

Dynamika mechatronických systémov

Kinematika bodu

Vladimír Kutiš

Oddelenie aplikovanej mechaniky a mechatroniky
UAMT, FEI STU Bratislava



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta elektrotechniky a informatiky

SLOVAK UNIVERSITY OF TECHNOLOGY IN BRATISLAVA

Faculty of Electrical Engineering and Information Technology

Obsah prednášky

1. Základné pojmy a rozdelenie pohybu bodu
2. Vektorový opis pohybu
3. Zložkový opis pohybu
4. Rotujúca vzťažná sústava

1. Základné pojmy a rozdelenie pohybu bodu

Kinematika

kinematika



- je časť mechaniky, pričom vo všeobecnosti skúma pohyb telies, resp. bodov
- neskúma príčiny pohybu, t.j. nepracuje so silami to je úloha dynamiky
- sily úzko súvisia s hmotou, a keďže kinematika nepracuje so silami, nepracuje ani s hmotou

1. Základné pojmy a rozdelenie pohybu bodu

Kinematika

kinematika



- je časť mechaniky, pričom vo všeobecnosti skúma pohyb telies, resp. bodov
- neskúma príčiny pohybu, t.j. nepracuje so silami to je úloha dynamiky
- sily úzko súvisia s hmotou, a keďže kinematika nepracuje so silami, nepracuje ani s hmotou



bod alebo teleso je v kinematike charakterizované iba geometrickými vlastnosťami

1. Základné pojmy a rozdelenie pohybu bodu

Cieľ kinematiky

kinematika



skúmať:

- polohu
- rýchlosť
- zrýchlenie

daných bodov, resp. telies k vzťažnému bodu a vzťažnej sústave

1. Základné pojmy a rozdelenie pohybu bodu

Cieľ kinematiky


kinematika



skúmať:

- polohu
- rýchlosť
- zrýchlenie

daných bodov, resp. telies k vzťažnému bodu a vzťažnému systém



pohyb útvaru môžeme kinematicky vyšetrovať, ak je tento pohyb určený, t.j. ak je pohyb definovaný ako funkcia času

1. Základné pojmy a rozdelenie pohybu bodu

Typ pohybu bodu

Typ pohybu podľa trajektórie

Priamka

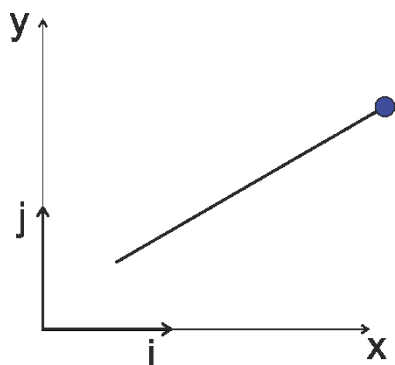
Krivka

1. Základné pojmy a rozdelenie pohybu bodu

Typ pohybu bodu

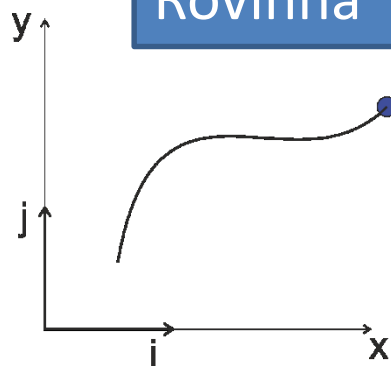
Typ pohybu podľa trajektórie

Priamka

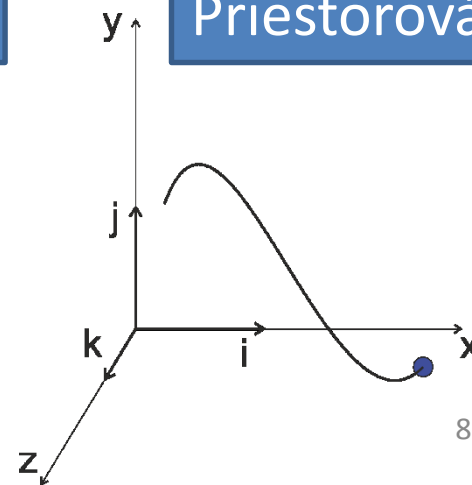


Krivka

Rovinná



Priestorová



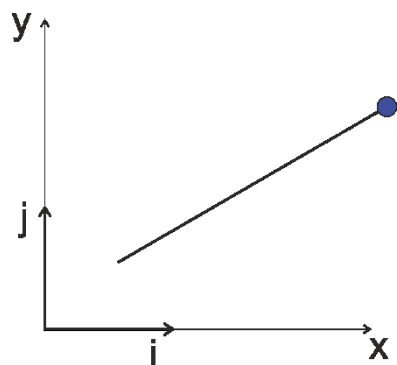
1. Základné pojmy a rozdelenie pohybu bodu

Typ pohybu bodu

Typ pohybu podľa trajektórie

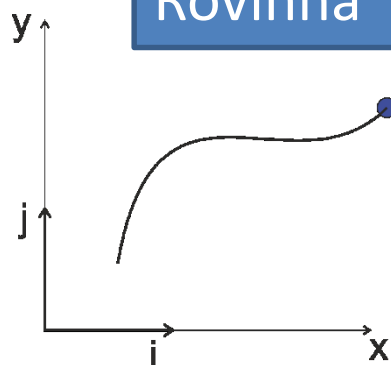
Priamka

Krivka



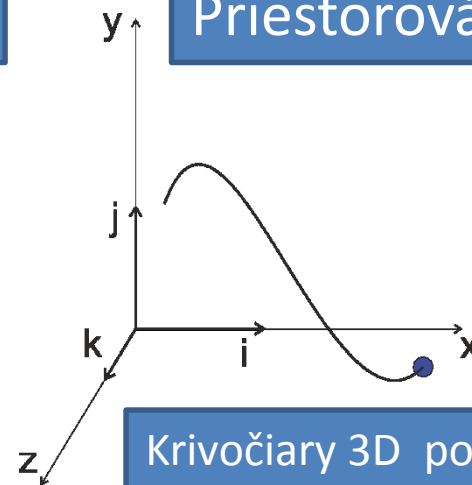
Priamočiary pohyb

Rovinná



Krivočiary 2D pohyb

Priestorová



Krivočiary 3D pohyb

1. Základné pojmy a rozdelenie pohybu bodu

Opis pohybu bodu

kinematika



Opis pohybu

1. Základné pojmy a rozdelenie pohybu bodu

Opis pohybu bodu

kinematika



Opis pohybu

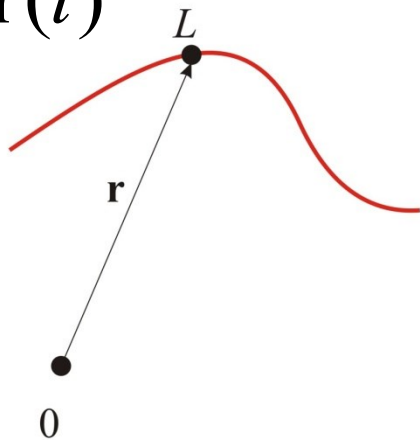


Vektorový

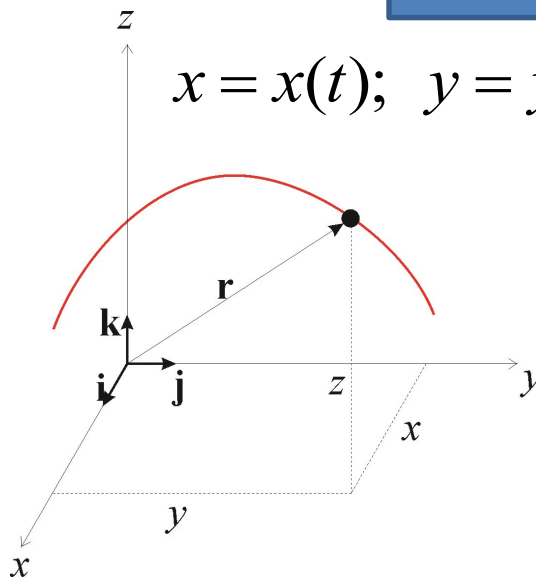


Zložkový

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$



$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$



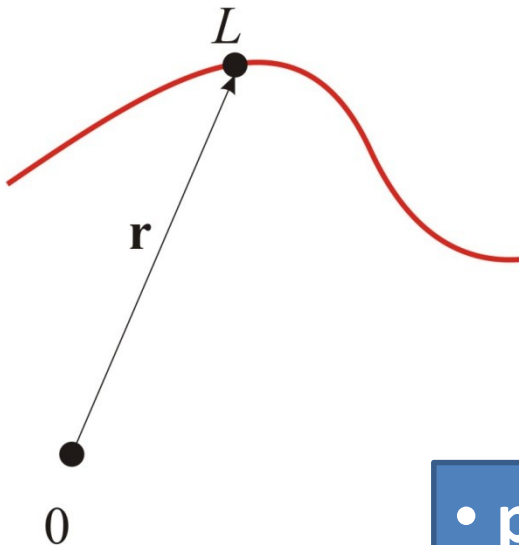
2. Vektorový opis pohybu

Poloha, rýchlosť, zrýchlenie

Poloha

Tabula - rýchlosť

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$



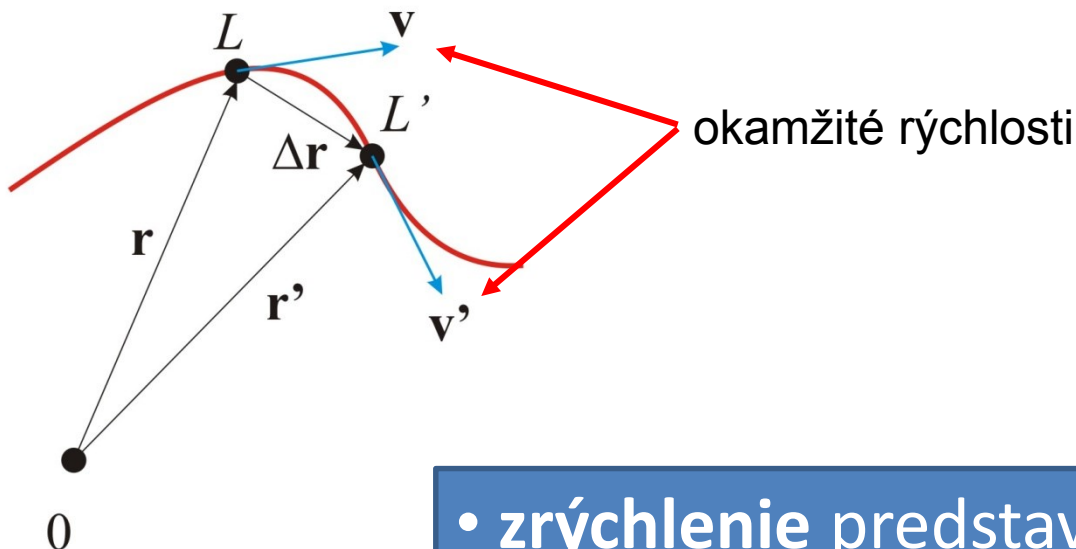
- **poloha** je definovaná časovou závislosťou polohového vektora

2. Vektorový opis pohybu

Poloha, rýchlosť, zrýchlenie

Stredné
zrýchlenie

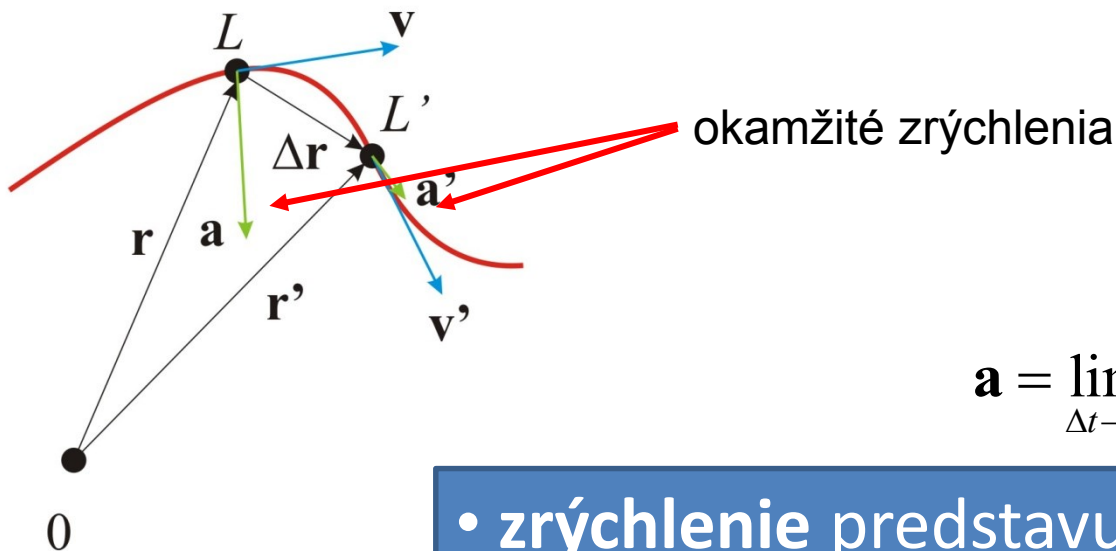
$$\mathbf{a}_s = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$



- **zrýchlenie** predstavuje zmenu rýchlosti vyšetrovaného bodu v čase v danej vz. s.

2. Vektorový opis pohybu

Poloha, rýchlosť, zrýchlenie



Stredné
zrýchlenie

$$\mathbf{a}_s = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$



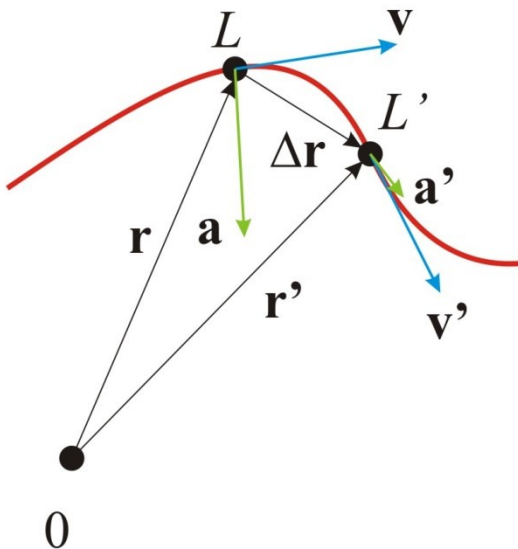
Okamžité
zrýchlenie

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

• zrýchlenie predstavuje zmenu rýchlosti vyšetrovaného bodu v čase v danej vz. s.

2. Vektorový opis pohybu

Poloha, rýchlosť, zrýchlenie



Vlastnosti:

- rýchlosť:
 - predstavuje dotyčnicu k trajektórii
- zrýchlenie:
 - ak trajektória bodu je krivka, bod sa pohybuje so zrýchlením, lebo vektor rýchlosti mení smer v závislosti na dotyčnici k trajektórii
 - zrýchlenie vo všeobecnosti nie je dotyčnica k trajektórii
 - iba pri priamočiarom pohybe je zrýchlenie dotyčnica k trajektórii

3. Zložkový opis pohybu

Používané súradnicové sys.

najčastejšie používané súradnicové systémy:

- 2D priestor:
 - kartézsky
 - polárny
- 3D priestor:
 - kartézsky
 - cylindricky
 - sféricky

viď. Prednáška č. 1.

3. Zložkový opis pohybu

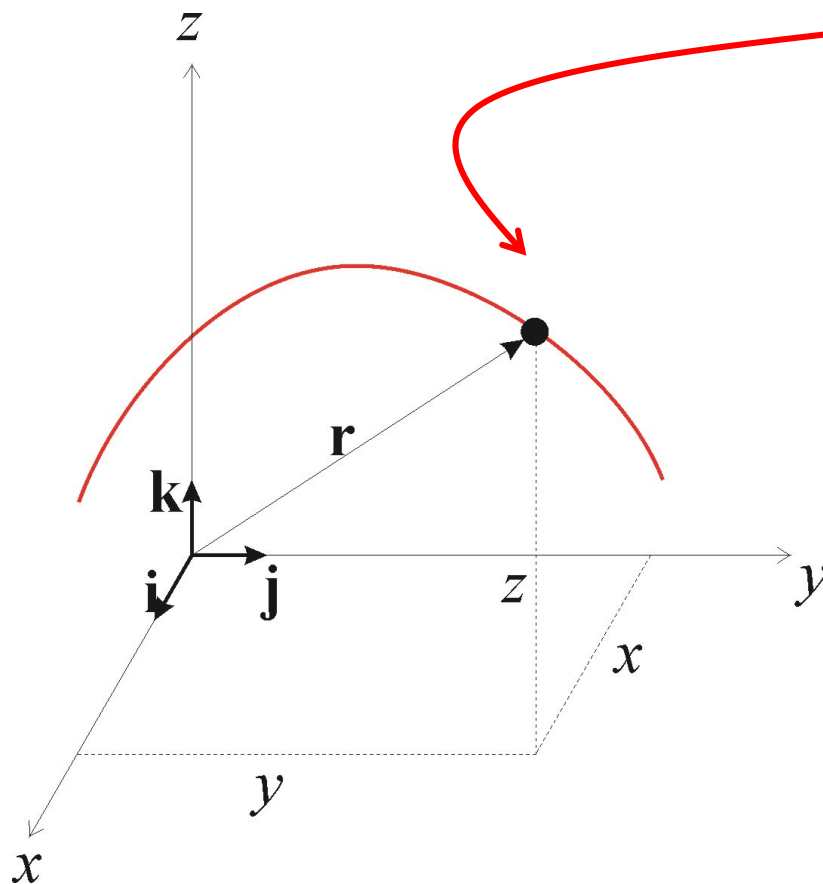
Tabuľa

- pohyb opísaný kartézskym SS v 2D
- pohyb opísaný polárnym SS v 2D

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Kartézsky súradnicový systém



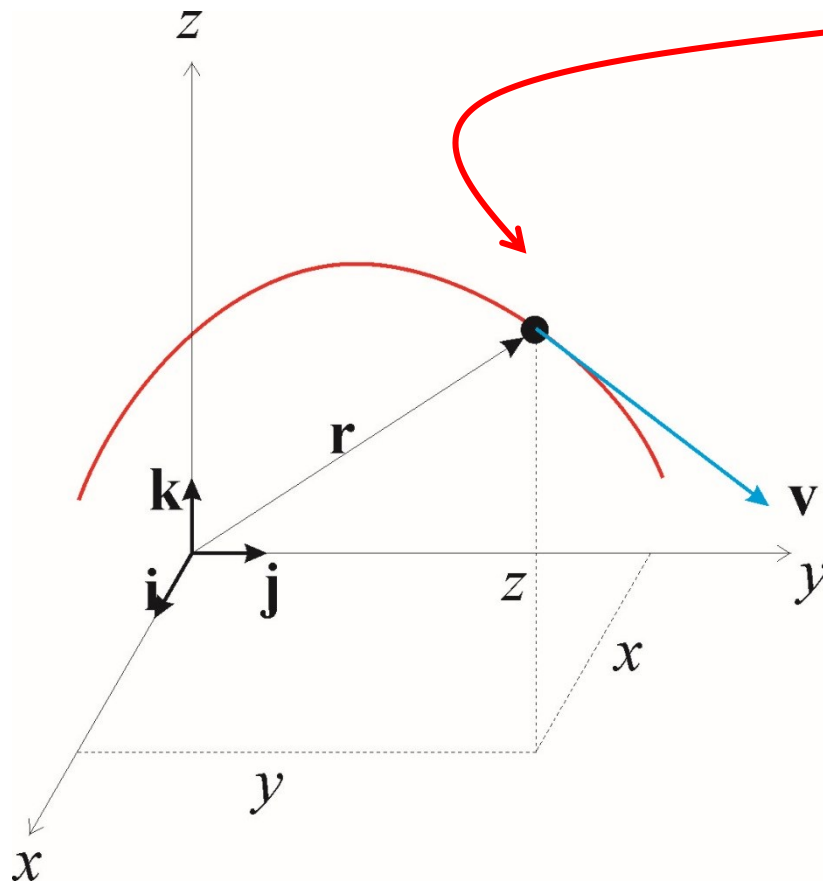
pohyb bodu je určený
parametrickými rovnicami:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Kartézsky súradnicový systém



pohyb bodu je určený
parametrickými rovnicami:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$



rýchlosť:

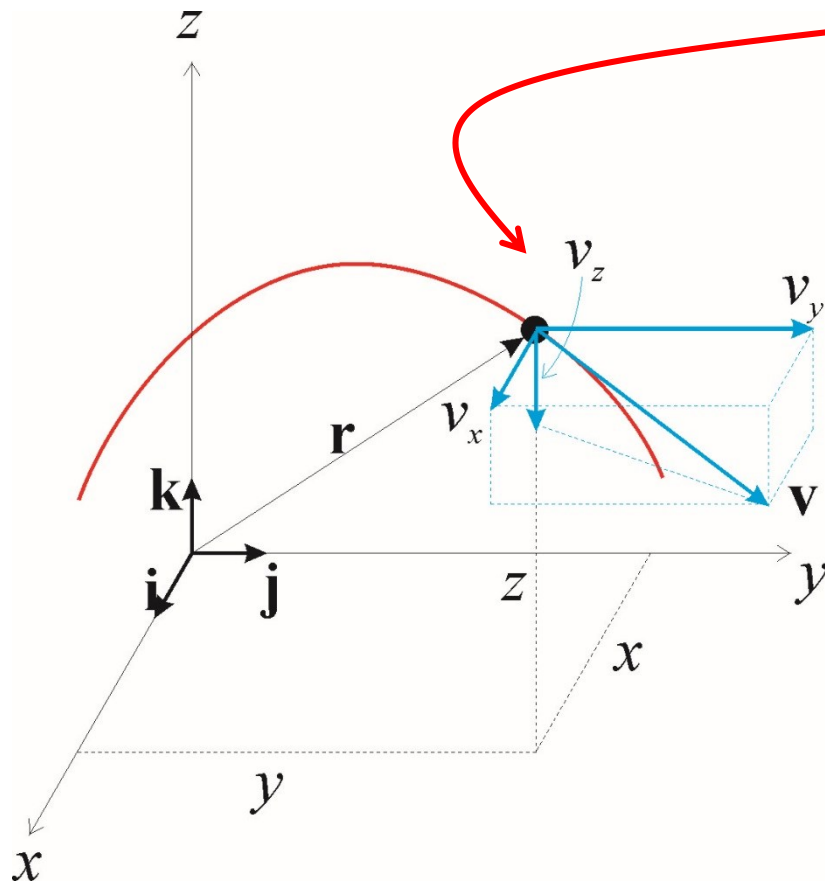
$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}$$

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Kartézsky súradnicový systém



pohyb bodu je určený
parametrickými rovnicami:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$



rýchlosť:

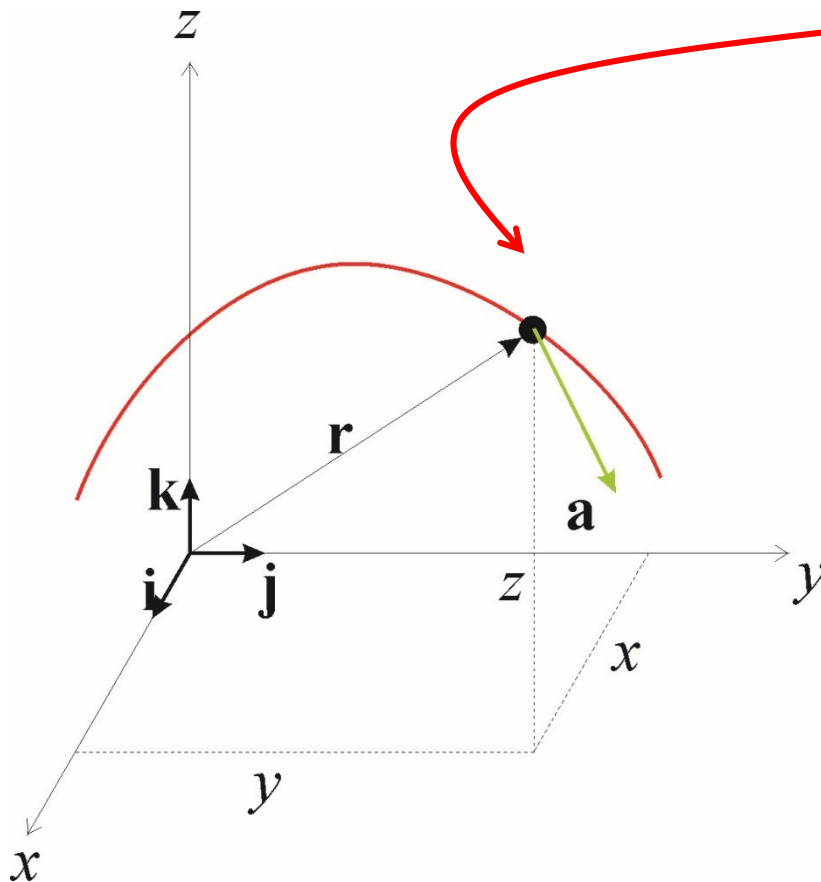
$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$$

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v_z = \dot{z}$$

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Kartézsky súradnicový systém



pohyb bodu je určený
parametrickými rovnicami:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$



zrýchlenie:

$$a = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

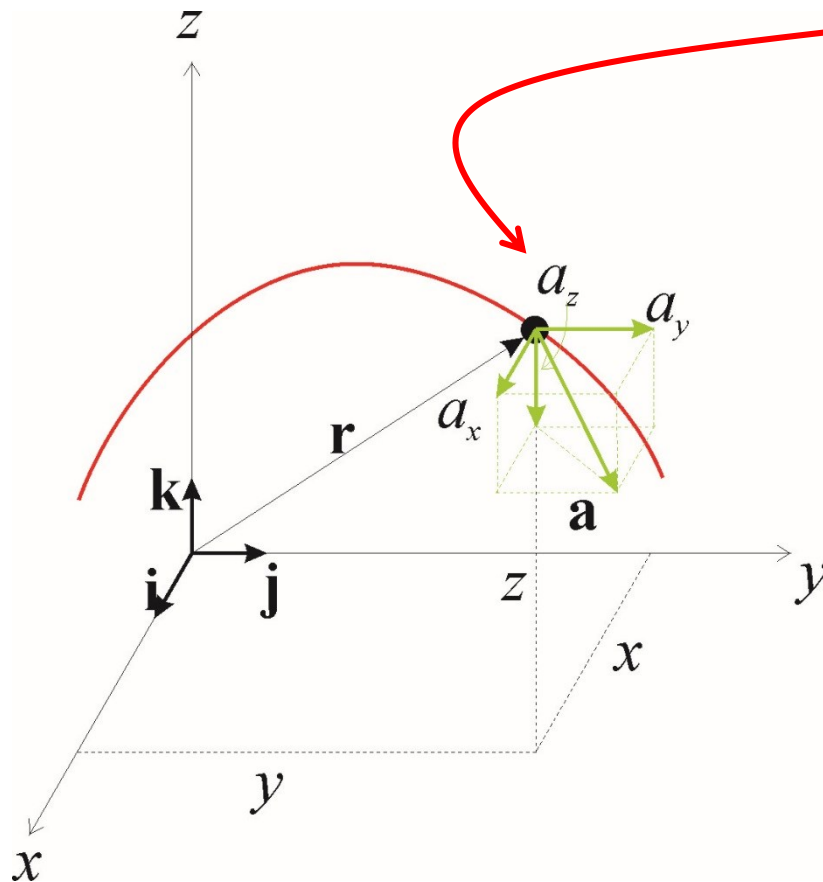
$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y};$$

$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Kartézsky súradnicový systém



pohyb bodu je určený
parametrickými rovnicami:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$



zrýchlenie:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

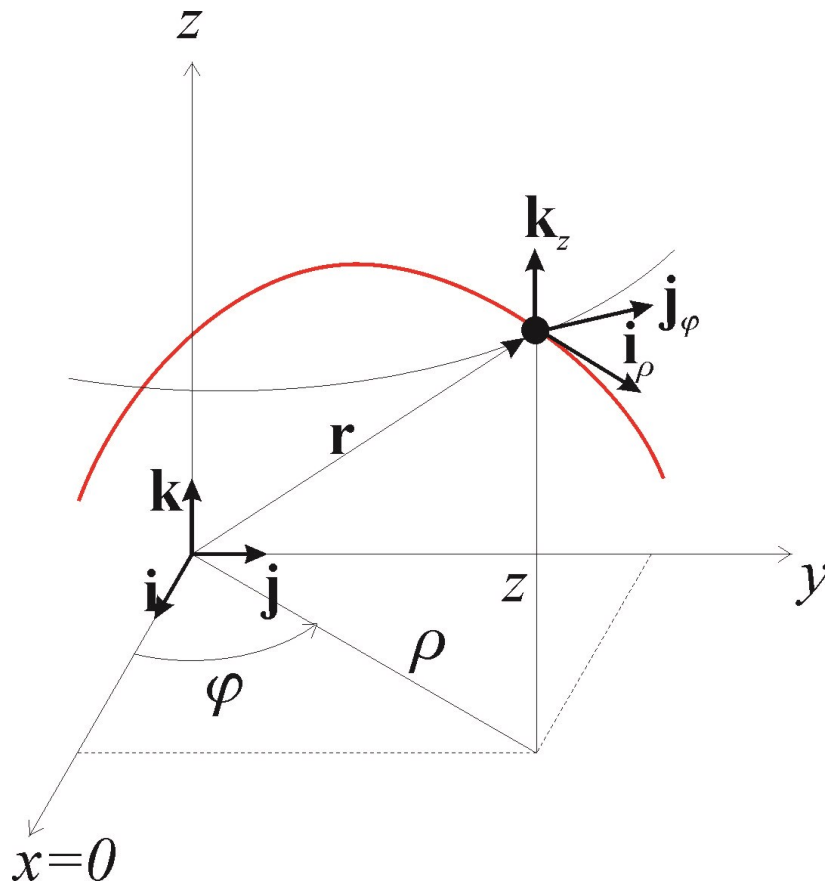
$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y};$$

$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Cylindrický
súradnicový systém



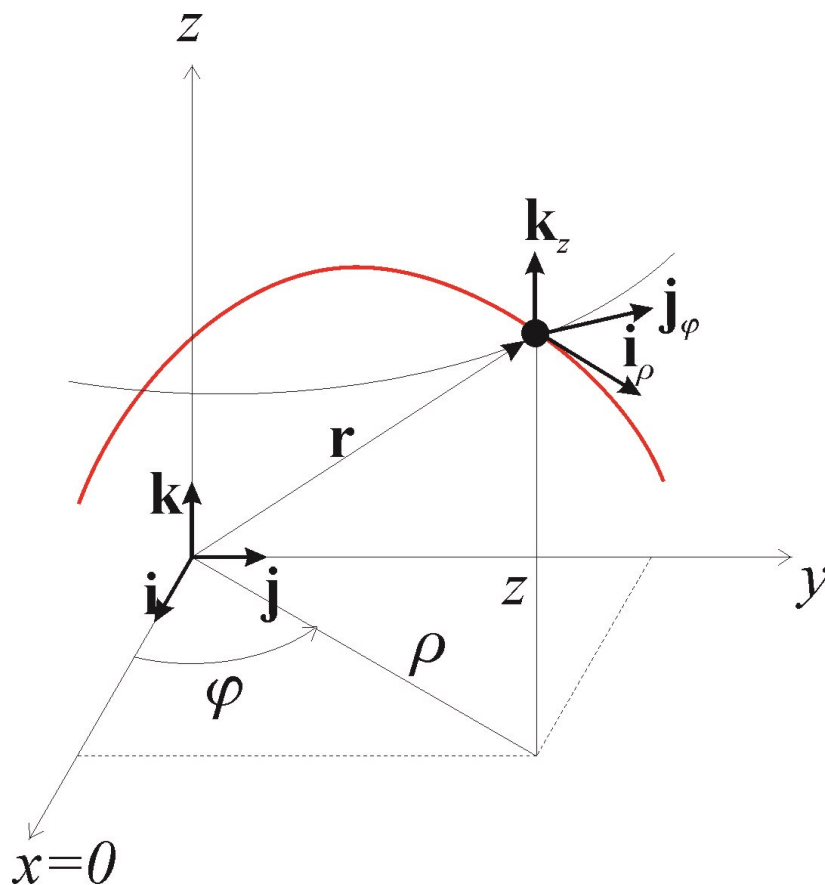
pohyb bodu je určený
parametrickými rovnicami:

$$\rho = \rho(t); \quad \varphi = \varphi(t); \quad z = z(t)$$

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Cylindrický súradnicový systém



transformácia medzi kartézskymi a cylindrickými:

$$x = \rho(t) \cos \varphi(t);$$

$$y = \rho(t) \sin \varphi(t);$$

$$z = z(t)$$



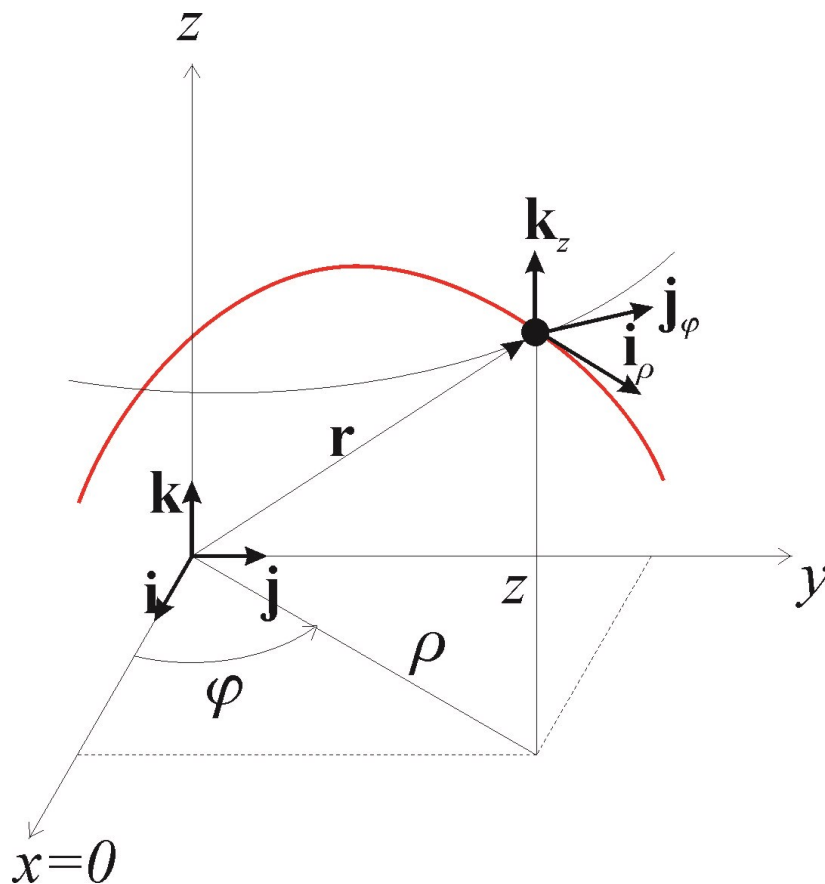
rýchlosť

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Cylindrický
súradnicový systém



transformácia medzi kartézskymi a
cylindrickými:

$$x = \rho(t) \cos \varphi(t);$$

$$y = \rho(t) \sin \varphi(t);$$

$$z = z(t)$$



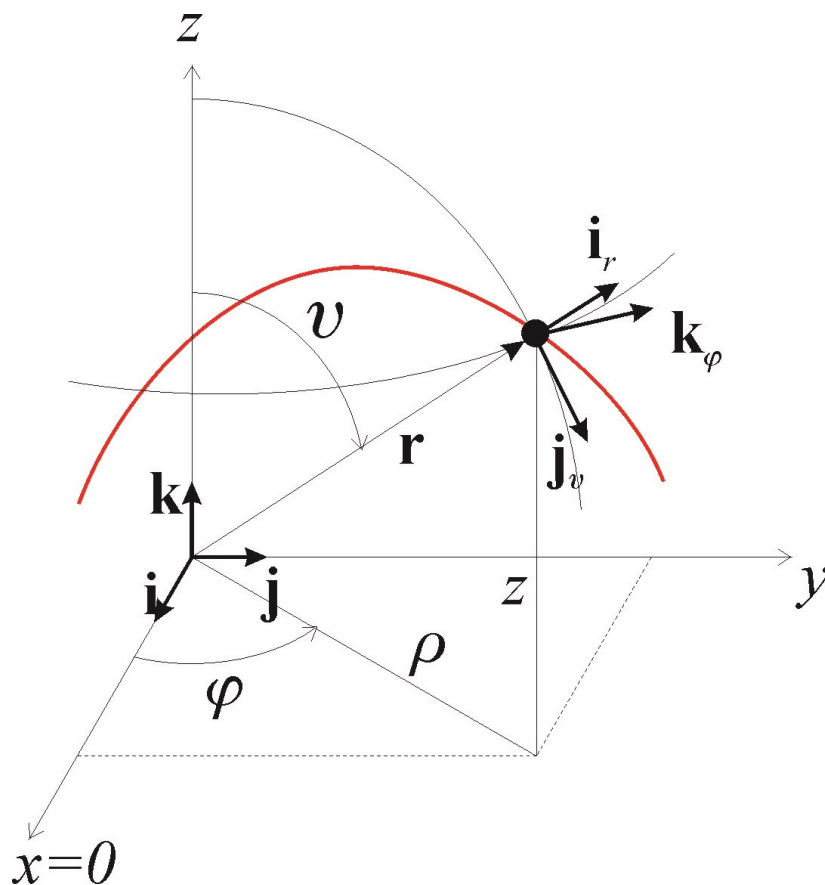
zrýchlenie

- druhá derivácia polohy

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Sférický súradnicový systém



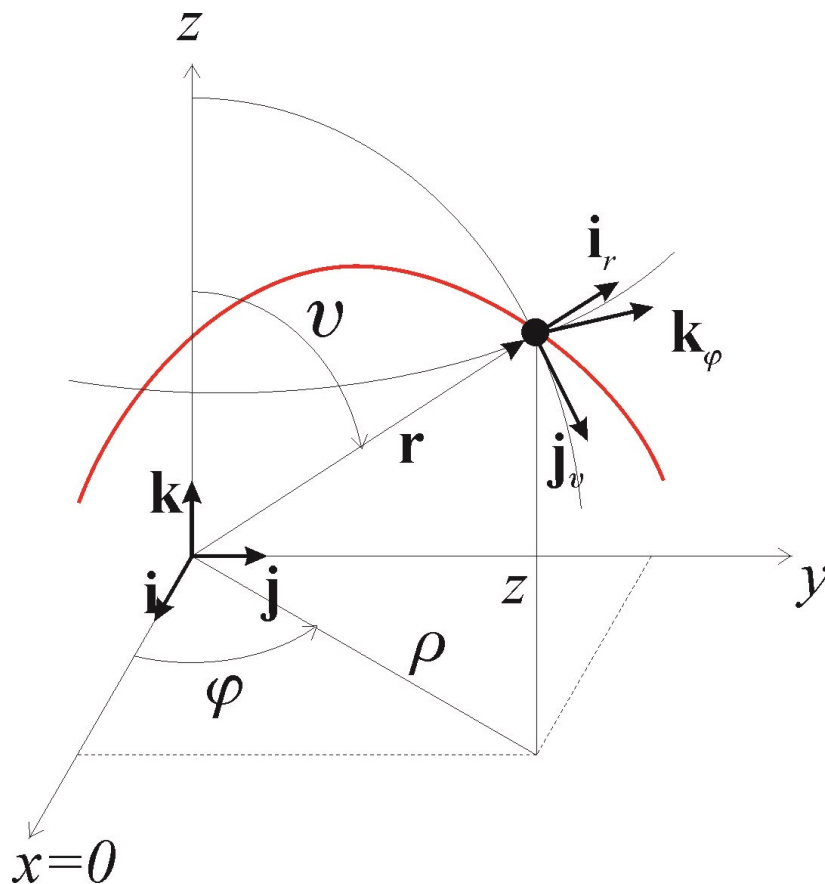
pohyb bodu je určený
parametrickými rovnicami:

$$r = r(t); \quad \nu = \nu(t); \quad \varphi = \varphi(t)$$

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Sférický súradnicový systém



transformácia medzi kartézskymi a sférickými súradnicami:

$$x = r \sin \nu \cos \varphi$$

$$y = r \sin \nu \sin \varphi$$

$$z = r \cos \nu$$



rýchlosť a zrýchlenie

- prvá derivácia polohy
- druhá derivácia polohy

4. Rotujúca vzťahná sústava

Význam rotujúcej vz. s.

- v niektorých prípadoch je efektívne popisovať pohyb vo vzťahnej sústave, ktorá rotuje vzhľadom na inerciálnu vzťahnú sústavu
- vo veľkej miere sa to využíva pri popise pohybu viactelesových systémov, kde pohyb jednotlivých telies nie je definovaný absolútne, ale relatívne, t.j. vzhľadom na iné teleso systému, ktoré sa ale pohybuje
- pri pohybových rovniciach je ale potrebné vyjadriť zrýchlenia bodu vzhľadom na inerciálnu vz. s., pričom samotný pohyb bodu je definovaný vzhľadom na neinerciálnu vz. s.

4. Rotujúca vzťahná sústava

Tabuľa

- vzájomná poloha dvoch vz. s. v 2D
- polárna vz. s.
- príklad

4. Rotujúca vzťahná sústava

3D

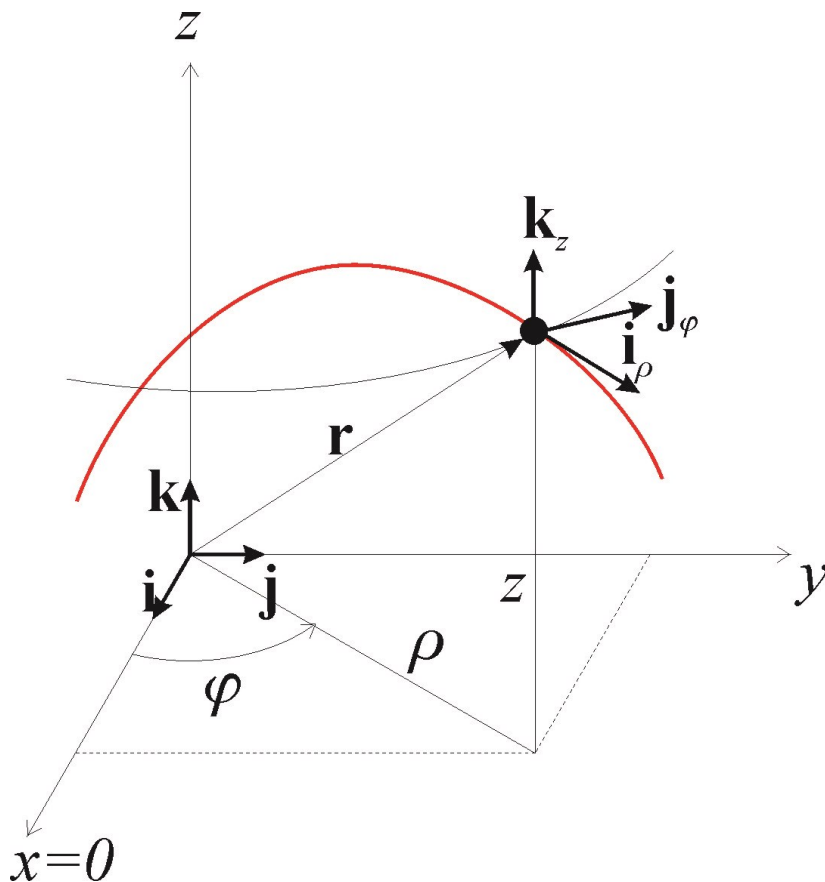
Cylindrická vz.s.

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{i}_\rho + z \mathbf{k}_z$$

jednotkové vektory: $\mathbf{i}_\rho = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$;

$$\mathbf{j}_\rho = \cos \varphi \mathbf{j} - \sin \varphi \mathbf{i};$$

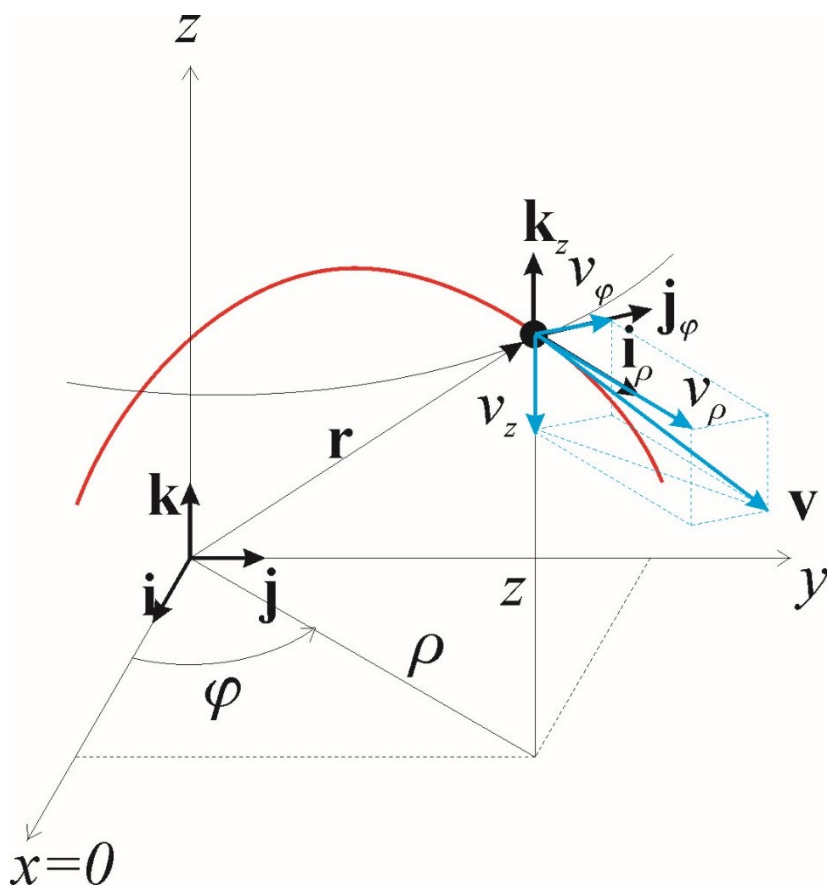
$$\mathbf{k}_z = \mathbf{k}$$



4. Rotujúca vzťahná sústava

3D

Cylindrická vz.s.



$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{i}_\rho + z \mathbf{k}_z$$

jednotkové vektory: $\mathbf{i}_\rho = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$;

$$\mathbf{j}_\rho = \cos \varphi \mathbf{j} - \sin \varphi \mathbf{i};$$

$$\mathbf{k}_z = \mathbf{k}$$

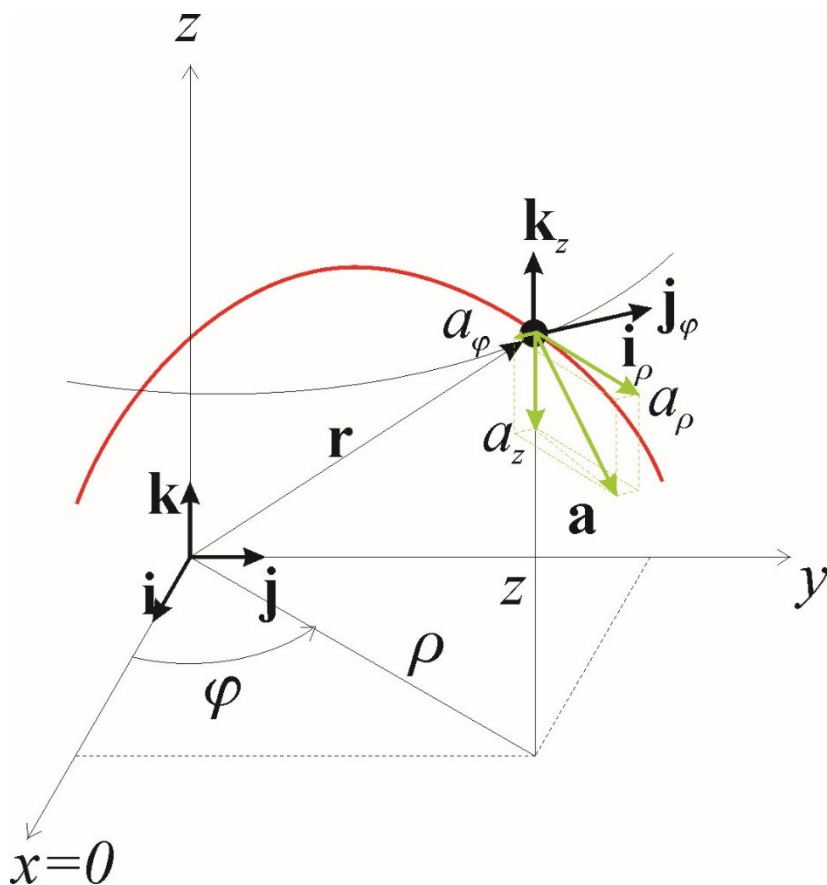
rýchlosť: $\mathbf{v} = v_\rho \mathbf{i}_\rho + v_\varphi \mathbf{j}_\rho + v_z \mathbf{k}_z$

$$v_\rho = \dot{\rho}; \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}; \quad v_z = \dot{z}$$

4. Rotujúca vzťahná sústava

3D

Cylindrická vz.s.



$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{i}_\rho + z \mathbf{k}_z$$

jednotkové vektory: $\mathbf{i}_\rho = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$;

$$\mathbf{j}_\varphi = \cos \varphi \mathbf{j} - \sin \varphi \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k}_z = \mathbf{k}$$

rýchlosť: $\mathbf{v} = v_\rho \mathbf{i}_\rho + v_\varphi \mathbf{j}_\varphi + v_z \mathbf{k}_z$

$$v_\rho = \dot{\rho}; \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi}; \quad v_z = \dot{z}$$

zrýchlenie: $\mathbf{a} = a_\rho \mathbf{i}_\rho + a_\varphi \mathbf{j}_\varphi + a_z \mathbf{k}_z$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho (\dot{\varphi})^2;$$

$$a_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi};$$

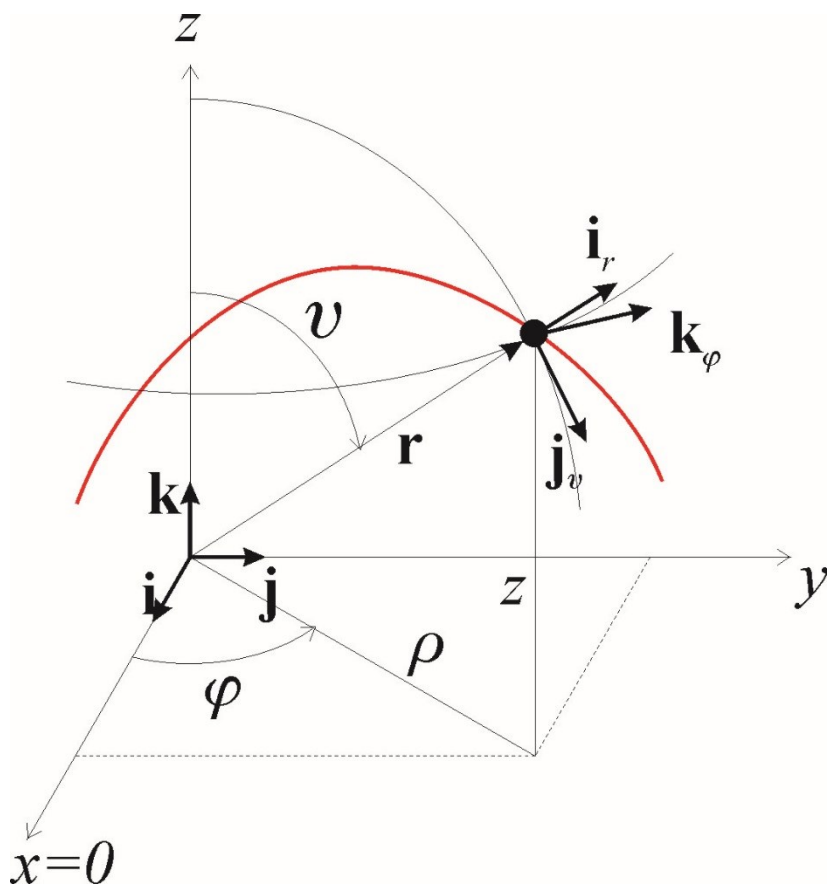
$$a_z = \ddot{z}$$

4. Rotujúca vzťahná sústava

3D

Sférická vz.s.

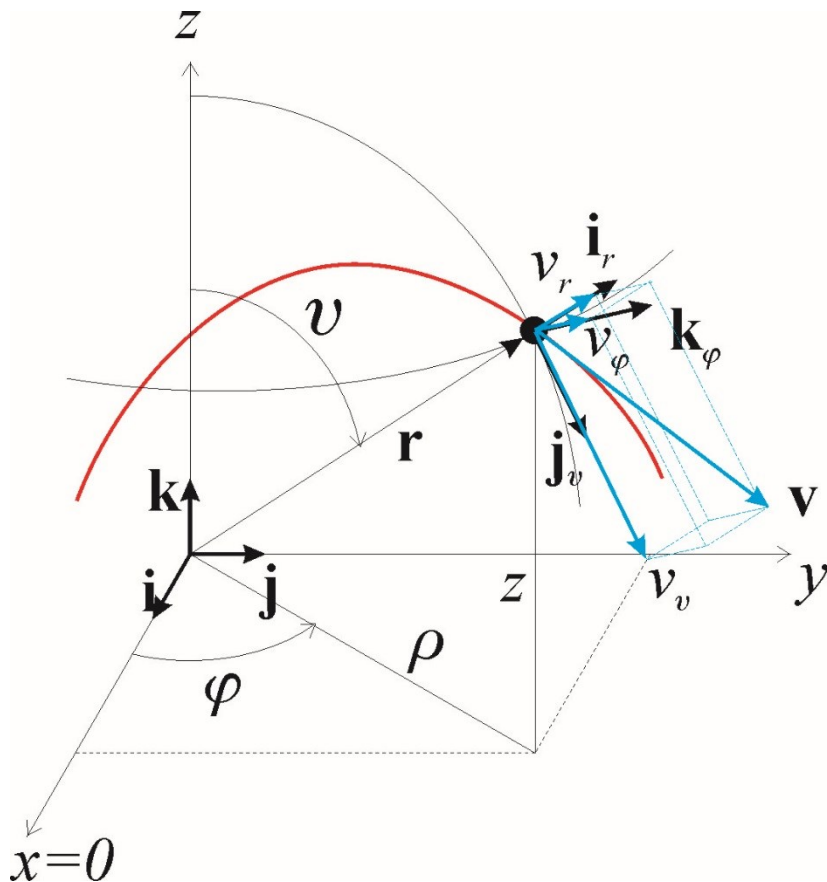
$$\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r$$



4. Rotujúca vzťahná sústava

3D

Sférická vz.s.



$$\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r$$

rýchlosť:

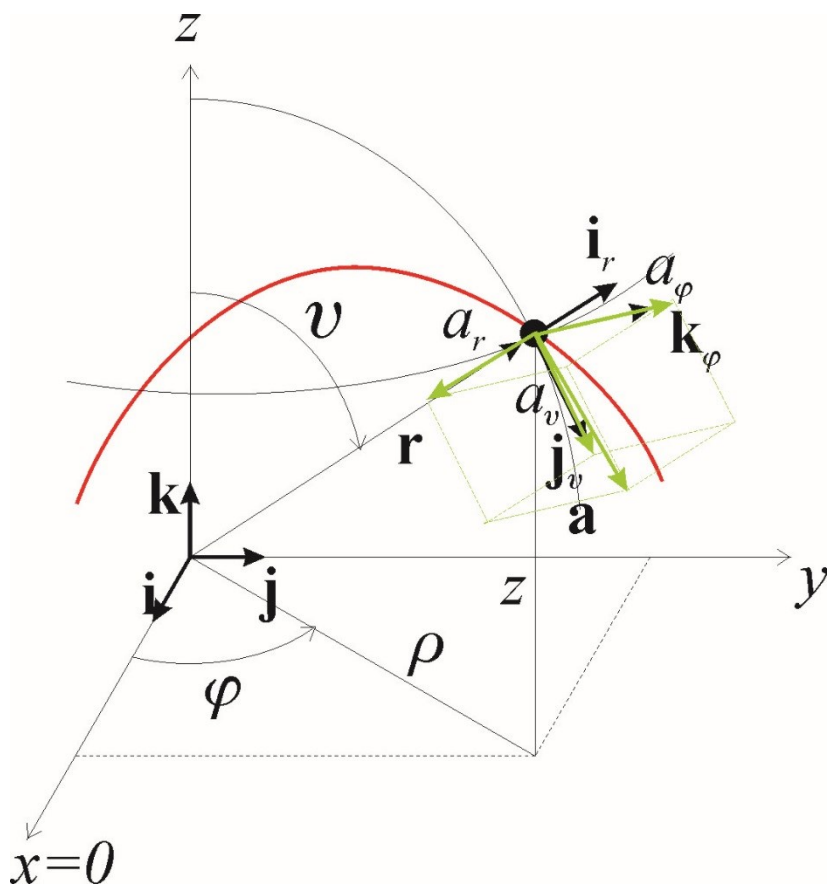
$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{i}_r + v_\nu\mathbf{j}_\nu + v_\varphi\mathbf{k}_\varphi$$

$$v_r = \dot{r}; \quad v_\nu = r\dot{\nu}; \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\nu$$

4. Rotujúca vzťahná sústava

3D

Sférická vz.s.



$$\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r$$

rýchlosť:

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{i}_r + v_\nu\mathbf{j}_\nu + v_\varphi\mathbf{k}_\varphi$$

$$v_r = \dot{r}; \quad v_\nu = r\dot{\nu}; \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\nu$$

zrýchlenie:

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{i}_r + a_\nu\mathbf{j}_\nu + a_\varphi\mathbf{k}_\varphi$$

$$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\nu})^2 - r(\dot{\varphi})^2 \sin^2 \nu;$$

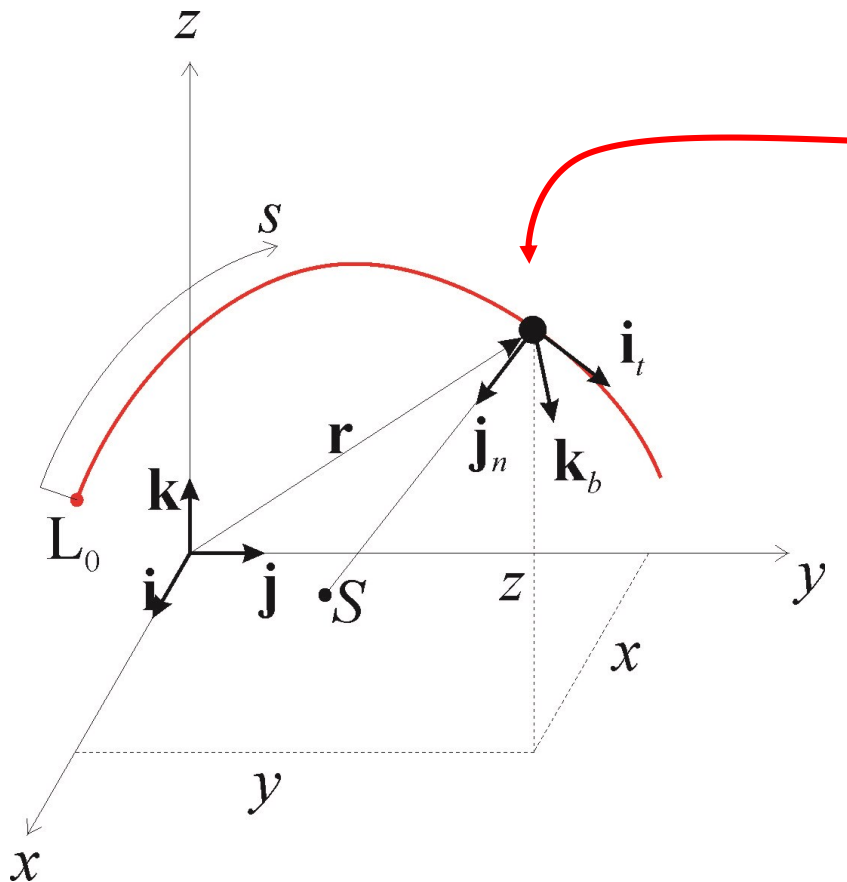
$$a_\nu = r\ddot{\nu} + 2\dot{r}\dot{\nu} - r(\dot{\varphi})^2 \sin\nu \cos\nu;$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\nu + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\nu + 2r\dot{\varphi}\dot{\nu}\cos\nu$$

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Spríevodný trojhran



dotyčnica \mathbf{i}_t

normála \mathbf{j}_n

binormála \mathbf{k}_b

polohu bodu určuje oblúčková súradnica s a jeho pohyb po krivke
rovnica pohybu

$$s = s(t)$$

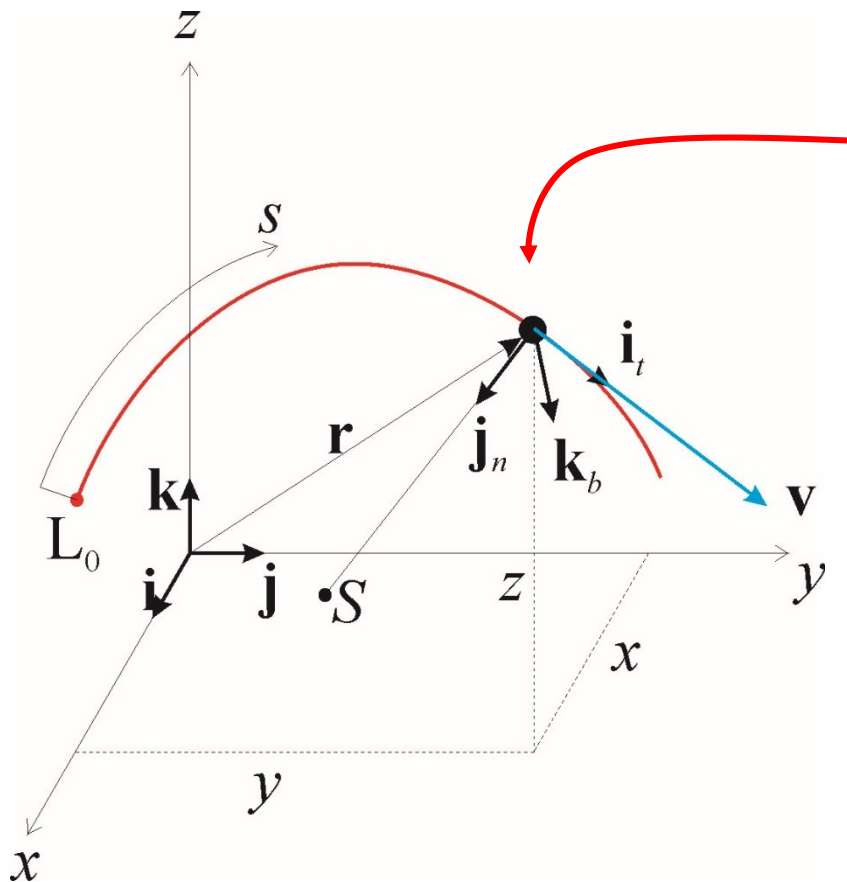
rovnica krivky je definovaná

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Sprievodný trojhran



rýchlosť bodu

$$\mathbf{v} = v \mathbf{i}_t$$

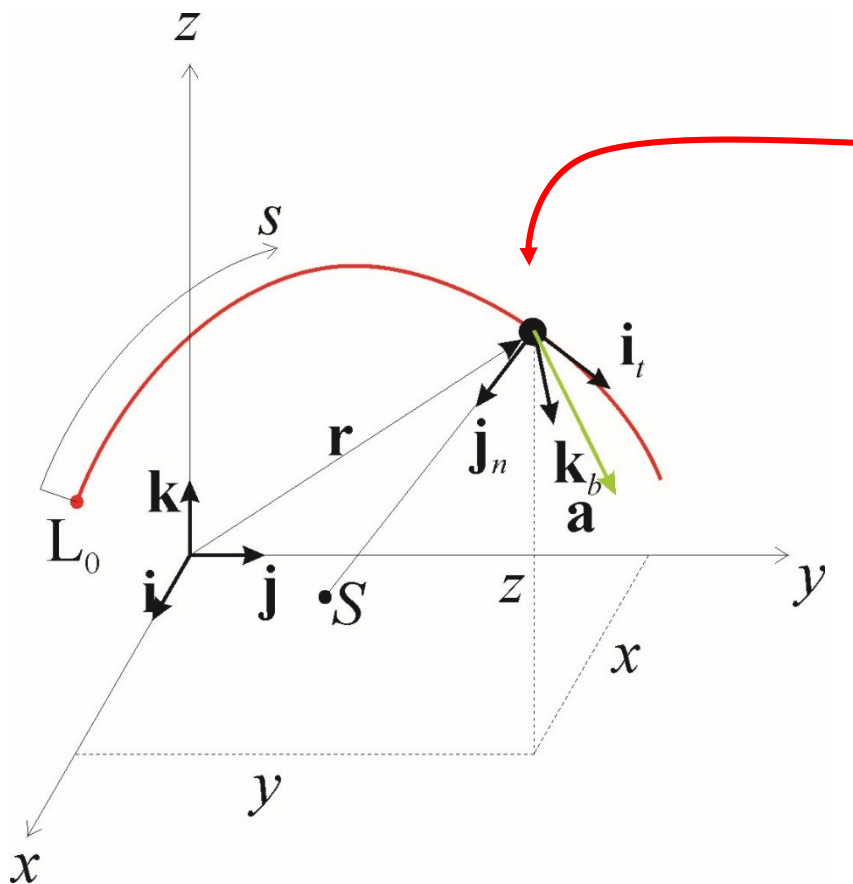
kde

$$v = \dot{s}$$

3. Zložkový opis pohybu

Opis v 3D

Spríevodný trojhran



zrýchlenie bodu

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n = a_t \mathbf{i}_t + a_n \mathbf{j}_n$$

kde

$$a_t = \dot{v} = \dot{s}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

R je polomer krivosti krivky
(vzdialenosť $L-S$)