dĺžka lana $x = l_{max}$ (Obr. 4.7).



Obr. 4.7. Zdvíhanie bremena rovnomerne zrýchleným pohybom

Riešenie:

a) statické namáhanie:
Statická podmienka rovnováhy uvoľneného bremena bez uváženia mernej tiaže lana (Obr. 4.7b) je:

$$N_{stat} = G = m\,g \tag{4.5}$$

kde N_{stat} je vnútorná osová sila v lane. Z pevnostnej podmienky

$$\sigma_{stat} = N_{stat}/A \leq \sigma_{dov} \tag{4.6}$$

možno určiť prierezovú plochu lana

$$A \geq N_{stat}/\sigma_{dov} \tag{4.7}$$

kde σ_{stat} je napätie v lane pri statickom namáhaní, a σ_{dov} je dovolené namáhanie lana. Celkové statické predĺženie lana dĺžky $x = l_{max}$ je

$$\Delta l_{stat,max} = \frac{N_{stat} l_{max}}{EA} \tag{4.8}$$

Ak zohľadníme vlastnú tiaž lana, potom

$$N_{stat} = G + \gamma\,x \tag{4.9}$$

a maximálna osová sila

$$N_{stat,max} = G + \gamma\, l_{max} \tag{4.10}$$

z ktorej možno určiť maximálne napätie a predĺženie

$$\sigma_{stat,max} = \frac{N_{stat,max}}{A} \leq \sigma_{dov} \tag{4.11}$$

$$\Delta l_{stat,max} = \frac{G\, l}{EA} + \frac{\gamma\, l^2}{2AE} \tag{4.12}$$

b) dynamické namáhanie:
Bremeno zdvíhané konštantným zrýchlením a je znázornené na Obr. 4.7c. Doplnková zotrvačná sila

$$F_D = (m + m_x)a = \left(\frac{G}{g} + \frac{\gamma}{g}x\right)a \tag{4.13}$$

vstupuje do rovnice dynamickej rovnováhy v zvislom smere x:

$$N_{dyn} = G + \gamma\, x + F_D \tag{4.14}$$

z ktorej učíme dynamickú osovú silu, kde vystupuje aj dynamický koeficient k_{dyn}:

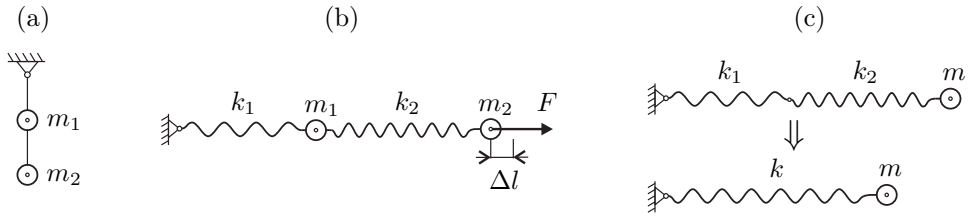
$$N_{dyn} = (G + \gamma\, x)\left(1 + \frac{a}{g}\right) = N_{stat} k_{dyn} \tag{4.15}$$

Potom $\sigma_{dyn,max} = \dfrac{N_{dyn,max}}{A} = \sigma_{stat,max} k_{dyn}$ a $\Delta l_{dyn,max} = k_{dyn,max} \Delta l_{stat,max}$, pričom $N_{dyn,max} = [N_{dyn}]_{x=l_{max}}$

Poznámka: Pri analytickom výpočte sa často pružný charakter mechanických prvkov nahrádza v mechanickom modeli reálnej mechanickej sústavy pomocou pružín definovaných pružinovou konštantou k. Pružinová konštanta vyplýva napr. zo vzťahu (4.8), ak závislosť osovej sily a predlženia lana (prúta) vyjadríme vo všeobecnom tvare

$$N = \frac{EA}{l}\Delta l = k\Delta l \tag{4.16}$$

Mechanickú sústavu na Obr. 4.7a možno znázorniť schematickým modelom v tvare 4.7d. Mechanickú sústavu na Obr. 4.8a možno znázorniť ako dve hmoty m_1 a m_2 zavesené na dvoch sériovo zapojených pružinách $k_1 = E_1A_1/l_1$ a $k_2 = E_2A_2/l_2$ – Obr. 4.8b.
Ak je jedna hmota m zavesená (pripojená) na dve sériovo usporiadané pružiny potom $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$, a tuhosť náhradnej pružiny $k = \dfrac{k_1\, k_2}{k_1 + k_2}$. Potom možno danú úlohu riešiť pomocou jednoduchšieho modelu podľa Obr. 4.8c.
Toto tvrdenie možno dokázať nasledujúcim riešením:
Majme sústavu dvoch sériovo zapojených pružín k_1 a k_2 namáhaných silou F. Táto sila posunie bod A o pružné posunutie $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$, pričom $\Delta l_1 = \dfrac{F}{k_1}$ je predĺženie prvej a $\Delta l_2 = \dfrac{F}{k_2}$ je predĺženie druhej pružiny. V obidvoch pružinách vznikne rovnaká osová



Obr. 4.8. Sériové zapojenie dvoch pružín

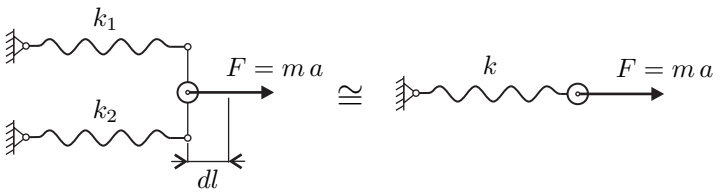
sila $N_1 = N_2 = N = F$. Ďalej platí: $\Delta l = \dfrac{F}{k}$, kde k je hľadaná pružinová konštanta celej sústavy. Potom

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \tag{4.17}$$

Z rovnice (4.17) dostaneme

$$k = \frac{1}{\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}} = \frac{k_1\, k_2}{k_1 + k_2} \tag{4.18}$$

Na Obr. 4.9a sú paralelne zapojené dve pružiny k_1 a k_2, na ktorých je pripojená jedna hmota m. Zjednodušený model riešenia úlohy bude jedna pružina s pružinovou konštantou $k = k_1 + k_2$ a s hmotnosťou m.



Obr. 4.9. Paralelné zapojenie dvoch pružín

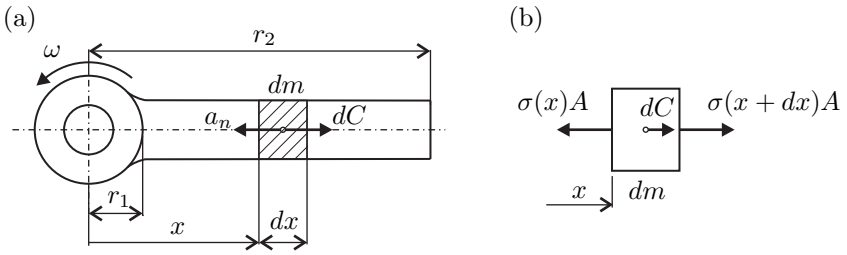
Pružinovú konštantu k ako algebrický súčet paralelne zapojených pružín určíme nasledujúcou jednoduchou úvahou. Je zrejmé, že pôsobisko sily pri malej priečnej vzdialenosti pružín sa posunie o hodnotu $\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2 = F_1/k_1 = F_2/k_2 = F/k$. Prenos sily F na pružiny sa rozdelí na silu F_1 a F_2 podľa vzťahu $F = F_1 + F_2 = \Delta l\, k = \Delta l_1 k_1 + \Delta l_2 k_2$. Odtiaľ priamo dostaneme: $k = k_1 + k_2$, resp. pre i – paralelne zapojených pružín

$$k = \sum_i k_i \tag{4.19}$$

Pri jednosmernom sériovo-paralelnom zapojení jednohmotového systému treba postupovať kombináciou rovníc (4.18) a (4.19).
Treba zdôrazniť, že týmto spôsobom nemožno superponovať pružinové konštanty rôznobežne zapojených pružín.

4.2.3 Zohľadnenie zotrvačných síl pri rotačnom pohybe

Uvažujme rameno s polomermi r_1 a r_2, s prierezom A, ktoré rotuje okolo stredu otáčania uhlovou rýchlosťou $\omega = 2\pi\, n$ [rad/s], pričom n [ot/s] sú otáčky ramena. Na vybratý hmotný element ramena $dm = \rho\, A\, dx$ pôsobí dostredivé zrýchlenie $a_n = x\,\omega^2$ proti ktorému pôsobí odstredivá zotrvačná sila $dC = dm\, a_n = dm\, x\, \omega^2$ - Obr. 4.10a. Na Obr. 4.10b je znázornený hmotný element v dynamickej rovnováhe s vnútornými silami v reze x a $x + dx$.



Obr. 4.10. Rotujúce rameno konštantného prierezu

Rovnica dynamickej rovnováhy síl do osi x je:

$$\sum_i F_{ix} = 0: \quad \big(\sigma(x) + d\sigma(x)\big)A + dC = \sigma(x)A \tag{4.20}$$

a po úprave dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$d\sigma(x) = -\frac{dC}{A} = -\frac{1}{A} dm\, x\, \omega^2 = -\rho\, \omega^2 x\, dx \tag{4.21}$$

Po jej integrácii dostaneme riešenie pre normálové napätie v závislosti na polohe rezu x. Integračnú konštantu C_1 učíme z okrajovej podmienky:

$$x = r_2: \quad \sigma(x) = 0 \Rightarrow C_1 = \rho\, \omega^2 \frac{r_2^2}{2}$$

Potom

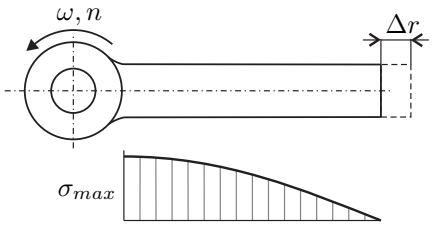
$$\sigma(x) = \rho \frac{\omega^2}{2}\big(r_2^2 - x^2\big) \tag{4.22}$$

Priebeh napätia po dĺžke ramena je parabolický s maximálnou hodnotou v reze $x = r_1$ a s nulovou hodnotou na voľnom konci ramena (Obr. 4.11):

$$\sigma_{max} = \rho \frac{\omega^2}{2}\big(r_2^2 - r_1^2\big) \tag{4.23}$$

Ako vidieť zo vzťahu (4.22), mechanické napätie nie je závislé od veľkosti prierezovej plochy ramena.
Celkové predĺženie rotujúceho ramena Δr možno určiť integráciou pomerného predĺženia $\varepsilon(x)$:

$$\Delta r = \int_{r_1}^{r_2} \varepsilon(x)\, dx = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma(x)}{E} dx = \rho \frac{\omega^2}{2E}\left[\frac{2r_2^3 - 3r_2^2 r_1 + r_1^3}{3}\right] \tag{4.24}$$

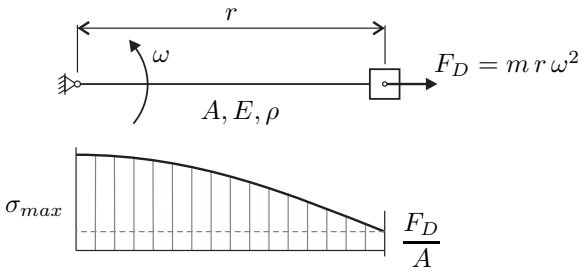


Obr. 4.11. Priebeh normálového napätia

Pre prípad $r_1 = 0$ bude celkové predĺženie ramena

$$\left[\Delta r\right]_{r_1=0} = \rho \frac{\omega^2}{3E} r_2^2 \tag{4.25}$$

Podobným spôsobom možno určiť mechanické napätie a deformáciu rotujúceho ramena ($r_2 = r$, $r_1 = 0$) s hmotnosťou m na voľnom konci - Obr. 4.12.

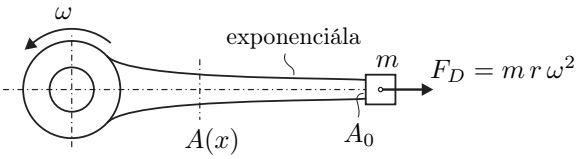


Obr. 4.12. Rotujúce rameno s prídavnou hmotnosťou

Na základe superpozície účinkov treba hore uvedené vzťahy doplniť o účinok zotrvačných síl $F_D = m\,a_n = m\,r\,\omega^2$ spôsobený prídavnou hmotnosťou m. Potom máme:

$$\sigma_{max} = \rho \frac{\omega^2}{2} r^2 + \frac{F_D}{A}, \qquad \left[\Delta r\right]_{r_1=0} = \rho \frac{\omega^2}{3E} r^2 + \frac{F_D r}{EA} \tag{4.26}$$

Ak by sa minimalizovala hmotnosť ramena tak, aby v každom reze bolo napätie rovnaké a bolo rovné $\sigma(x) = \sigma =$ konšt $= \dfrac{F_D}{A_0}$, potom by sa musela prierezová plocha meniť exponenciálne - pozri Obr. 4.13, pričom A_0 je veľkosť prierezovej plochy v mieste pripojenia príslušnej hmotnosti.

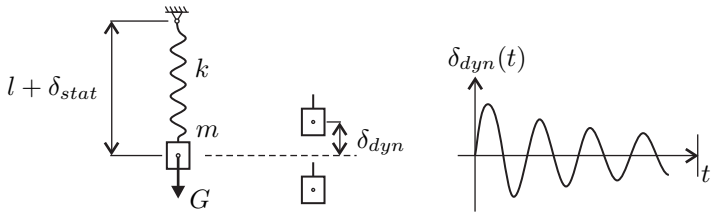


Obr. 4.13. Rameno konštantnej pevnosti

V prípade premenlivej uhlovej rýchlosti sa pri dimenzovaní musí zohľadniť jej najväčšia hodnota.

4.3 Kmitanie pružných sústav

Pružná sústava vybudená dynamickým kinematickým alebo kinetickým účinkom začne kmitať. Sústava kmitá okolo rovnovážnej statickej konfigurácie vyvolanej statickým zaťažením (napr. vlastná tiaž, elektromagnetická alebo termomechanická sila a pod.). Na Obr. 4.14 máme sústavu pozostávajúca z hmoty m zavesenej na pružine s tuhosťou v ťahu-tlaku $k = \dfrac{EA}{l}$ (pružinová konštanta). Pružina je upevnená v pevnom kĺbe. Vplyvom tiažovej sily $G = m\,g$ sa pružina dostane do rovnovážneho statického stavu pričom jej statické predĺženie je $\delta_{stat} = \dfrac{G\,l}{EA}$. Vychýlením hmoty m o nejakú počiatočnú výchylku začne táto hmota kmitať okolo statickej rovnovážnej polohy dynamickou výchylkou δ_{dyn} – amplitúdou kmitania, a frekvenciou kmitania $f = \omega/2\pi$. Dôsledkom tlmenia sústavy bude amplitúda kmitania závislá od času t. Po určitom čase sa kmitanie utlmí do stavu statickej rovnovážnej polohy. O takejto sústave hovoríme, že má jeden stupeň voľnosti pohybu – v našom prípade vo zvislom smere.



Obr. 4.14. Dynamická sústava s jedným stupňom voľnosti pohybu

Pre kmitajúcu sústavu sa všeobecne predpokladá, že:

- kmitajúca hmota m je časovo konštantná;
- pružná sústava je lineárna (dynamické účinky sú priamoúmerné dynamickým silám);
- tvar deformovanej sústavy pri kmitaní zodpovedá jej deformovanému tvaru pri statickom namáhaní.

Kmitanie pružných telies možno rozdeliť na dva základné druhy:

- vlastné kmitanie;
- vynútené kmitanie.

Vlastné kmitanie pružných telies možno vyvolať impulzom sily alebo výchylkou z rovnovážnej statickej polohy. Mechanická sústava potom kmitá vlastnou kruhovou frekvenciou ω_0 [rad/s], resp. vlastnou frekvenciou f_0 [Hz]. Jej zodpovedajúci geometrický tvar pružnej sústavy pri kmitaní sa nazýva vlastný tvar kmitania. Pružná sústava alebo teleso má toľko vlastných frekvencií a vlastných tvarov, koľko má stupňov voľnosti kmitania. Pružná sústava kmitá vtedy, keď je minimálne staticky určito uložená, čiže nemôže vykonávať tuhý pohyb. Počet vlastných frekvencií závisí od zložitosti mechanického modelu reálnej konštrukcie a metódy skúmania. Ak modelujeme hmotné

teleso ako spojitú sústavu hmotných bodov, tak každé teleso ma teoreticky nekonečný počet vlastných frekvencií a vlastných tvarov kmitania. Pri analytických metódach sa priestorové pružné telesá často redukujú na prúty, nosníky, osi a hriadele, steny, dosky a škrupiny s obmedzeným počtom stupňov voľnosti pohybu. Jednoosový prút môže kmitať len v pozdĺžnom smere. Rovinný nosník môže kmitať len v rovine ohybu nosníka – v pozdĺžnom a priečnom smere (axiálne a ohybové kmitanie). Priestorový nosník môže kmitať v pozdĺžnom smere, v transverzálnom i laterálnom smere (ohybové vlastné tvary) ako aj v rovine kolmej na pozdĺžnu os - torzné kmitanie. Axiálne a ohybové vlastné tvary kmitania sú deformačné tvary nosníka pri daných okrajových podmienkach. Pri modelovaní mechanickej sústavy sieťou konečných prvkov s konkrétnym počtom uzlových bodov, stupeň voľnosti sústavy sa rovná počtu zložiek neznámych posunutí a natočení vo všetkých uzlových bodoch konečných prvkov. Z praktického hľadiska je potrebné určiť len niekoľko prvých vlastných frekvencií a im zodpovedajúcich vlastných tvarov. Najjednoduchšie sa analyticky rieši kmitanie s jedným stupňom voľnosti pohybu. Kmitanie sústav s veľkým počtom stupňov voľnosti sa veľmi výhodne rieši práve metódou konečných prvkov, ako bude ukázané neskôr.

Vynútené kmitanie sa vyvolá časovo závislým zaťažením. Delí sa na harmonické a náhodné kmitanie. Sústava kmitá harmonicky v dôsledku harmonickej budiacej sily a lebo momentu sily. Frekvencia harmonického kmitania je zhodná s frekvenciou budiacej sily a amplitúda kmitania je závislá od amplitúdy harmonickej sily alebo momentu sily. Náhodné kmitanie mechanickej sústavy je budené náhodnou časovo závislou silou alebo momentom sily.

Kmitanie sa ďalej delí na **voľné** a **tlmené**. Pri voľnom kmitaní sa neuplatňujú žiadne tlmiace účinky. Pri tlmenom kmitaní možno kmitajúcu sústavu rôznymi aktívnymi a pasívnymi prvkami utlmiť do statického stavu, prípadne vykonávať riadené kmitanie, ktoré sa využíva aj v prevádzke mechatronických systémov. Vlastná frekvencia tlmeného kmitania sa zníži oproti vlastnej frekvencii netlmeného (voľného) kmitania.

Dôležitý pojem v pružnom kmitaní je **rezonancia kmitania**. Je to jav, keď v prípade zhody vlastnej frekvencie kmitania mechanickej sústavy s frekvenciou harmonickej budiacej sily núteného kmitania vyvolá teoreticky nekonečne veľké amplitúdy kmitania. Tento jav je z hľadiska deštrukcie mechanickej sústavy neprijateľný. V niektorých mechatronických a elektronických aplikáciách sa naopak tento jav využíva (najmä v oblasti senzorov a aktuátorov).

Základné veličiny kmitania a ich jednotky

Medzi základne veličiny kmitania patria:

- uhlová dráha	φ	[rad]
- kruhová frekvencia (tiež uhlová rýchlosť)	$\omega = d\varphi/d\tau = \dot{\varphi}$	[rad/s]
- vlastná kruhová frekvencia	ω_0	[rad/s]
- frekvencia kmitania	$f = \omega/2\pi$	[1/s, Hz]
- vlastná frekvencia kmitania	f_0	[1/s, Hz]
- perióda kmitania	$T = 1/f$	[s]
- amplitúda kmitania v danom čase	δ	[m]
- hmotnosť kmitajúcej hmoty	m	[kg]
- merná tiaž kmitajúcej hmoty	$\gamma = \rho\, g$	[N/m^3]; [N/m]

- tiažová sila kmitajúcej hmoty	$G = m\,g$	[N]
- tuhosť pružiny kmitajúcej sústavy v ťahu-tlaku	$k_N = EA/l$	[N/m]
- tuhosť v ohybe	$k_{Mo} = f(E, I, l)$	
- kvadratický moment prierezu k osi ohybu	I	[m^4]
- tuhosť v krútení	$k_{Mk} = \left(\frac{GI_p}{l}, \frac{GI_T}{l}\right)$	[N m]
- polárny moment prierezovej plochy	I_p	[m^4]
- odporový moment prierezovej plochy v krútení	I_T	[m^4]
- modul pružnosti v ťahu	E	[N/m^2]
- modul pružnosti v šmyku	G	[N/m^2]

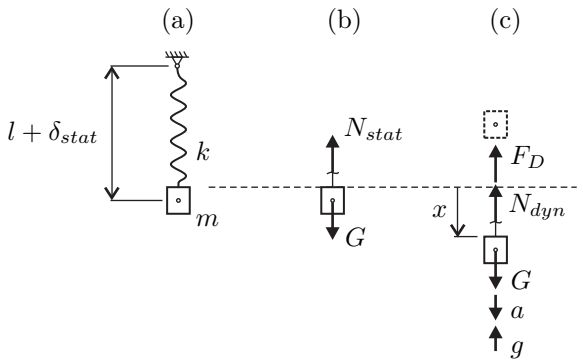
4.3.1 Vlastné kmitanie pružných sústav

V tejto časti učebnice sa budeme zaoberať analytickým riešením kmitania jednoduchých mechanických sústav s jedným stupňom voľnosti s cieľom pochopenia princípov vlastného kmitania. Budeme skúmať dynamické vlastnosti tzv. orientovaných telies, kde jeden rozmer prevláda nad ostatnými dvoma rozmermi, čiže prútmi a nosníkmi, pri ktorých prevláda dĺžkový rozmer a plocha prierezu je malá.

Vlastné kmitanie pružných sústav bez uvažovania vlastnej tiaže sústavy

Keď je vlastná tiaž samotnej sústavy oproti tiaži telies so sústavou spojených malá, možno ju pri analytických výpočtoch zanedbať, čím sa samotné riešenie výrazne zjednoduší.

a) Vlastné kmitanie pri priamočiarom pohybe
Uvažujme mechanickú sústavu skladajúcu sa zo zvislej pružiny s tuhosťou (pružinovou konštantou) $k = k_N = EA/l$, na ktorej je upevnené iné hmotné teleso s hmotnosťou m (Obr. 4.15a). Tiažové zrýchlenie je g. Vplyvom tiažovej sily $G = m\,g$ sa pružina predĺži o hodnotu $\delta_{stat} = G/k$. Osová sila v pružine (Obr. 4.15b) je $N_{stat} = k\,\delta_{stat} = G$.



Obr. 4.15. Kmitajúca sústava s jedným stupňom voľnosti

Po úprave týchto vzťahov dostaneme veľkosť statickej výchylky vyjadrenej v tvare

$$\delta_{stat} = \frac{m\,g}{k} = \frac{g}{\frac{k}{m}} = \frac{g}{\omega_0^2} \tag{4.27}$$

Výraz $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, resp. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (rozmer [rad/s]) bude predstavovať základnú veličinu kmitania – vlastnú kruhovú frekvenciu kmitania. Ako vidieť, vlastná kruhová frekvencia je pod odmocninou priamo úmerná tuhosti pružiny k a nepriamo úmerná kmitajúcej hmotnosti m. Inými slovami, zvyšovaním tuhosti sústavy sa vlastná kruhová frekvencia zvyšuje, a zvyšovaním hmotnosti m sa vlastná frekvencia znižuje. Dynamickú rovnováhu sústavy s výchylkou z rovnovážneho stavu (Obr. 4.15c) možno opísať diferenciálnou rovnicou druhého rádu s konštantnými koeficientami

$$F_D + N_{dyn} - G = m\frac{d^2x}{dt^2} + k(\delta_{stat} + x) - k\,\delta_{stat} = 0 \tag{4.28}$$

Po úprave tejto rovnice dostaneme diferenciálnu rovnicu voľného kmitania – tiež pohybovú rovnicu – v tvare

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{4.29}$$

Jej riešenie je

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \tag{4.30}$$

Integračné konštanty A a B možno určiť z okrajových podmienok
pre $t = 0$ je $x = x_0$, a $\dot{x} = \left[\dfrac{dx}{dt}\right]_{t=0} = \dot{x}_0 = v_0$, kde x_0, resp. v_0 je počiatočná výchylka (amplitúda), resp. počiatočná rýchlosť výchylky. Dosadením týchto okrajových podmienok do (4.30) máme

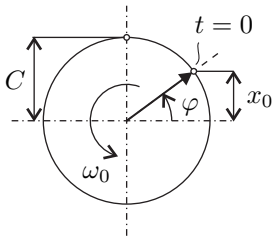
$$x = x_1 + x_2 = x_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{4.31}$$

Túto časovú závislosť amplitúdy kmitania x možno znázorniť ako zvislú súradnicu polohy bodu pohybujúceho sa po kružnici uhlovou rýchlosťou (vlastnou kruhovou frekvenciou) ω_0 proti smeru hodinových ručičiek (Obr. 4.16), pričom konštanta $\varphi = \omega_0 t$ je uhol (tiež fázové posunutie), ktorý zviera sprievodič pohybujúceho sa bodu s vodorovnou osou a určuje polohu pohybujúceho sa bodu v čase $t = 0$. Konštanta C je maximálna amplitúda (polomer kružnice).
Ak označíme v (4.31): $x_0 = C\sin\varphi$, potom $\dot{x}_0 = C\omega_0\cos\varphi$, resp. $\dfrac{\dot{x}_0}{\omega_0} = C\cos\varphi$, dostaneme

$$x = C\sin\varphi\cos\omega_0 t + C\cos\varphi\sin\omega_0 t = C\sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{4.32}$$

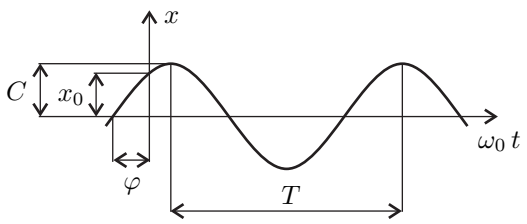
Funkcia (4.32) je periodickou funkciou s periódou 2π, čo možno vyjadriť v tvare

$$x = C\sin\left[\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) + \varphi\right] = C\sin\left[\omega_0(t+T) + \varphi\right] \tag{4.33}$$



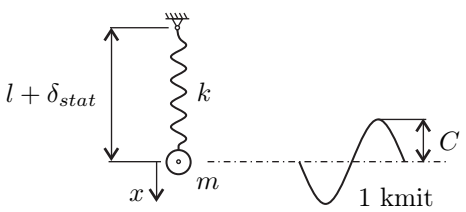
Obr. 4.16. Znázornenie kmitavého pobytu po kružnici

V (4.33) sa zaviedla perióda kmitania $T = 2\pi/\omega_0 = 1/f$ [s], pričom $f_0 = 1/T$ [Hz] je frekvencia vlastného kmitania. Na Obr. 4.17 je znázornená rovnica vlastného kmitania (4.33) s vlastnou frekvenciou kmitania $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{g/\delta_{stat}}$, s amplitúdou kmitania $C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}$, s fázovým posuvom $\varphi = \arctan \frac{x_0\omega_0}{\dot{x}_0}$, s periódou kmitania $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{stat}}{g}}$ a s vlastnou frekvenciou $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\delta_{stat}}{g}}$.



Obr. 4.17. Amplitúdovo-frekvenčná charakteristika kmitania

Príklad 4.4
Statická výchylka pružného člena na Obr. 4.18 je $\delta_{stat} = 5$ mm. Treba určiť periódu kmitania T, vlastnú kruhovú frekvenciu kmitania ω_0 a vlastnú frekvenciu f_0.



Obr. 4.18. Pružná sústava s jedným stupňom voľnosti

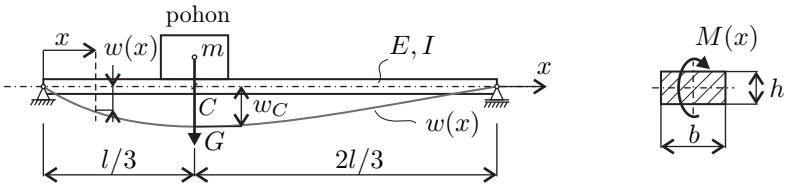
Riešenie:
Perióda kmitania je: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{stat}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,005}{9,81}} = 0,142$ [s].

Potom frekvencia kmitania $f_0 = 1/T = 7,04$ [Hz]. Vlastná frekvencia $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{g}{\delta_{stat}}} = 44,3$ [rad/s]. Amplitúda kmitania bude závislá od počiatočnej výchylky x a počiatočnej rýchlosti $\dot{x}_0$, a samozrejme od vlastnej frekvencie ω_0. Táto amplitúda má však len informatívny charakter.

Poznámka: Ak by na sústavu pôsobilo harmonické zaťaženie s uhlovou frekvenciou $\omega = 2\pi n = \omega_0$ (napríklad hmota m by rotovala konštantnými otáčkami $n = \omega_0/2\pi$), potom by došlo k rezonancii a osová sila a amplitúda kmitania v pružnom člene by sa teoreticky zvýšila na nekonečne veľkú hodnotu a pružný člen by sa porušil. Tieto otáčky sa nazývajú tiež kritickými otáčkami. Systém bude funkčný, pokiaľ jeho otáčky sú menšie ako sú kritické otáčky. Kritické otáčky sa dajú zvýšiť zvýšením pružinovej konštanty k, ktorá zníži statickú výchylku δ_{stat}, alebo znížením hmotnosti m.
Ako už bolo uvedené, aj vlastné kmitanie je v reálnom systéme tlmené, čím sa teoreticky nekonečne veľká amplitúda kmitania znižuje na konečne veľkú.

b) Vlastné ohybové kmitanie nosníka
Analytické riešenie ohybového kmitania je pomerne jednoduché len pre rovinné jednopoľové priame nosníky s konštantným, dvojnásobne symetrickým prierezom. Vlastné frekvencie a vlastný tvar jednoduchého nosníka závisí na jeho tuhosti a spôsobe uloženia vo väzbách. Pre nosník možno zostaviť pohybovú rovnicu v diferenciálnom tvare, ktorej stupeň a charakter závisia od aplikovanej nosníkovej teórie. Pre najjednoduchšiu – Euler-Bernoulliho lineárnu teóriu ohybu nosníka (bez vplyvu priečnych síl) je to obyčajná homogénna diferenciálna rovnica 2. stupňa s konštantnými parametrami. Pre tzv. Timošenkov nosník, kde sa zohľadňuje aj vplyv priečnych síl, ako aj pre teóriu 2. rádu s vplyvom veľkej osovej sily, dostaneme diferenciálnu rovnicu 4. stupňa. Pre nosníkové sústavy je analytický výpočet veľmi náročný až nemožný, a preto sa v praxi používa aj pri dynamických výpočtoch metóda konečných prvkov.
V tejto kapitole bude na príklade uvedený najjednoduchší výpočtový postup určenia vlastnej frekvencie Euler-Bernoulluho nosníka jednoducho podopretého a zaťaženého sústredenou hmotnosťou.

Príklad 4.5
Je daný jednoducho podopretý nosník obdĺžnikového prierezu podľa Obr. 4.19.



Obr. 4.19. Jednoducho podopretý nosník

Dané je: $l = 0,6$ m, $b = 0,03$ m, $h = 0,01$ m, modul pružnosti $E = 210$ GPa, tiaž

bremena $G = 1000$ N (tiaž pohonu - napr. elektromotora). Vlastnú tiaž nosníka je možné zanedbať. Kvadratický moment prierezu $I = bh^3/12 = 2,5 \times 10^{-9}$ m^4, $g = 9,81$ ms^{-2}. Treba určiť periódu kmitania T, vlastnú frekvenciu f_0 a vlastnú uhlovú frekvenciu ω_0.

Riešenie:
Periódu kmitania určíme zo vzťahu

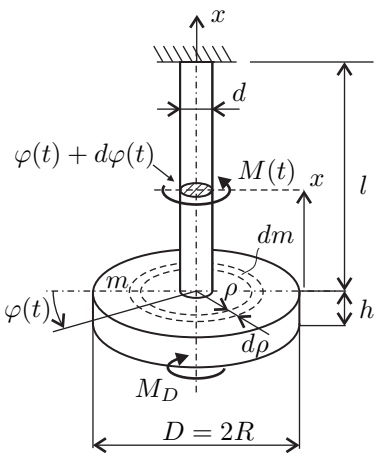
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{stat}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{w_C}{g}} \tag{4.34}$$

kde w_C je priehyb nosníka v mieste pôsobenia sústredenej hmotnosti (danej napr. hmotnosťou pohonu) v bode C. Tento priehyb je potrebné metódami elastostatiky výpočítať. Pre náš prípad platí

$$w_C = \frac{4G\,l^3}{3^5 EI} = \frac{4 \cdot 1000 \cdot 0,6^3}{3^5 \cdot 2,1 \times 10^{11} \cdot 2,5 \times 10^{-9}} = 6,772 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

Potom po dosadení do (4.34): $T = 2,627 \times 10^{-2}$ s, $f_0 = 1/T = 38,05$ Hz, a $\omega_0 = 2\pi\, f_0 = 239,012$ rad/s. V prípade, že hmotnosť m predstavuje hmotnosť elektromotora, potom rezonancia by nastala pri $f_0 = 38,05$ Hz čomu odpovedajú kritické otáčky pohonu $n = 2283$ ot/min. Aby rezonancia nenastala, prevádzkové konštantné otáčky pohonu musia byť menšie ako sú vypočítané kritické otáčky.

c) Vlastné torzné kmitanie hriadeľa (osi)
Uvažujme os kruhového prierezu na jednom konci votknutú a na druhom konci zaťaženú rotujúcim kotúčom (Obr. 4.20). Dané je: $D = 2R = 0,2$ m, modul pružnosti v šmyku $G = 80$ GPa, $d = 0,05$ m, $l = 1$ m, hmotnosť kotúča $m = 100$ kg, tiažové zrýchlenie $g = 10$ ms^{-2}. Hmotnosť hriadeľa bola zanedbaná. Merná tiaž materiálu kotúča $\gamma = 78500$ Nm^{-3}. Hrúbka kotúča je h a prierezová plocha kotúča je A.



Obr. 4.20. Torzné kmitanie

Treba určiť vlastnú kruhovú frekvenciu ω_0 a vlastnú frekvenciu f_0.
Riešenie:
Pohybová rovnica pružného natočenia sústavy je

$$M_D + M(t) = 0 \tag{4.35}$$

kde dynamický moment $M_D = I_m \dfrac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$, vnútorný krútiaci moment v osi je $M(t) = \varphi(t)\dfrac{G\,I_p}{l}$, a $\varphi(t)$ je celkový uhol skrútenia v myslenom reze x. Hmotný moment zotrvačnosti kotúča I_m k osi x je

$$I_m = \int\limits_m \rho^2 dm = \int\limits_A \rho^2 \frac{\gamma}{g} h\, dA = \int\limits_0^R \rho^2 \frac{\gamma}{g} h\, 2\pi\, \rho\, d\rho = 2\pi \frac{\gamma}{g} h \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = \frac{m\, D^2}{8} \tag{4.36}$$

Platí: $dm = \dfrac{\gamma}{g} h\, dA$, $dA = 2\pi\, \rho\, d\rho$, kde ρ je veľkosť polomeru vybratého hmotného elementu dm kotúča tvaru elementárneho dutého valca s hrúbkou steny $d\rho$.
Polárny moment prierezovej kruhovej plochy osi (hriadeľa) I_p možno určiť zo známeho vzťahu

$$I_p = \int\limits_A \rho^2 dA = \frac{\pi d^4}{32} \tag{4.37}$$

Dosadením krútiacich momentov a momentov zotrvačnosti do (4.35) dostaneme pohybovú rovnicu v tvare

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{G\,I_p}{l\,I_m}\varphi(t) = 0 \tag{4.38}$$

Ak označíme analogicky ako pri priamočiarom pohybe

$$\omega_0^2 = \frac{G\,I_p}{l\,I_m} \tag{4.39}$$

potom riešenie diferenciálnej rovnice (4.38) je analogické s rovnicou (4.30). Toto však na výpočet vlastnej frekvencie nie je nutné. Z rovnice (4.39) možno analogicky vypočítať vlastnú kruhovú frekvenciu torzného kmitania

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G\,I_p}{l\,I_m}} \tag{4.40}$$

Dosadením daných hodnôt do (4.40) dostaneme $\omega_0 = 331$ rad/s. Vlastná frekvencia torzného kmitania $f_0 = \omega_0/2\pi = 49,5$ Hz. Perióda torzného kmitania $T = 1/f_0 = 0,0202$ s.

Vlastné kmitanie pružných sústav s uvažovaním vlastnej tiaže sústavy

Účinky vlastnej hmoty m_0 pružných prvkov možno s dostatočnou presnosťou zohľadniť tak, že hmotu m_0 redukujeme do miesta uchytenia bremena (alebo do koncových bodov prúta alebo nosníka) a túto pripočítame ku hmote bremena m. Redukovaná hmota m_{red} je hmota m_0 sústredená v mieste upevnenia bremena m tak, že jej kinetická energia sa rovná kinetickej energii hmoty pružných prvkov sústavy. Redukovaná hmota sa určuje podľa vzťahu

$$m_{red} = \beta\, m_0 \tag{4.41}$$

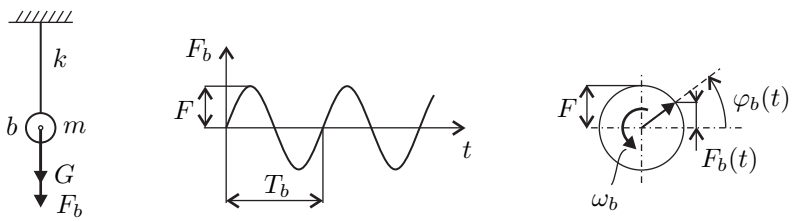
kde β je koeficient redukcie hmoty, ktorý treba individuálne určiť pre každý typ mechanickej sústavy. Touto problematikou sa v tejto práci nebudeme podrobnejšie zaoberať, jednak preto, že už pri jednoduchých úlohách je výpočet relatívne náročný a pri dnešných možnostiach výpočtu metódou konečných prvkov aj neefektívny.

4.3.2 Vynútené harmonické kmitanie a výpočet napätia v pružných prvkoch

Princípy riešenia úloh harmonického vynúteného kmitania budú prezentované na sústave s jedným stupňom voľnosti. Bude uvažované tzv. voľné harmonické kmitanie, čiže nebude brané do úvahy tlmenie kmitania. Postup riešenia zložitejších úloh vynúteného kmitania metódou konečných prvkov bude obsiahnutý v ďalších kapitolách tejto práce.

Vynútené axiálne kmitanie

Uvažujme prút s tuhosťou v ťahu-tlaku $k = EA/l$, na ktorého konci (v bode b) je upevnené bremeno s hmotnosťou m. V tom istom bode pôsobí harmonická sila $F_b = F \sin \omega_b t$ – Obr. 4.21, kde F je amplitúda budiacej sily, ω_b je uhlová frekvencia budiacej sily, G je tiažová sila pôsobiaca na bremeno s hmotnosťou m. E je modul pružnosti, A je prierezová plocha prúta a γ [N/m^3] je merná tiaž prúta.



Obr. 4.21. Vynútené axiálne harmonické kmitanie

Z pohybovej rovnice tohto dynamického systému možno odvodiť vzťah (4.42) na výpočet amplitúdy vynúteného kmitania H od harmonickej sily F_b

$$H = \frac{\delta_b}{1 - \left(\dfrac{\omega_b}{\omega_0}\right)^2} = \alpha\, \delta_b \tag{4.42}$$

kde δ_b je pružné posunutie bodu b spôsobené amplitúdou budiacej sily, a ω_0 je vlastná frekvencia dynamického systému. Parameter α sa nazýva súčiniteľ naladenia

$$\alpha = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_b}{\omega_0}\right)^2} \tag{4.43}$$

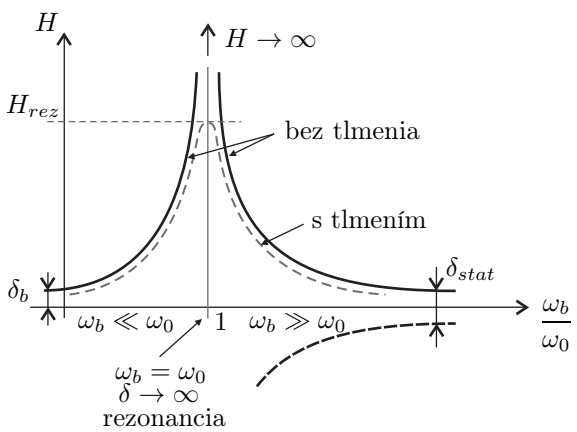
Jeho hodnota je závislá od pomeru uhlovej frekvencie budiacej sily a vlastnej frekvencie systému.
Teoreticky môžu nastať tri hraničné prípady dynamického stavu sústavy:

a) $\omega_b \gg \omega_0$ – amplitúda vynúteného kmitania H konverguje do nuly a pružná sústava je takmer v pokoji – v statickej rovnováhe;

b) $\omega_b \ll \omega_0$ – amplitúda sa H bude blížiť ku statickej výchylke δ_b spôsobenej amplitúdou budiacej sily F;

c) $\omega_b = \omega_0$ – súčiniteľ naladenia sa blíži do nekonečna a teda aj amplitúda vynúteného kmitania H narastá teoreticky do nekonečna. Tento jav, ktorý už bol spomínaný v úvode tejto kapitoly, sa nazýva rezonancia. V technickej praxi nastáva prípad, že frekvencia budiacej sily je vyššia ako je vlastná frekvencia systému (napríklad, pracovné otáčky točivého stroja sú vyššie, ako sú kritické otáčky hriadeľa rotora). Aby pri spúšťaní systému nedošlo ku rezonancii, musí byť prechod cez kritické otáčky veľmi rýchly.

Na Obr. 4.22 je znázornená amplitúdovo-frekvenčná charakteristika harmonického kmitania.



Obr. 4.22. Amplitúdovo-frekvenčná charakteristika harmonického kmitania

Poznámka: Záporná závislosť charakteristiky (čiarkovaná čiara na Obr. 4.22) sa v praxi účelovo zobrazuje v kladnej oblasti amplitúdy kmitania H. Bodkočiarkovanou čiarou je znázornená skutočná amplitúdovo-frekvenčná charakteristika, pri ktorej tlmenie sústavy zníži nekonečne veľkú rezonančnú amplitúdu harmonického kmitania na konečnú

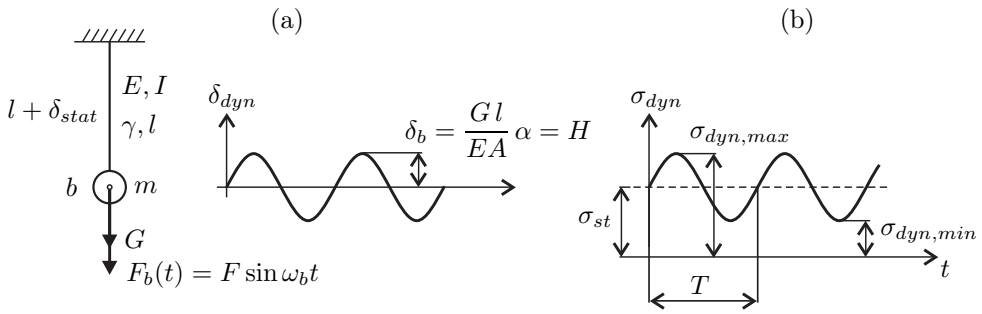
hodnotu H_{rez}. Treba ešte raz zdôrazniť, že ku rezonancii dochádza len pri harmonickom budení mechanickej sústavy.
Na Obr. 4.23a je znázornená sústava a jej harmonické kmitanie okolo rovnovážnej statickej polohy danou statickou výchylkou $\delta_{stat} = \dfrac{G\,l}{EA} + \dfrac{\gamma\,l^2}{2E} = \dfrac{G}{k} + \dfrac{\gamma\,l^2}{2E}$. Výsledná dynamická výchylka bodu b potom je

$$\delta_{dyn} = \delta_{stat} + H \sin \omega_b t = \alpha \delta_b \sin \omega_b t \tag{4.44}$$

Ak je sústava lineárna, potom analogicky možno určiť časovú závislosť maximálneho normálového mechanického napätia v mieste uchytenia prúta

$$\sigma_{dyn} = \sigma_{stat} + \alpha \sigma_b \sin \omega_b t \tag{4.45}$$

So statickým napätím $\sigma_{stat} = G/A + \gamma\,l$ a s napätím od amplitúdy budiacej sily $\sigma_b = F/A$. Ak vlastnú tiaž prúta zanedbáme, potom položíme $\gamma\,l = 0$. Napätie (4.45) je časovo premenlivé (Obr. 4.23b).



Obr. 4.23. Harmonický priebeh normálového napätia v mieste uchytenia prúta

Jeho maximálna hodnota je $\sigma_{dyn,max} = \sigma_{stat} + \alpha\,\sigma_b$ a jeho minimálna hodnota je $\sigma_{dyn,min} = \sigma_{stat} - \alpha\,\sigma_b$. Tieto napätia možno tiež vyjadriť pomocou dynamického súčiniteľa

$$k_{dyn} = 1 + \alpha \frac{\delta_b}{\delta_{stat}} = 1 + \frac{H}{\delta_{stat}} \tag{4.46}$$

Potom $\sigma_{dyn} = k_{dyn}\sigma_{stat}$ a $\delta_{dyn} = k_{dyn}\delta_{stat}$. Pevnostná podmienka na dimenzovanie prierezu prúta bude mať tvar

$$\sigma_{dyn,max} = k_{dyn}\sigma_{stat} \leq \sigma_{dov} \tag{4.47}$$

respektíve po úprave

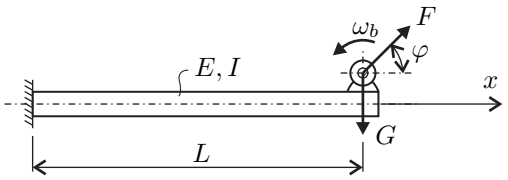
$$\sigma_{stat} \leq \frac{\sigma_{dov}}{k_{dyn}} \tag{4.48}$$

pričom σ_{dov} je dovolené namáhanie v ťahu-tlaku.

Vynútené ohybové kmitanie

Analogickým spôsobom ako pri axiálnom harmonickom kmitaní možno analyticky riešiť aj ohybové harmonické kmitanie s jedným stupňom voľnosti, čo bude ukázané v nasledujúcom príklade.

Príklad 4.6
Je daný rovinný votknutý nosník (Obr. 4.24) s kvadratickým momentom prierezovej plochy $I = 2595 \times 10^3$ mm^4 a s prierezovým modulom v ohybe $W_0 = 41,1 \times 10^3$ mm^3. Na jeho ľavom konci je uložený pohon s tiažou $G = 1$ kN. Pracovné otáčky pohonu sú $n = 900$ ot/min, pri ktorých je amplitúda budiacej sily pohonu $F = 200$ N (treba ju vypočítať alebo zmerať). Modul pružnosti nosníka je $E = 210000$ Nmm^{-2}. Vlastnú tiaž nosníka zanedbáme.



Obr. 4.24. Vynútené kmitanie nosníka

Treba určiť:

- pri akej dĺžke nosníka l dôjde ku rezonancii;
- v akej vzdialenosti od votknutia nosníka treba uložiť pohon tak, aby vlastná frekvencia nosníka bola o 30 % vyššia ako je frekvencia budiacej sily;
- súčiniteľ naladenia;
- maximálnu dynamickú deformáciu v mieste uloženia pohonu;
- maximálne dynamické napätie vo votknutí nosníka.

Riešenie:
S využitím analógie s axiálnym kmitaním riešenie ohybového kmitania je nasledujúce: Uhlová frekvencia budiacej sily je (otáčky pohonu treba dosadiť v jednotkách ot/min)

$$\omega_b = \frac{\pi\, n}{30} = \frac{3,14 \cdot 900}{30} = 94,2\,\mathrm{rad/s}$$

Rezonancia nastane pri splnení podmienky

$$\omega_b = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta_{stat}}} \tag{4.49}$$

z ktorej možno určiť statický priehyb nosníka $\delta_{stat} = \dfrac{g}{\omega_b^2} = 1,11$ mm. Statický priehyb nosníka zodpovedá známemu vzťahu z teórie nosníkov

$$\delta_{stat} = \frac{G\, l^3}{EI} \tag{4.50}$$

odkiaľ možno určiť rezonančnú dĺžku nosníka $l = \sqrt[3]{\dfrac{3\delta_{stat} EI}{G}} = 1200$ mm.
Ak má byť vlastná frekvencia o 30 % vyššia ako je frekvencia budiacej sily, potom

$$\omega_{01} = 1,3\,\omega_b = \sqrt{\frac{g}{\delta_{stat1}}} \tag{4.51}$$

ktorá zodpovedá statickému priehybu $\delta_{stat1} = 0,66$ mm. Dosadením aktuálnych veličín do rovnice (4.50) dostaneme potrebnú dĺžku nosníka $l_1 = 1007$ mm, ktorá zabezpečí požadovanú bezpečnosť voči rezonančnému stavu.
Súčiniteľ naladenia bezpečného systému je

$$\alpha = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega_b}{\omega_{01}}\right)^2} = \frac{1}{1 - \dfrac{\delta_{stat1}}{\delta_{stat}}} = \frac{1}{1 - \dfrac{l_1^3}{l^3}} = 2,445$$

Amplitúda vynútených kmitov je

$$H = \alpha\,\delta_b = \alpha \frac{F\,l_1^3}{3EI} = 0,32\,\mathrm{mm} \tag{4.52}$$

Dynamický priehyb nosníka možno dostať zo vzťahu

$$\delta_{dyn,max} = \delta_{stat1} + H = \delta_{stat1}\left(1 + \frac{H}{\delta_{stat1}}\right) = \delta_{stat1} k_{dyn} \tag{4.53}$$

Dosadením príslušných číselných hodnôt do (4.53) dostaneme $\delta_{dyn,max} = 0,98$ mm s dynamickým súčiniteľom $k_{dyn} = 1 + \dfrac{H}{\delta_{stat1}} = 1,485$.
Maximálne dynamické napätie vo votknutí určíme zo vzťahu

$$\sigma_{dyn,max} = \sigma_{stat1} k_{dyn} = \frac{G\,l_1}{W_0} k_{dyn} \tag{4.54}$$

a po vyčíslení vzťahu (4.54) dostaneme $\sigma_{dyn,max} = 36,4$ MPa.
Podobným spôsobom možno riešiť aj torzné kmitanie jednoduchých osí a hriadeľov rotačných systémov.

4.4 Základné rovnice MKP pre elastodynamiku

Ako bolo uvedené v predošlých kapitolách, na riešenie statickej úlohy pružnosti treba zostaviť globálny systém rovníc v tvare

$$\underline{K}\,\underline{a} = \underline{F} \tag{4.55}$$

kde $\underline{K}$ je celková matica tuhosti konštrukcie (zostavená z rozšírených matíc tuhosti jednotlivých konečných prvkov), $\underline{a}$ je celkový vektor posunutí uzlových bodov a $\underline{F}$ je celkový vektor uzlových zaťažení. Všetky vonkajšie sily sú konštantné – nezávislé od času.

V dynamickej úlohe sú zaťažujúce sily časovo závislé – musí sa riešiť tzv. prechodová, resp. nestacionárna úloha. Hľadané primárne veličiny sú: posunutia $\underline{a}$, rýchlosti $\underline{\dot{a}}$, zrýchlenia $\underline{\ddot{a}}$, pretvorenia a napätia, ktoré sú tiež časovo závislé v intervale $t \in \langle 0, t_{max} \rangle$. Podmienky dynamickej rovnováhy v danom časovom okamžiku majú tvar

$$\underline{\hat{K}}\,\underline{a}(t) = \underline{F}(t) \tag{4.56}$$

kde $\underline{\hat{K}}$ je celková matica systému obsahujúca okrem tuhosti aj hmotnosť a tlmenie konštrukcie.
Rovnicu (4.55) na úrovni vybratého konečného prvku e treba doplniť o dynamické účinky síl. Najjednoduchší spôsob je ich pridanie ku objemovým silám v statickej úlohe

$$\begin{aligned} \underline{F}^e_{b+z} &= \int\limits_{V^e} \underline{N}^{eT}\big(\underline{b}^e - \rho^e \underline{\ddot{u}}^e\big)dV = \int\limits_{V^e} \underline{N}^{eT}\big(\underline{b}^e - \rho^e \underline{N}^e \underline{\ddot{a}}^e\big)dV \\ &= \int\limits_{V^e} \underline{N}^{eT}\underline{b}^e dV - \int\limits_{V^e} \underline{N}^{eT}\rho^e \underline{N}^e \underline{\ddot{a}}^e dV = \underline{F}^e_b + \underline{F}^e_z \end{aligned} \tag{4.57}$$

V (4.57) je $\underline{\ddot{u}}^e$ je vektor zložiek zrýchlenia ľubovoľného bodu konečného prvku, ktorý je vyjadrený obvyklým spôsobom pomocou tvarových funkcií a zrýchlení uzlových bodov konečného prvku $\underline{\ddot{a}}^e$. Dolným pravým indexom b sú označené objemové sily (vlastná tiaž, elektromagnetická sila atď...), a indexom z sú označené doplnkové d'Alambertové (zotrvačné) sily. Ďalej, $\underline{N}^e$ je matica tvarových funkcií (s indexom T je označený jej transponovaný tvar), ρ^e je konštantná merná hmotnosť, a V^e je objem konečného prvku.
Na uzlových bodoch konečného prvku pribudne teda zotrvačná sila

$$\underline{F}^e_z = -\int\limits_{V^e} \underline{N}^{eT}\rho^e \underline{N}^e \underline{\ddot{a}}^e dV = -\underline{M}^e \underline{\ddot{a}}^e \tag{4.58}$$

Výrazom

$$\underline{M}^e = \int\limits_{V^e} \underline{N}^{eT}\rho^e \underline{N}^e dV \tag{4.59}$$

je označená matica hmotnosti, ktorá je štvorcová a má rád rovný počtu stupňov voľnosti pohybu uzlových bodov konečného prvku. Napríklad, pre 8-uzlový priestorový telesový konečný prvok bude mať, podobne ako jeho matica tuhosti, rozmer 24 x 24. Rozšírením vektora zotrvačných síl (4.58) všetkých konečných prvkov a ich súčtom dostaneme maticu hmotnosti konštrukcie $\underline{M}$ vynásobenú celkovým vektorom uzlových zrýchlení $\underline{\ddot{a}}$

$$\underline{F}_z = \sum_{e=1}^{NET} \underline{F}^{ez*} = -\sum_{e=1}^{NET} \underline{M}^{e*}\underline{\ddot{a}}^{e*} = -\underline{M}\,\underline{\ddot{a}} \tag{4.60}$$

Pohybová rovnica konštrukcie (mechanickej sústavy) potom bude mať tvar

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{a}} + \underline{K}\,\underline{a} = \underline{F}(t) \tag{4.61}$$

V tejto rovnici pravá strana i vektory zrýchlenia a posunutia uzlových bodov sú funkciou času.

Podobným postupom možno do rovníc MKP zahrnúť aj tlmiace sily. Tie sú funkciou rýchlosti uzlových bodov $\underline{\dot{a}}$ spojených s maticou tlmenia $\underline{C}$, čím rovnica (4.61) prejde do tvaru

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{a}} + \underline{C}\underline{\dot{a}} + \underline{K}\,\underline{a} = \underline{F}(t) \tag{4.62}$$

Matica tlmenia konečného prvku sa analogicky ku matici hmotnosti vyjadruje nasledujúcim spôsobom

$$\underline{C}^e = \int\limits_{V^e} \kappa^e\,\underline{N}^{eT}\underline{N}^e dV \tag{4.63}$$

kde κ^e je tlmenie konečného prvku, ktoré sa zisťuje veľmi obtiažne. Preto sa matica tlmenia konštrukcie zostavuje pomocou matice hmotnosti a tuhosti konštrukcie podľa vzťahu

$$\underline{C} = \alpha\,\underline{M} + \beta\,\underline{K} \tag{4.64}$$

Súčinitele α a β sa určujú experimentálne, a tento spôsob tlmenia sa nazýva proporcionálnym, resp. Rayleighovým. Je to len aproximácia reálneho tlmenia, ktoré sa vo všeobecnosti delí na vonkajšie (odpor prostredia proti kmitaniu), vnútorné (materiálové), a konštrukčné (závislé na type konštrukcie). Tlmenie sa tiež delí na pasívne a aktívne. V mechatronike sa využíva vo veľkej miere aktívne tlmenie vyvolané aktuátormi, ktoré vyvodia posuv alebo sily utlmujúce kmitanie.
Ako vidieť z uvedeného, na výpočet kmitania s MKP je potrebné ešte zostaviť maticu hmotnosti daného konečného prvku. V nasledujúcej časti bude uvedený postup zostavenia lokálnej matice hmotnosti pre dvojuzlový prútový a nosníkový konečný prvok. Podobný postup ako v elastostatike možno potom z lokálnych matíc hmotnosti zostaviť globálne a globálne rozšírene matice hmotnosti, z ktorých sa obvyklým postupom určí matica hmotnosti konštrukcie.

4.4.1 Lokálna matica hmotnosti prútového konečného prvku

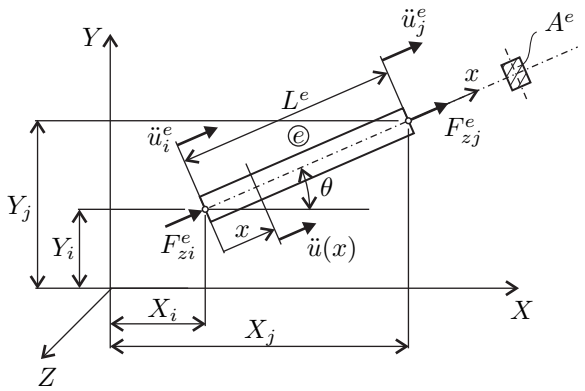
Uvažujme prútový prvok s uzlami i a j, ktorého dĺžka je l^e, prierezová plocha A^e, modul pružnosti E^e a merná hmotnosť ρ^e (Obr. 4.25). Lokálna súradnicová os prúta je označená písmenom x a leží v rovine XY globálneho súradnicového systému X, Y, Z. Lokálná os x zviera s globálnou osou X uhol θ.
Uzlové zrýchlenia sú $\ddot{u}_i^e$ a $\ddot{u}_j^e$, zrýchlenie bodu vo vzdialenosti x je $\ddot{u}(x)$. V danom lokálnom súradnicovom systéme v smere osi $x \in \langle 0, L^e \rangle$ má prútový prvok 2 stupne voľnosti zrýchlenia

$$\overline{\underline{\ddot{a}}}^e = \left[\ddot{u}_i^e,\, \ddot{u}_j^e\right]^T \tag{4.65}$$

Zotrvačná sila pôsobiaca na konečný prvok je

$$\overline{\underline{F}}_z^e = -\rho^e A^e \int\limits_0^{L^e} \ddot{u}(x)dx \tag{4.66}$$

Jej približnú hodnotu možno určiť aj bez znalosti rozdelenia funkcie zrýchlenia $\ddot{u}(x)$, a to tak, že polovicu hmotnosti prvku priradíme uzlovému zrýchleniu $\ddot{u}_i^e$ a druhú po-



Obr. 4.25. Prútový konečný prvok

lovicu zrýchleniu $\ddot{u}_j$. Potom vektor zotrvačných uzlových síl

$$\underline{\overline{F}}_z^e = \begin{bmatrix} F_{zi}^e \\ F_{zj}^e \end{bmatrix} = -\rho^e A^e L^e \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_i^e \\ \ddot{u}_j^e \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

Je zrejme, že $\rho^e A^e L^e = m^e$ je hmotnosť konečného prvku. Matica

$$\underline{\overline{M}}^e = m^e \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{4.68}$$

je lokálna matica hmotnosti konečného prvku. Matice hmotnosti vytvorené takýmto spôsobom sa nazývajú matice sústredenej (lumped) hmotnosti. Ako vidieť, matica (4.68) je diagonálna.
Ak sa na odvodenie matice hmotnosti použijú tvarové funkcie (interpolačné), dostaneme presnejšie matice hmotnosti, ktoré sa nazývajú konzistentné (consistent).
Čiže ak

$$\underline{\overline{N}}^e = \left[N_i^e,\, N_j^e \right] = \left[1 - \frac{x}{L^e} \quad \frac{x}{L^e} \right] \tag{4.69}$$

potom

$$\underline{\overline{M}}^e = \rho^e \int_{V^e} \underline{N}^{eT} \underline{N}^e dV = \rho^e A^e \int_0^{L^e} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L^e} \\ \frac{x}{L^e} \end{bmatrix} \cdot \left[1 - \frac{x}{L^e} \quad \frac{x}{L^e} \right] \tag{4.70}$$

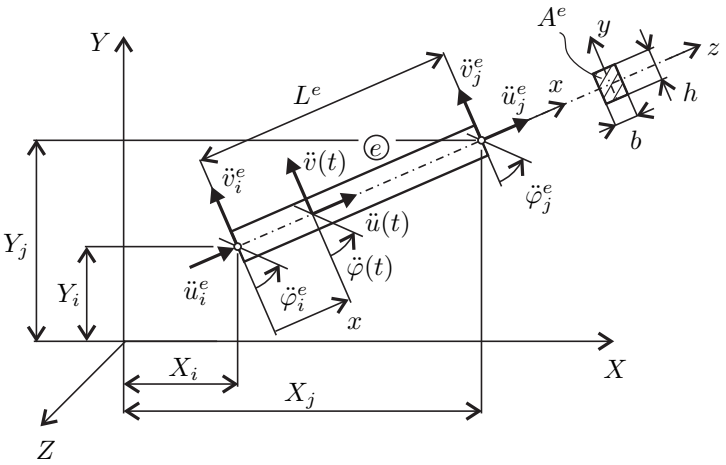
Vyčíslením integrálu (4.70) dostaneme lokálnu konzistentnú maticu hmotnosti

$$\underline{\overline{M}}^e = m^e \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

Aj konzistentná matica hmotnosti je symetrická, ale už nie je diagonálna. Jej použitie v dynamických analýzach však zvyšuje presnosť riešenia.
Globálnu maticu hmotnosti rovinného prútového konečného prvku dostaneme klasickou transformáciou lokálnej matice hmotnosti do globálneho súradnicového systému podľa tých istých zásad a vzťahov ako v prípade matíc tuhosti.

4.4.2 Lokálna matica hmotnosti nosníkového konečného prvku

Analogickým postupom ako pri prútovom prvku možno dostať maticu hmotnosti nosníkového konečného prvku. Kvôli jednoduchosti bude ukázaný postup zostavenia lokálnej matice hmotnosti Hermiteovského rovinného konečného prvku (Obr. 4.26). Podobným postupom možno určiť maticu hmotnosti priestorového nosníkového konečného prvku.



Obr. 4.26. Rovinný nosníkový konečný prvok

Dvojuzlový nosníkový prvok dvojnásobne symetrického prierezu s výškou h, dĺžka je L^e, prierezovú plocha A^e, kvadratický moment prierezovej plochy I, modul pružnosti E^e a mernú hmotnosť ρ^e.
Uzlové zrýchlenia sú $\ddot{u}_i^e$, $\ddot{v}_i^e$, $\ddot{\varphi}_i^e$ a $\ddot{u}_j^e$, $\ddot{v}_j^e$, $\ddot{\varphi}_j^e$, zrýchlenia bodu vo vzdialenosti x sú $\ddot{u}(t)$, $\ddot{v}(t)$ a $\ddot{\varphi}(t)$. V danom lokálnom súradnicovom systéme $x \in \langle 0, L^e \rangle$ a $y \in \langle -h/2, h/2 \rangle$ má prútový prvok 6 stupňov voľnosti zrýchlenia

$$\underline{\overline{\ddot{a}}}^e = \left[\ddot{u}_i^e, \ddot{v}_i^e, \ddot{\varphi}_i^e, \ddot{u}_j^e, \ddot{v}_j^e, \ddot{\varphi}_j^e\right]^T \tag{4.72}$$

Podobným spôsobom ako pri prútovom prvku možno zostaviť konzistentnú lokálnu maticu hmotnosti Euler-Bernoliho rovinného i priestorového konečného prvku. Pre rovinný prvok podľa Obr. 4.26 má lokálna konzistentná matica hmotnosti tvar

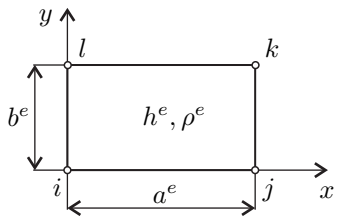
$$\overline{\underline{M}}^e = \frac{m^e}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L^e & 0 & 54 & -13L^e \\ & & 4L^{e2} & 0 & 13L^e & -3L^{e2} \\ S & & & 140 & 0 & 0 \\ & Y & & & 156 & -22L^e \\ & & M & & & 4L^{e2} \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

Globálnu konzistentnú maticu hmotnosti rovinného nosníkového konečného prvku dostaneme klasickou transformáciou lokálnej matice hmotnosti do globálneho súradnicového systému. Ak označíme $c = \cos\theta = (X_j - X_i)/L^e$ a $s = \sin\theta = (Y_j - Y_i)/L^e$, potom globálnu konzistentnú maticu hmotnosti dostaneme v tvare

$$\underline{M}^e = \frac{m^e}{420} \begin{bmatrix} 140c^2 + 15s^2 & -16c\,s & -22s\,L^e & 70c^2 + 54s^2 & 16c\,s & 13s\,L^e \\ & 156c^2 + 140s^2 & 22c\,L^e & 16c\,s & 54c^2 + 70s^2 & -13c\,L^e \\ & & 4L^{e2} & -13s\,L^e & 13c\,L^e & -3L^{e2} \\ S & & & 140c^2 + 156s^2 & -16c\,s & 22s\,L^e \\ & Y & & & 156c^2 + 140s^2 & -22c\,L^e \\ & & M & & & 4L^{e2} \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

4.4.3 Matica hmotnosti rovinnej napätosti a rovinnej deformácie pravouhlého štvoruzlového rovinného telesového konečného prvku

Podobne ako pri prútovom a nosníkovom konečnom prvku možno zostaviť maticu hmotnosti rovinných telesových konečných prvkov. Tak, ako to bolo pri elastostatike aj pri elastodynamike možno maticu hmotnosti odvodiť analyticky v uzatvorenom stave (napr. bilineárne konečné prvky), alebo numerickou integráciou (izoparametrické konečné prvky). Kvôli názornosti uvedieme v tejto kapitole bez odvodenia maticu hmotnosti pravouhlého štvoruzlového konečného prvku v analytickom tvare.
Uvažujme rovinný, izotropický a homogénny konečný prvok konštantnej hrúbky h^e v kartézskom súradnicovom systéme x, y, pričom $x \in \langle 0, a^e \rangle$ a $y \in \langle 0, b^e \rangle$ – Obr. 4.27. Merná hmotnosť materiálu je ρ^e.
Pri uvažovaní klasických bilineárnych tvarových funkcií má matica hmotnosti rovinnej



Obr. 4.27. Rovinný pravouhlý štvoruzlový konečný prvok

napätosti i rovinnej deformácie rovnaký tvar

$$M^e = \frac{\rho^e\, a^e\, b^e\, h^e}{36} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ & & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ & & & & 4 & 0 & 2 & 0 \\ & & & & & 4 & 0 & 2 \\ & & & & & & 4 & 0 \\ & & & & & & & 4 \end{bmatrix} \tag{4.75}$$

Poznámka: Podrobné odvodenie matíc hmotnosti zložitejších konečných prvkov možno nájsť v zozname použitej literatúry uvedenej na konci tejto učebnice.

4.5 Rovnice MKP modálnej analýzy

Modálnou analýzou mechanickej sústavy zisťujeme vlastné frekvencie a vlastné tvary voľného kmitania.
Ako bolo už uvedené, vlastné kmitanie bez tlmenia je harmonické. Časová závislosť posunutí uzlových bodov konečno-prvkového modelu je

$$\underline{a}(t) = \underline{\Phi} \sin \omega t \tag{4.76}$$

respektíve

$$\begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_{NDOF}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_{NDOF} \end{bmatrix} \sin \omega t \tag{4.77}$$

Všetky body mechanickej sústavy kmitajú rovnakou uhlovou frekvenciou ω, avšak amplitúda kmitania $\underline{\Phi}$ je rôzna. Index $NDOF$ predstavuje celkový počet stupeňov voľnosti sústavy. Tento voľný kmitavý pohyb charakterizuje dynamické vlastnosti sústavy a závisí od tuhosti a hmotnosti sústavy ako aj jej uloženia. Amplitúdy kmitania nezávisia

od času, ale len od počiatočného impulzu, ktorý takéto kmitanie vyvolal. Uhlová frekvencia ω, ktorou sústava kmitá je vlastná frekvencia a vektor amplitúd $\underline{\Phi}$ je vlastný tvar kmitania (tiež mód). Po rozkmitaní telesa bez tlmenia už naň nepôsobia žiadne vonkajšie sily. Pohybová rovnica vlastného voľného kmitania sústavy má tvar

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{a}} + \underline{K}\,\underline{a} = \underline{0} \tag{4.78}$$

Ak $\underline{a} = \underline{\Phi}\sin\omega t$, potom $\underline{\dot{a}} = \underline{\Phi}\omega\cos\omega t$ a $\underline{\ddot{a}} = -\underline{\Phi}\omega^2\sin\omega t = -\omega^2\underline{a}$. Dosadením zrýchlenia a posunutia do (4.78) dostaneme rovnicu vlastného kmitania

$$\underline{K}\,\underline{\Phi}\sin\omega t - \underline{M}\,\underline{\Phi}\,\omega^2\sin\omega t = \underline{0} \tag{4.79}$$

respektíve jej upravený tvar

$$\left[\underline{K} - \omega^2\underline{M}\right]\underline{\Phi} = \underline{0} \tag{4.80}$$

Pre neupevnené teleso ja matica tuhosti $\underline{K}$ singulárna a rovnica (4.80) je splnená pre $\omega = 0$. Vtedy teleso vykonáva tuhý pohyb. Aby pružne kmitalo, musíme mu vonkajšími väzbami odobrať potrebné stupne voľnosti pohybu tak, aby bolo minimálne staticky určito uložené. Matematická realizácia tohto problému spočíva v redukcii systému rovníc (4.80) a to tak, že vynecháme riadky a stĺpce v matici tuhosti a hmotnosti zodpovedajúce nulovej amplitúde kmitania v upevnených bodoch. Dostaneme tak redukované charakteristické rovnice voľného kmitania v tvare

$$\left[\underline{\widetilde{K}} - \omega^2\underline{\widetilde{M}}\right]\widetilde{\Phi} = \underline{0} \tag{4.81}$$

Redukované matice a vektor amplitúd sú označené vrchným symbolom vlnovky. Nenulové riešenie redukovaného systému (4.81) dostaneme za podmienky, že determinant matice koeficientov bude rovný nule

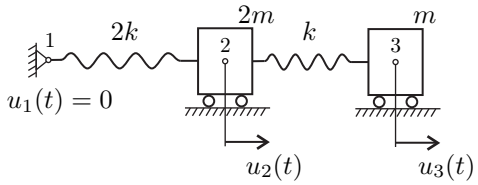
$$\left|\left[\underline{\widetilde{K}} - \omega^2\underline{\widetilde{M}}\right]\right| = \underline{0} \tag{4.82}$$

Čiže po detailnom rozpísaní dostaneme rovnicu (4.82) v tvare

$$\left|\begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} & \dots & k_{1n} - \omega^2 m_{1n} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} & \dots & k_{2n} - \omega^2 m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} - \omega^2 m_{n1} & k_{n2} - \omega^2 m_{n2} & \dots & k_{nn} - \omega^2 m_{nn} \end{bmatrix}\right| = \underline{0} \tag{4.83}$$

V (4.83), k_{ij} a m_{ij} sú členy matice $\underline{\widetilde{K}}$ resp. $\underline{\widetilde{M}}$. Rozpísaním determinantu matice v (4.83) dostaneme algebrickú rovnicu stupňa n na výpočet štvorcov vlastných frekvencií ω^2. Tieto korene rovnice (4.81) predstavujú n-kvadrátov vlastných frekvencií: $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_i^2, \dots, \omega_n^2$. Ľubovoľnej frekvencii ω_i možno potom priradiť vektor $\underline{\Phi}_i$ – vlastný tvar kmitania. Je zrejmé, že aj $c\,\underline{\Phi}_i$ je riešením tejto rovnice (c je konštanta). Pri výpočte vektora $\underline{\Phi}_i$ pre dané ω_i sa používa normovanie vzhľadom na niektorú zložku amplitúdy alebo vzhľadom na hmotnosť telesa, čo je ukázané na nasledovnom príklade.

Príklad 4.7
Pre jednorozmernú netlmenú dvojhmotovú sústavu s dvomi pružinami treba určiť vlastné frekvencie a vlastné tvary kmitania. Dané je: $k = 128\ \mathrm{Nm}^{-1}$, $m = 1$ kg (Obr. 4.28).



Obr. 4.28. Vlastné kmitanie dvojhmotovej sústavy

Riešenie:
Model sústavy pozostáva z dvoch prútových konečných prvkov a z troch uzlových bodov, z ktorých každý má jeden stupeň voľnosti pohybu. Matica tuhosti konštrukcie bude mať rozmer [3x3] a dostaneme ju ako súčet rozšírených matíc tuhosti konečných prvkov

$$\underline{K} = \underline{K}^{1*} + \underline{K}^{2*} = \begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 \\ -2k & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \tag{4.84}$$

Ak hmotnosť pružných prvkov zanedbáme, matica hmotnosti konštrukcie je

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \tag{4.85}$$

Keďže bod č. 1 je vonkajšou väzbou uchytený, sústava má v skutočnosti len dva stupne voľnosti pohybu, teda možno určiť dve vlastné frekvencie a im zodpovedajúce dva vlastné tvary kmitania. Determinant redukovaného systému rovníc vlastného kmitania má potom tvar:

$$\left| \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right| = 0 \tag{4.86}$$

Vyjadrením determinantu (4.86) dostaneme kvadratickú rovnicu na výpočet dvoch kvadrátov vlastnej frekvencie

$$2m^2\left(\omega^2\right)^2 - 5k\,m\,\omega^2 + 2k^2 = 0 \tag{4.87}$$

ktorej vyriešením dostaneme vlastné frekvencie

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{0,5\frac{k}{m}} = 8\,\mathrm{rad/s} \\ \omega_2 &= \sqrt{2\frac{k}{m}} = 16\,\mathrm{rad/s} \end{aligned} \tag{4.88}$$

frekvencie

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\omega_1}{2\pi} = 1,273\,\mathrm{Hz} \\
f_2 &= \frac{\omega_2}{2\pi} = 2,546\,\mathrm{Hz}
\end{aligned}
\tag{4.89}
$$

Z redukovaných rovníc vlastného tvaru kmitania

$$
\left(\begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{2i} \\ \Phi_{3i} \end{bmatrix} = \underline{0} \tag{4.90}
$$

možno po normovaní určiť vlastné tvary kmitania.

a) Normovanie vzhľadom na vybranú amplitúdu:
Nech napr. pre $i = 1$: $\Phi_{31} = 1{,}0$; $\omega_i = \omega_1 = 8$ rad/s. Potom z prvej rovnice systému (4.90) dostaneme

$$
(3k - \omega_1^2\, 2m)\Phi_{21} - k\Phi_{31} = 0 \;\Rightarrow\; \Phi_{21} = 0,5 \tag{4.91}
$$

Potom prvý vlastný tvar kmitania

$$
\underline{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,0 \end{bmatrix} \tag{4.92}
$$

Nech pre $i = 2$: $\Phi_{32} = 1{,}0$; $\omega_2 = 16$ rad/s. Potom druhý vlastný tvar kmitania je

$$
\underline{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{22} \\ \Phi_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0 \\ 1,0 \end{bmatrix} \tag{4.93}
$$

b) Normovanie vzhľadom na maticu hmotnosti M:
Zo systému rovníc (4.90) dostaneme pre $i = 1$, t.j. $\omega_i = \omega_1 \;\Rightarrow\; \Phi_{21}$; Φ_{31}, a pre $i = 2$, t.j. $\omega_i = \omega_2 \;\Rightarrow\; \Phi_{22}$; Φ_{32}. Po vynásobení týchto amplitúd konštantou $\dfrac{1}{\sqrt{\underline{\Phi}_i^T \underline{M\Phi}_i}}$ možno pre $i = 1$ dostať:

$$
C_1^M = \frac{1}{\sqrt{\underline{\Phi}_i^T \underline{M\Phi}_i}} = \frac{1}{\sqrt{\begin{bmatrix}\Phi_{21}\ \Phi 31\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{31} \end{bmatrix}}} \tag{4.94}
$$

Potom normované amplitúdy kmitania sú:

$$
{}^M\underline{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} C_1^M \Phi_{21} \\ C_1^M \Phi_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4082 \\ 0,8165 \end{bmatrix}, \qquad {}^M\underline{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} C_1^M \Phi_{22} \\ C_1^M \Phi_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5774 \\ 0,5774 \end{bmatrix} \tag{4.95}
$$

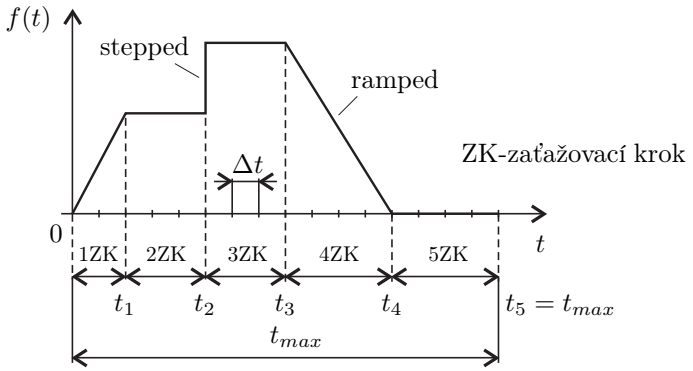
Obidva spôsoby normovania vlastných tvarov kmitania sú realizované aj v komerčných systémoch metódy konečných prvkov.
Ako vyplýva z hore uvedeného analytického postupu modálnej analýzy jednoduchej mechanickej sústavy, modálna analýza pozostáva z hľadania nulových bodov charakteristickej rovnice vlastného kmitania (4.82). Matica systému rovníc pozostáva z celkovej matice tuhosti a matice hmotnosti systému. Upevnený mechanický systém má toľko vlastných frekvencií a vlastných tvarov, koľko má stupňov voľnosti pohybu. Celková matica systému je závislá od typu konečných prvkov, na ktoré je analyzovaná sústava diskretizovaná. A tomu zodpovedajú aj vlastné tvary kmitania. Napr. pri nosníkových konštrukciách možno na základe vlastných tvarov kmitania hovoriť o axiálnom, ohybovom, či torznom kmitaní. Pri sústavách so zložitou geometriou je však takéto rozlíšenie nemožné. Z praktického hľadiska je pri návrhu mechanického systému zaujímavých len niekoľko prvých vlastných frekvencií. Tak ako bolo ukázané v kapitole 4.2, pri známom harmonickom zaťažení musí byť konštrukcia spravidla navrhnutá tak, aby frekvencia harmonického kmitania bola mimo príslušnej vlastnej frekvencie, t. j. aby nenastala rezonancia. Ak však mechatronický systém pracuje práve na rezonančnom princípe, potom jeho tuhosť a hmotnosť musí zodpovedať požadovaným rezonančným parametrom.

4.6 Rovnice MKP prechodovej analýzy a ich riešenie

Pri prechodovej alebo taktiež tranzientnej analýze skúmame dynamické vlastnosti sústavy vystavenej časovo premenlivému harmonickému alebo náhodnému zaťaženiu.
Systém rovníc MKP má tvar

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{a}}(t) + \underline{C}\,\underline{\dot{a}}(t) + \underline{K}\,\underline{a}(t) = \underline{F}(t) \tag{4.96}$$

kde $\underline{M}$, $\underline{C}$ a $\underline{K}$ je matica hmotnosti, tlmenia a tuhosti konštrukcie, ktoré sú konštantné. Ďalej, $\underline{\ddot{a}}(t)$, $\underline{\dot{a}}(t)$ a $\underline{a}(t)$ je vektor zrýchlenia, rýchlosti a posunutia uzlových bodov, ktoré sú časovo závislé. Na pravej strane rovnice (4.96) sú časovo závislé sily v uzlových bodoch – $F(t)$. Z matematického hľadiska je to sústava lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu (vzľadom na čas t) s konštantnými koeficientami a neznámymi funkciami $\underline{\ddot{a}}(t)$, $\underline{\dot{a}}(t)$ a $\underline{a}(t)$. Ak pravá strana rovnice (4.96) je harmonická funkcia, hovoríme o rovniciach harmonického kmitania. Ak pravá strana je všeobecná časová závislosť, hovoríme o rovniciach pre prechodovú analýzu. Ak sa tlmenie systému neuvažuje, hovoríme o rovniciach voľného kmitania. Pri výpočte statickej úlohy stačilo zadať konečné hodnoty síl, pri dynamickej analýze sú však tieto hodnoty časovo závislé a ich priebeh musíme zadať pre celý časový interval $\langle 0, t_{max} \rangle$. V programoch MKP sa to väčšinou robí tak, že v závislosti od známej časovej zmeny síl sa tento interval rozdelí na potrebný počet zaťažujúcich krokov (load steps), v ktorých sa predpokladá, že sa sily menia buď skokom (stepped change) alebo lineárne (ramped change) – pozri Obr. 4.29.
Pri takomto postupe potom stačí pre každý zaťažovací krok zadať čas len na jeho konci a hodnoty síl v tomto čase. Pritom sa obyčajne pre každý zaťažovací krok zadáva aj veľkosť časového kroku Δt, od ktorého závisí presnosť riešenia úlohy v príslušnom časovom úseku, a ktorý môže byť v každom časovom kroku rôzny. Pri harmonickej analýze sa postup zadávania časovo závislej sily zjednoduší, pretože ide o harmonickú funkciu.



Obr. 4.29. Časová závislosť zaťaženia

Pravá strana rovníc (4.96) je pre každý zaťažovací krok známa a poznáme aj začiatočné podmienky úlohy

$$\begin{aligned} \underline{a}(t=0) &= \underline{a}_0 \\ \underline{\dot{a}}(t=0) &= \underline{\dot{a}}_0 \\ \underline{\ddot{a}}(t=0) &= \underline{\ddot{a}}_0 \end{aligned} \tag{4.97}$$

a treba nájsť riešenie rovníc (4.96) v čase od 0 po t_{max}. Uvažovaný časový interval sa rozdelí na zaťažovacie kroky, ktoré na seba časovo nadväzujú, a i-tý zaťažovací krok na n, spravidla rovnakých integračných krokov Δt (teda pre rovnaké integračné kroky $\Delta t = t_{max}/n$), pričom riešenie budeme hľadať v časoch Δt, $2\Delta t$, $\ldots$, t, t_{max}. Je zrejmé, že algoritmus, ktorý vyjadrí riešenie v čase $t + \Delta t$ pomocou hodnôt v čase t, bude schopný riešiť úlohu v celom uvažovanom časovom intervale úlohy. Takéto metódy riešenia sa nazývajú priame integračné metódy, čo znamená, že pred integráciou sa nerobí žiadna transformácia týchto rovníc do inej (vhodnejšej) formy – napr. Laplaceova transformácia a iné. Ďalším znakom týchto metód je, že v intervale Δt sa zavádzajú predpoklady o tom, ako sú v ňom od seba závislé uvedené tri neznáme funkcie $\underline{a}$, $\underline{\dot{a}}$, $\underline{\ddot{a}}$. Je zrejmé, že od oprávnenosti a kvality tohto predpokladu závisí presnosť a numerická stabilita použitej metódy. Pri takomto postupe musí byť časový krok dostatočne malý a to najmä pri tuhých sústavách, ktorých vlastné frekvencie sú vysoké.
Metódy priamej integrácie rovníc dynamickej rovnováhy (4.96), ktoré sa využívajú v softvéroch MKP možno rozdeliť na explicitné a implicitné. Pri explicitných metódach sa na základe predpokladov o závislosti funkcií $\underline{a}$, $\underline{\dot{a}}$, $\underline{\ddot{a}}$ v časovom kroku vyjadria rovnice (4.96) pre čas t a z nich sa vypočíta $\underline{a}_{t+\Delta t}$. Rovnice pre $\underline{\dot{a}}_{t+\Delta t}$, $\underline{\ddot{a}}_{t+\Delta t}$ sú dané zvolenými predpokladmi príslušnej metódy. Pri implicitných metódach sa rovnice dynamickej rovnováhy (4.96) napíšu pre čas $t + \Delta t$. Obidvoma postupmi sa sústava diferenciálnych rovníc (4.96) zmení na sústavu obyčajných algebraických rovníc, ktorá sa potom rieši ako pri statickej úlohe. Pri explicitných metódach matica sústavy algebraických rovníc (4.96) obsahuje len maticu hmotnosti, a preto sú tieto metódy efektívne predovšetkým pri úlohách s diagonálnymi maticami sústredenej hmotnosti. V takomto prípade je riešenie i veľkej sústavy rovníc s veľkým počtom časových krokov jednoduché a rýchle. Implicitné metódy sú vhodné pri riešení úloh kde sa vyžaduje veľká presnosť riešenia

s použitím konzistentnej matice hmotnosti. Na rozdiel od explicitných metód sú implicitné metódy nepodmienečne konvergentné – je zaručená konvergencia a dostatočná presnosť – aj pri veľkom časovom kroku.
V programoch MKP sa využíva najmä metóda stredovej integrácie (explicitná metóda) a Newmarkova metóda (implicitná metóda ktorú využíva aj softvér ANSYS). Preto bude Newmarková metóda opísana v nasledujúcej kapitole trochu podrobnejšie.

4.6.1 Newmarková metóda riešenia rovníc dynamickej rovnováhy

V Newmarkovej metóde sa zavádzajú nasledujúce predpoklady pre závislosť vyšetrovaných kinematických veličín v časovom kroku

$$\underline{\dot{a}}_{t+\Delta t} = \underline{\dot{a}}_t + \left[(1-\delta)\underline{\ddot{a}}_t + \delta\,\underline{\ddot{a}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t \tag{4.98}$$

$$\underline{a}_{t+\Delta t} = \underline{a}_t + \underline{\dot{a}}_t\Delta t + \left[(1/2-\alpha)\underline{\ddot{a}}_t + \alpha\,\underline{\ddot{a}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \tag{4.99}$$

Rovnice i konštanty α a δ majú jasný fyzikálny význam. Ak sa zvolí $\alpha = 1/6$ a $\delta = 1/2$, ide o metódu lineárneho zrýchlenia, ako to vidieť z rovnice (4.98), ktorá vtedy nadobudne tvar

$$\underline{\dot{a}}_{t+\Delta t} = \underline{\dot{a}}_t + \frac{\underline{\ddot{a}}_t + \underline{\ddot{a}}_{t+\Delta t}}{2}\Delta t \tag{4.100}$$

Ak zo vzťahov (4.98) a (4.99) vyjadríme vektory $\underline{\ddot{a}}_{t+\Delta t}$ a $\underline{\dot{a}}_{t+\Delta t}$ a dosadíme ich do rovníc rovnováhy (4.96) vyjadrených pre čas $t+\Delta t$

$$\underline{M}\,\underline{\ddot{a}}_{t+\Delta t} + \underline{C}\,\underline{\dot{a}}_{t+\Delta t} + \underline{K}\,\underline{a}_{t+\Delta t} = \underline{F}_{t+\Delta t} \tag{4.101}$$

dostaneme matematickou úpravou sústavu obyčajných algebraických rovníc

$$\underline{\hat{K}}\,\underline{a}_{t+\Delta t} = \underline{F}_{t+\Delta t} \tag{4.102}$$

ktorých riešením možno určiť posunutia uzlových bodov siete konečných prvkov v čase $t+\Delta t$. Matica koeficientov sústavy $\underline{\hat{K}}$ v rovnici (4.102) sa nazýva matica modifikovanej (efektívnej) tuhosti. Zo známych posunutí uzlových bodov možno potom pre daný časový krok vypočítať mechanické pretvorenia a napätia.

Register

amplitúda kmitania, 114, 122
amplitúdovo-frekvenčná
charakteristika, 123
ANSYS, 12

deformácia, 39
dynamická výchylka, 124

elastodynamika, 12, 103
elastostatická úloha, 56
elastostatika, 12
energetická formulácia, 59

hermiteovské interpolačné polynómy, 86
Hookov zákon, 33

kmitanie
harmonické, 124
ohybové, 119
pružných sústav, 114
tlmené, 115
torzné, 120
vlastné, 114
voľné, 115
vynútené, 115
vynútené axiálne, 122
vynútené ohybové, 125
konečný prvok
nosníkový – BEAM, 19, 67, 85
plošný – PLANE, 17, 67
prútový – LINK, 19, 67, 69
priestorový – SOLID 3D, 17, 67
rovinný izoparametrický, 97
rovinný nosníkový, 88
špeciálny, 102
spojitého telesa, 92
trojuholníkový, 92
krútenie, 29

matica
hmotnosti, 127
konzistentná matica hmotnosti, 130
sústredenej hmotnosti, 129
tlmenia, 128
tuhosti, 77
mechatronické prvky a systémy, 12
mechatronika, 12
MKP - metóda konečných prvkov, 12
MKP
pre elastodynamiku, 126
systém rovníc, 64
modul pružnosti
v ťahu, 33
v šmyku, 34

napätosť, 39
jednoosová, 41
priestorová, 46
rovinná, 44
Newmarkova metóda, 138

ohyb, 29

pevnosť materiálu, 23
pole posunutia, 59
prechodová analýza, 136
pretvorenie, 47
pružná sústava, 118
pružnosť materiálu, 23

rezonancia kmitania, 115
rotačný pohyb, 112
rovnica
pohybová, 127
prvková, 70
rovnice elastostatiky, 23

súčiniteľ naladenia, 123

šmyk, 28
systém, 12
    mechanický, 12
    smart, 12

ťah (tlak), 28

vlastná kruhová frekvencia kmitania, 117
vlastný tvar kmitania, 133
vzper, 29

zotrvačná sila, 105

Literatúra

[1] ABAQUS: *ABAQUS/CAE User's Manual: Version 6.4*. ABAQUS, 2003.

[2] ADINA, R. D.: *ADINA-IN for ADINA Users Manual: A Program for Preprocessing and Display of ADINA*. ADINA R D, 1992.

[3] ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA 15342/1300, USA.

[4] Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982. ISBN 978-0133173055

[5] Benča, Š: *Riešenie nelineárnych pevnostných úloh pomocou MKP*. STU Bratislava, 2009. ISBN 9788022730778

[6] Benča, Š.: *Výpočtové postupy MKP*. STU Bratislava, 2006. ISBN 8022724041

[7] Bickford, W. B.: *A First Course in the Finite Element Method*. IRWIN, druhé vydanie, 1994. ISBN 978-0256144727

[8] Brdička, M.; Samek, L.; Sopko, B.: *Mechanika kontinua*. Academia, 2011. ISBN 9788020020390

[9] Burnett, D. S.: *Finite Element Analysis, From Concepts to Applications*. Addison-Wesley Publishing Company, 1987. ISBN 0-201-10806-2

[10] COMSOL: *COMSOL Multiphysics: User's guide*. Comsol, 2008.

[11] Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, štvrté vydanie, 2011. ISBN 978-0471356059

[12] Hinton, L.; Owen, D. R. J.: *Finite Element Programming*. Accademic Press, 1977.

[13] Hughes, T. J. R.: *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, 1987. ISBN 9978-0486411811

[14] Humar, J.: *Dynamics of Structures*. CRC Press, tretie vydanie, 2012. ISBN 978-9058092458

[15] Jin, J. M.: *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley-IEEE Press, druhé vydanie, 2002. ISBN 978-0471438182

[16] Kaukič, M.: *Numerická analýza 1, Základné problémy a metódy.* MC Energya, 1998.

[17] Kompiš, V.; Žmindák, M.; Kaukič, M.: *Počítačové metódy v mechanike.* Žilinská univerzita, 1997.

[18] Kutiš, V.: *Základy modelovania a simulácie.* STU Bratislava, 2010. ISBN 9788022733458

[19] Kutiš, V.; Murín, J.; Paulech, J.; Goga. V.: *Metóda konečných prvkov v mechatronike I. Úvod do programu ANSYS.* STU Bratislava, 2014. ISBN 9788022741293

[20] Lewis, R. W.; Nithiarasu, P.; Seetharamu, K. N.: *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow.* Wiley, prvé vydanie, 2004. ISBN 0470847891

[21] Müller, G.; Groth, C.: *FEM für Praktiker.* Expert Verlag, 2007.

[22] Moaveni, S.: *Finite Element Analysis Theory and Application with ANSYS.* Pearson Prentice Hall, tretie vydanie, 2008. ISBN 978-0131890800

[23] Murín, J.: *Metóda konečných prvkov pre prútové a rámové konštrukcie.* STU Bratislava, 1999. ISBN 80-227-1287-6

[24] Pilkey, W. D.; Wunderlich, W.: *Mechanics of Structures: Variational and Computational Methods.* CRC Press, druhé vydanie, 2002. ISBN 978-0849307003

[25] Rao, S. S.: *The Finite Element Method in Engineering.* Butterworth-Heinemann, piate vydanie, 2001. ISBN 978-1856176613

[26] Trebuňa, F.; Šimčák, F.: *Pružnosť a pevnosť I, II.* Vienala, 2000. ISBN 9788070994788

[27] Záhorec, O.; Caban, S.: *Dynamika.* OLYMP, druhé vydanie, 2002. ISBN 8070998253

[28] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *Finite Element Method: Volume 2 - Solid Mechanics.* Butterworth-Heinemann, 2000. ISBN 978-0470395059

[29] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics.* Butterworth-Heinemann, 6 vydanie, 2005. ISBN 978-0750663212

[30] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Nithiarasu, P.: *The Finite Element Method for Fluid Dynamics.* Butterworth-Heinemann, 6 vydanie, 2005. ISBN 978-0750663229

[31] Žmindák, M.; Grajciar, I.; Nozdrovický, J.: *Modelovanie a výpočty v metóde konečných prvkov: Modelovanie v ANSYSe. Diel I.* Vedeckotechnická spoločnosť pri Žilinskej univerzite, 2004. ISBN 80-968823-5-X

prof. Ing. Justín Murín, DrSc. – Ing. Juraj Hrabovský, PhD.
doc. Ing. Vladimír Kutiš, PhD.

METÓDA KONEČNÝCH PRVKOV
Vybrané kapitoly pre mechatronikov

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU,
Bratislava, Vazovova 5, v roku 2014.

Edícia monografií

Rozsah 142 strán, 96 obrázkov, 2 tabuľky, 8,764 AH, 8,980 VH, náklad 150 výtlačkov,
1. vydanie, edičné číslo 5823, tlač Nakladateľstvo STU v Bratislave.

85 – 271 – 2014

ISBN 978-80-227-4298-6