

# Dynamika mechatronických systémov

## Kinematika telesa

Vladimír Kutiš

Oddelenie aplikovanej mechaniky a mechatroniky  
UAMT, FEI STU Bratislava



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta elektrotechniky a informatiky

SLOVAK UNIVERSITY OF TECHNOLOGY IN BRATISLAVA

Faculty of Electrical Engineering and Information Technology

# Obsah prednášky

1. Rozdelenie pohybu telesa
2. Translačný pohyb telesa
3. Rotačný pohyb
4. Rovinný pohyb telesa
5. Sférický a priestorový pohyb

# 1. Rozdelenie pohybu telesa

- translačný (posuvný) pohyb telesa
- rotačný pohyb telesa
- rovinný pohyb telesa
- sférický pohyb telesa
- všeobecný priestorový pohyb telesa

## 2. Translačný pohyb telesa

Charakter. trans. pohybu

translačný pohyb



- teleso koná posuvný (translačný) pohyb, ak jeho dve nerovnoběžné priamky nemenia pri pohybe svoj smer



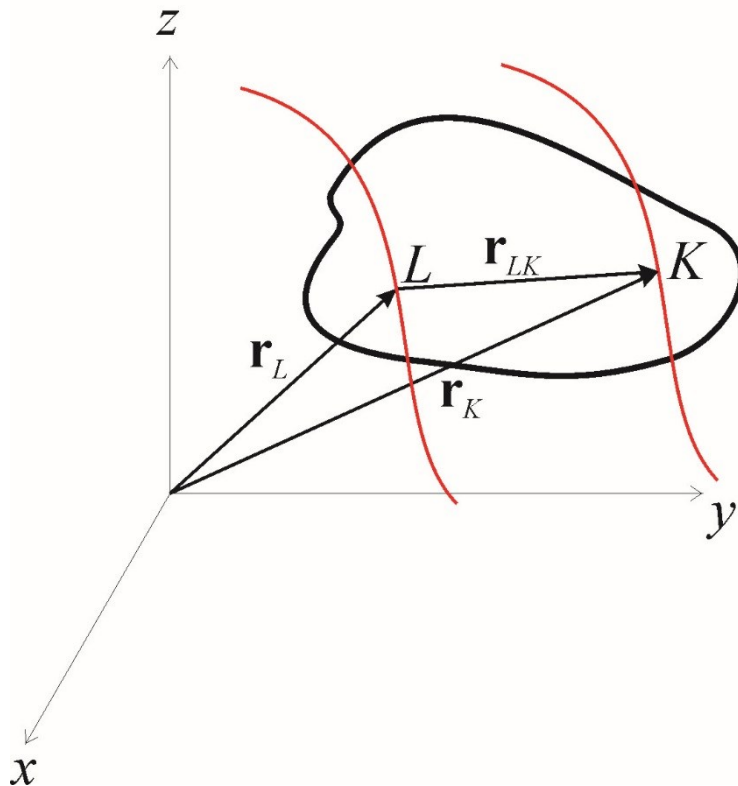
- žiadna priamka pri posuvnom pohybe nemení svoj smer
- trajektórie všetkých bodov sú zhodné, navzájom posunuté krivky
- v každom okamžiku sú rýchlosti a zrýchlenia všetkých bodov telesa navzájom rovnaké

## 2. Translačný pohyb telesa

### Charakter. trans. pohybu

posuvný pohyb telesa je teda určený pohybom jedného jeho bodu, napr. bodu  $L$

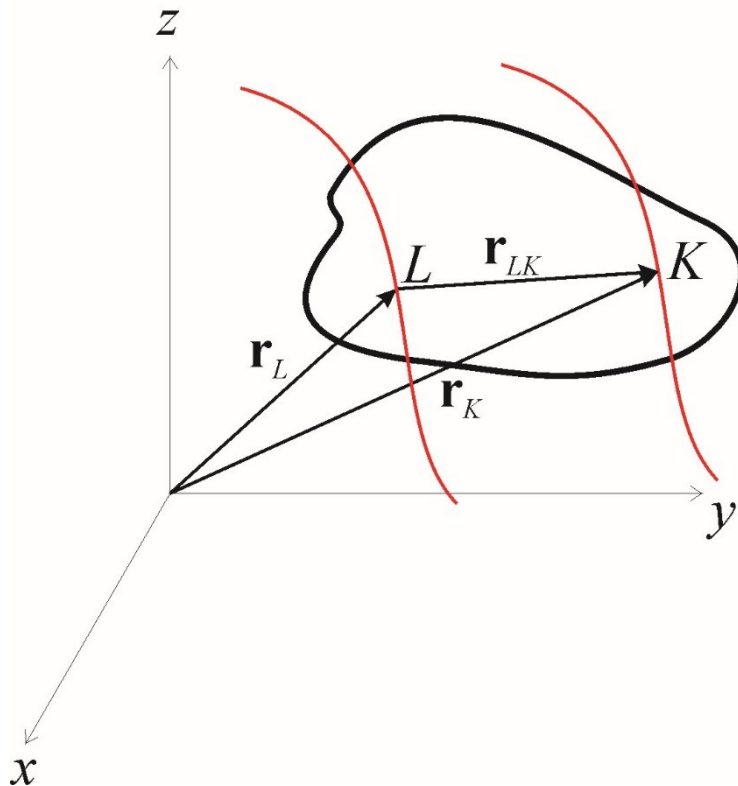
$$\mathbf{r}_L = \mathbf{r}_L(t)$$



# 2. Translačný pohyb telesa

## Charakter. trans. pohybu

posuvný pohyb telesa je teda určený pohybom jedného jeho bodu, napr. bodu  $L$



$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_L(t)$$

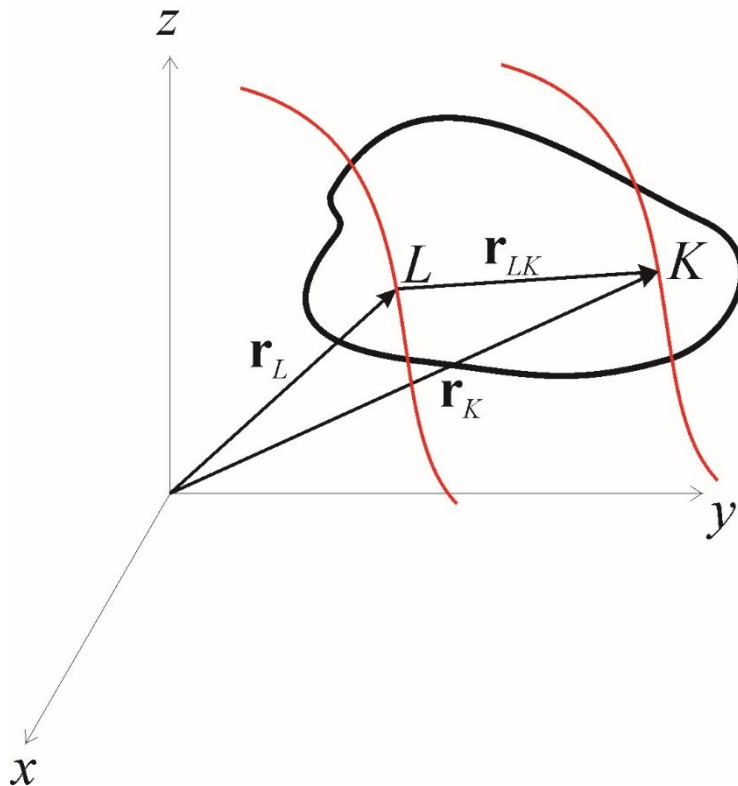


$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_L + \mathbf{r}_{LK}$$

# 2. Translačný pohyb telesa

## Charakter. trans. pohybu

posuvný pohyb telesa je teda určený pohybom jedného jeho bodu, napr. bodu  $L$



$$\mathbf{r}_L = \mathbf{r}_L(t)$$



$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_L + \mathbf{r}_{LK}$$

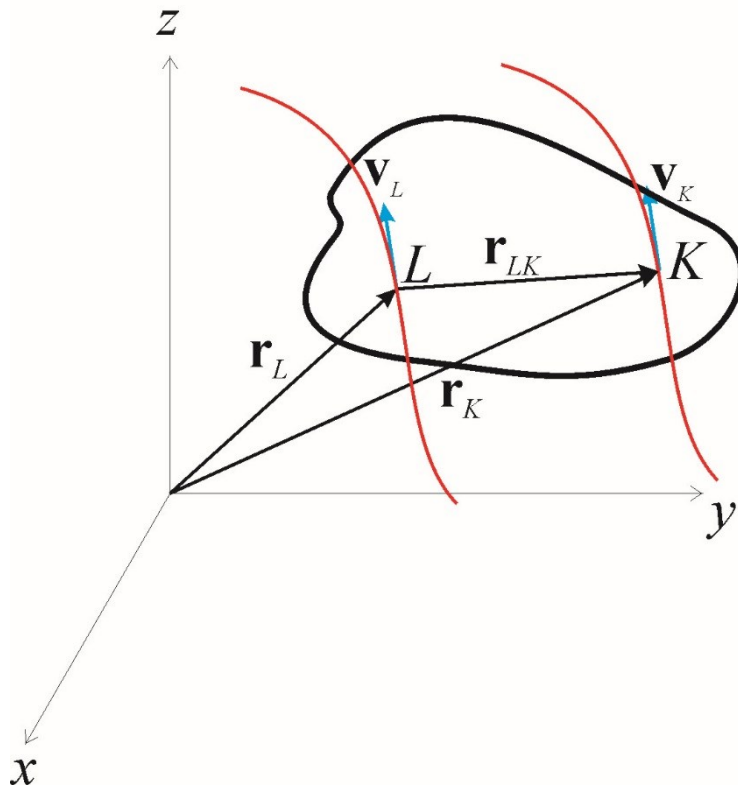


tento vektor ale pri pohybe telesa nemení svoj smer – definícia translačného pohybu, t.j. s časom sa nemení

# 2. Translačný pohyb telesa

## Charakter. trans. pohybu

posuvný pohyb telesa je teda určený pohybom jedného jeho bodu, napr. bodu  $L$



$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_L(t)$$



$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_L + \mathbf{r}_{LK}$$



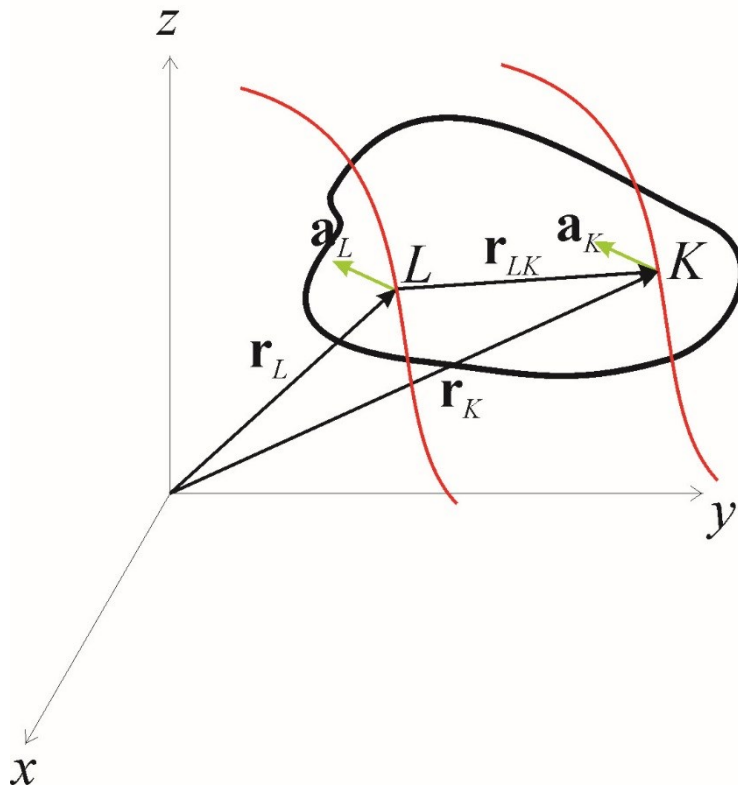
$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_K$$



# 2. Translačný pohyb telesa

## Charakter. trans. pohybu

posuvný pohyb telesa je teda určený pohybom jedného jeho bodu, napr. bodu  $L$



$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_L(t) + \mathbf{r}_{LK}$$

$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_L + \mathbf{r}_{LK}$$

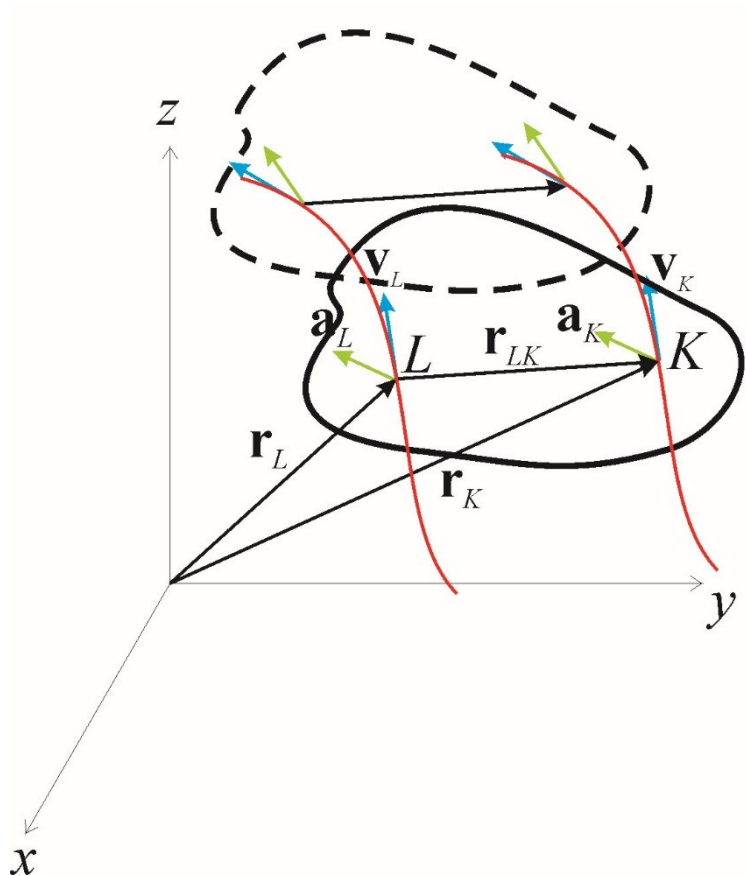
$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_K$$

$$\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_K$$

# 2. Translačný pohyb telesa

## Charakter. trans. pohybu

posuvný pohyb telesa je teda určený pohybom jedného jeho bodu, napr. bodu  $L$



$$\mathbf{r}_L = \mathbf{r}_L(t)$$



$$\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_L + \mathbf{r}_{LK}$$



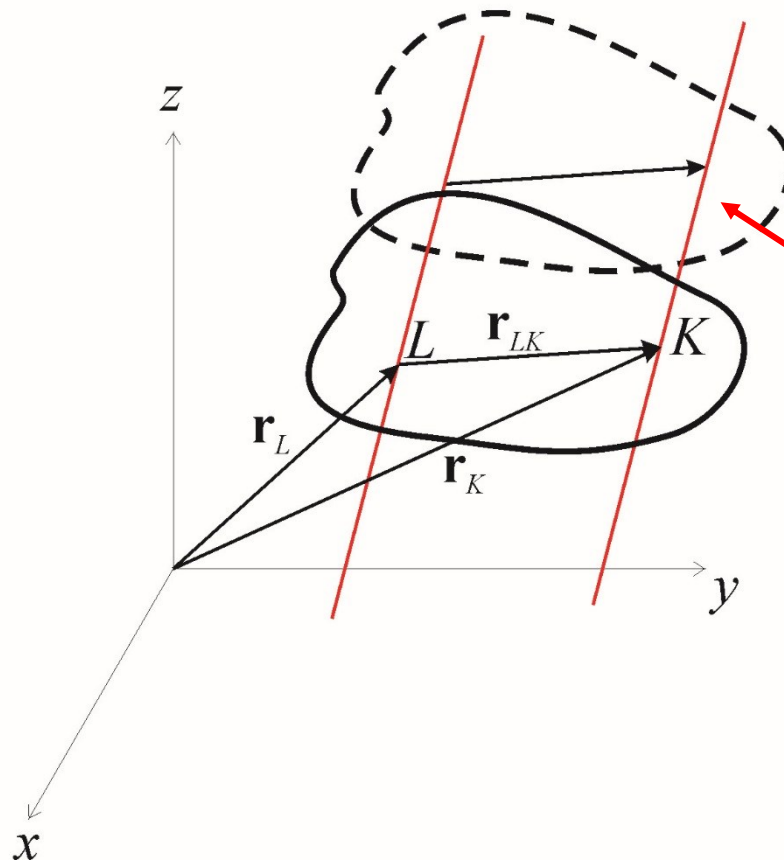
$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_K$$



$$\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_K$$

# 2. Translačný pohyb telesa

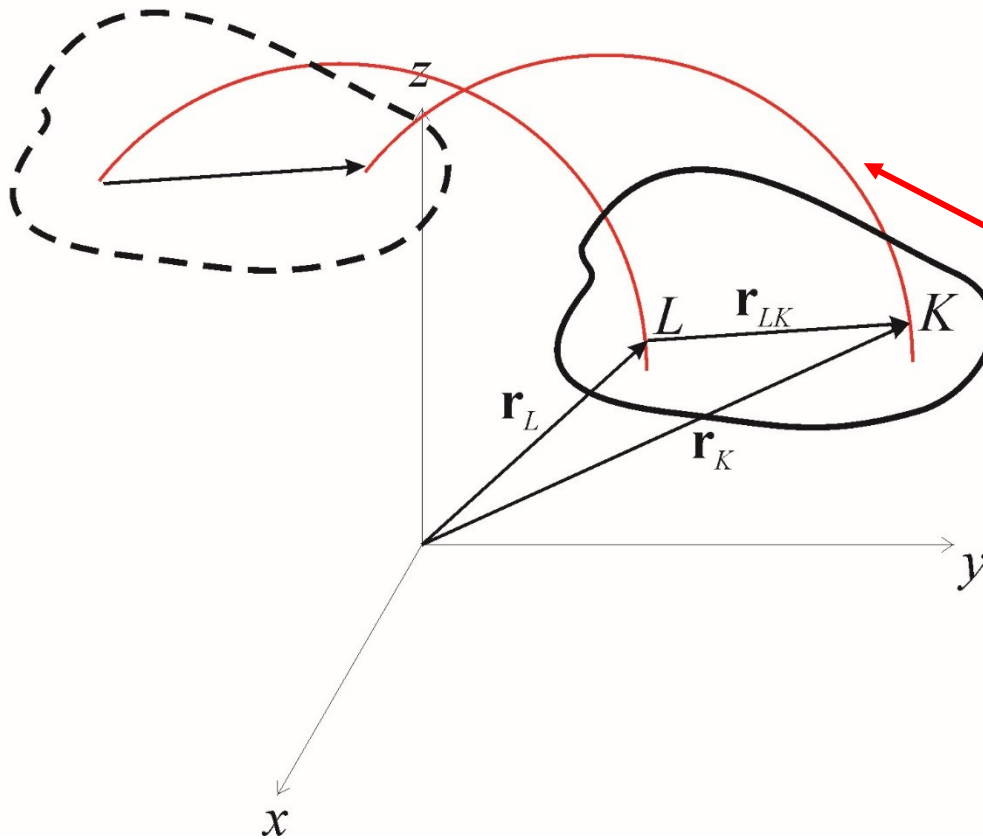
Charakter. trans. pohybu



ak je trajektória bodu telesa priamka, potom hovoríme o priamočiaram posuvnom pohybe

# 2. Translačný pohyb telesa

## Charakter. trans. pohybu



ak je trajektória bodu telesa rovinná resp. priestorová krivka, potom hovoríme o krivočiarom rovinnom resp. krivočiarom priestorovom posuvnom pohybe

# 3. Rotačný pohyb telesa

## Charakter. rotač. pohybu

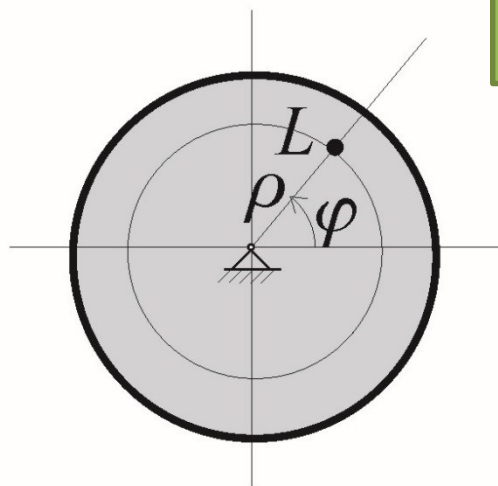
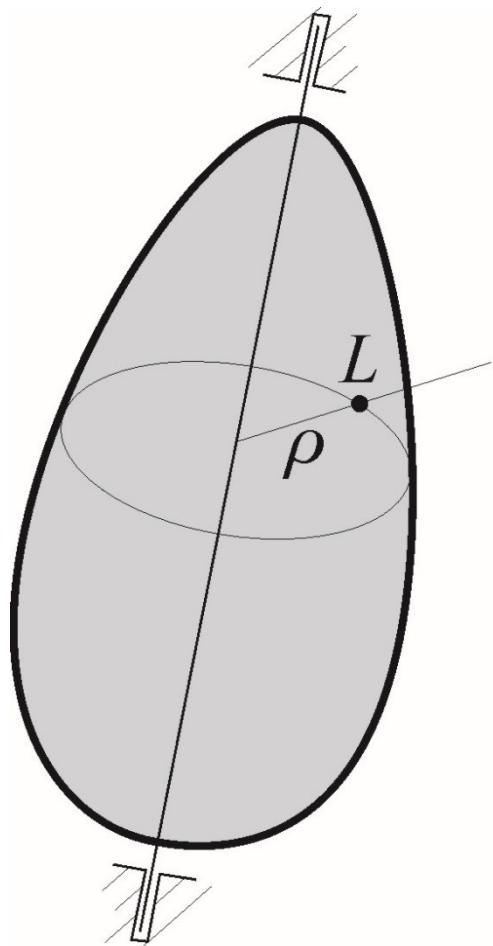
rotačný pohyb



- teleso koná rotačný pohyb, ak jedna jeho priamka zostáva trvale v kľude
- táto priamka sa nazýva osou rotácie
- trajektórie všetkých bodov sú kružnice, ktoré ležia v rovinách kolmých na os rotácie a majú stred na tejto osi
- rotačný pohyb je teda pohybom rovinným a teda pohyb sa môže vyšetrovať v rovine kolmej na os rotácie

# 3. Rotačný pohyb telesa

## Charakter. rotač. pohybu

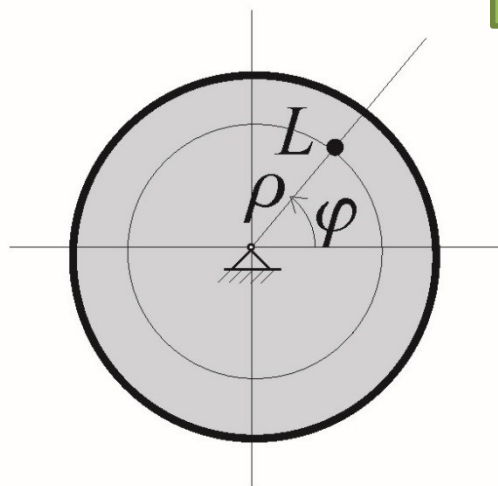
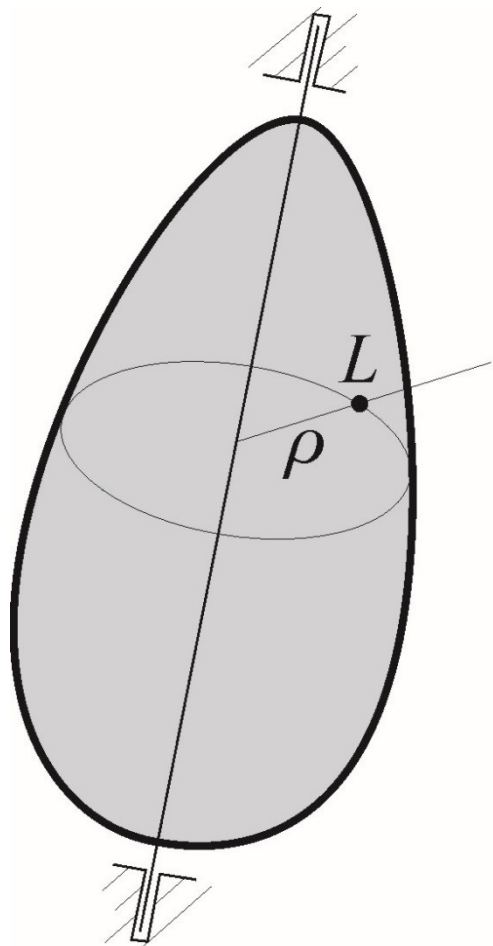


rotačný pohyb je určený závislosťou uhla pootočenia ľubovoľnej priamky telesa kolmej k osi rotácii na čase

$$\varphi = \varphi(t)$$

# 3. Rotačný pohyb telesa

## Charakter. rotač. pohybu

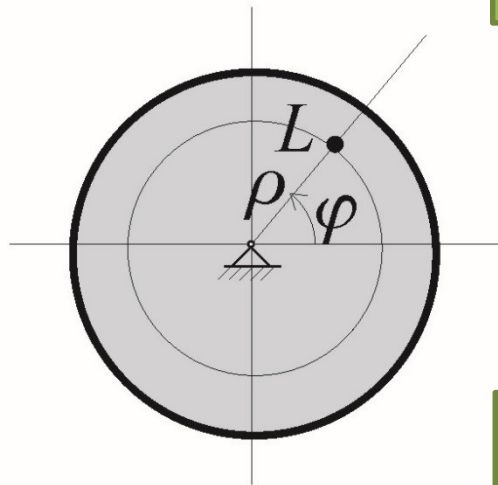
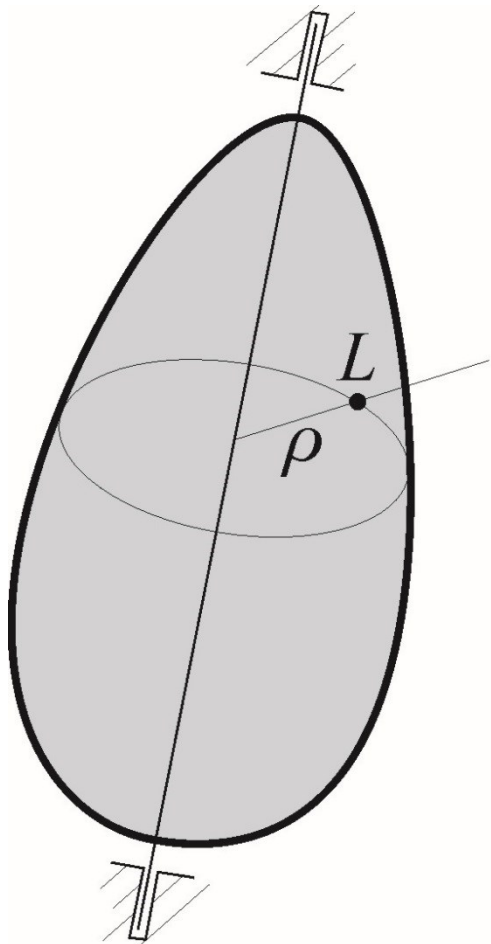


uhlová rýchlosť charakterizuje časovú zmenu uhla pootočenia telesa

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(t)$$

# 3. Rotačný pohyb telesa

## Charakter. rotač. pohybu



uhlová rýchlosť charakterizuje časovú zmenu uhla pootočenia telesa

$$\omega = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(t)$$



uhlové zrýchlenie charakterizuje časová zmena uhlovej rýchlosti

$$\alpha = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$$



# 3. Rotačný pohyb telesa

## Tabuľa

- odvodenie rýchlosti ľubovoľného bodu telesa pri rotačnom pohybe vo vz.s. telesa
- odvodenie zrýchlenia ľubovoľného bodu telesa pri rotačnom pohybe vo vz.s. telesa
- rýchlosti a zrýchlenia v inerciálnej vz.s.
- príklad – porovnanie translačný pohyb – rotačný pohyb

# 4. Rovinný pohyb telesa

Charakter. rotač. pohybu

rovinný pohyb



- teleso koná obecný rovinný pohyb, ak trajektórie jeho bodov ležia v navzájom rovnobežných rovinách
- trajektórie sú teda rovinné krivky
- všetky body, ktoré ležia na rovnakej kolmici k rovine pohybu opisujú rovnaké krivky a majú rovnaké okamžité rýchlosti a zrýchlenia
- rovina pohybu, do ktorej teleso premietneme sa nazýva základná

# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

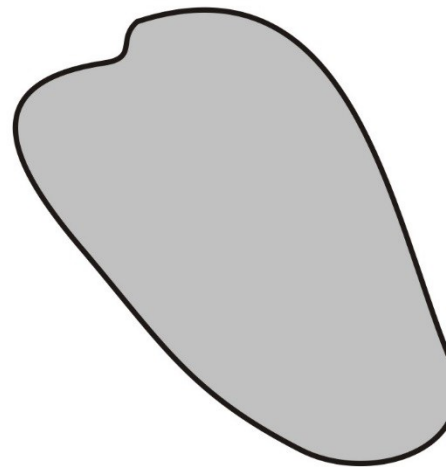
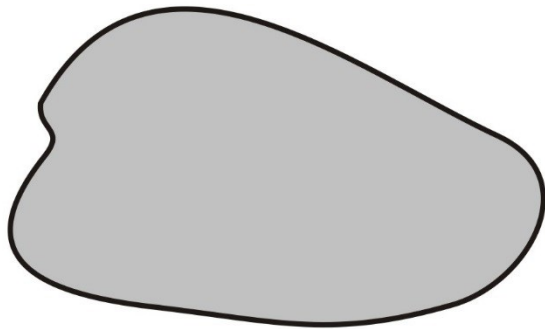
rozklad pohybu



- základný rozklad obecného rovinného pohybu znamená rozloženie pohybu na **unášavý posuvný**, ktorý je určený pohybom jedného referenčného bodu telesa, a **relatívny rotačný** okolo referenčného bodu

# 4. Rovinný pohyb telesa

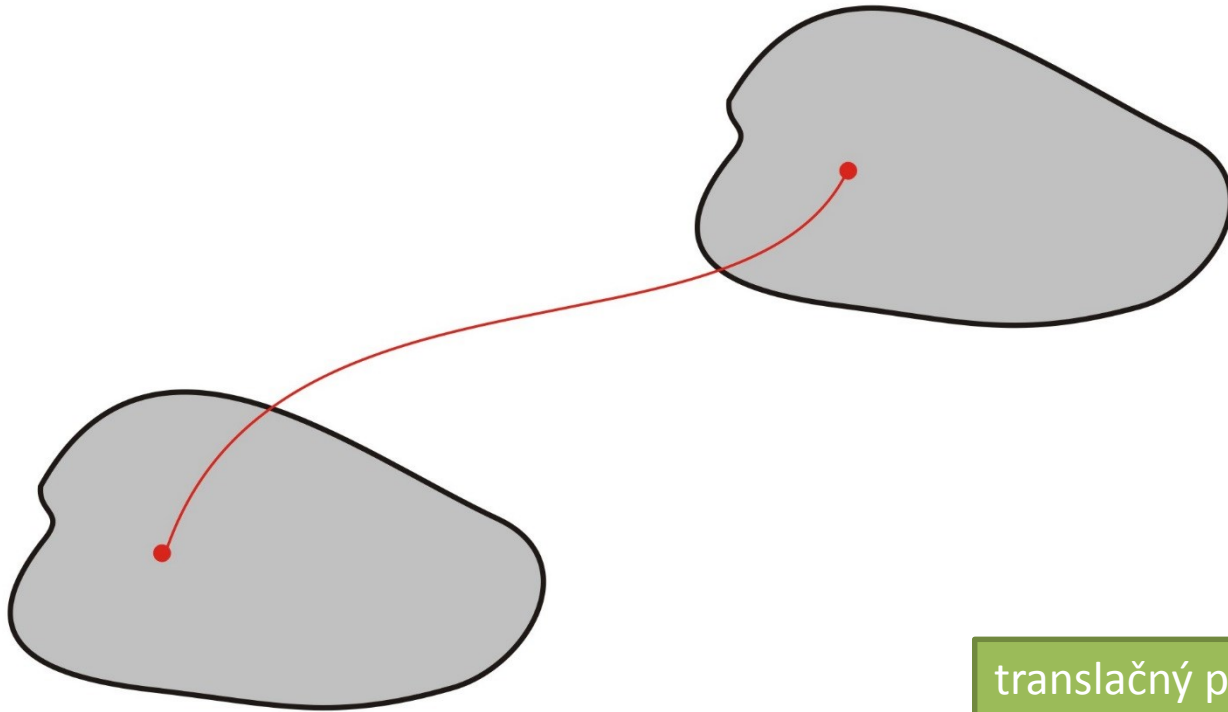
Rozklad pohybu



rovinný pohyb

# 4. Rovinný pohyb telesa

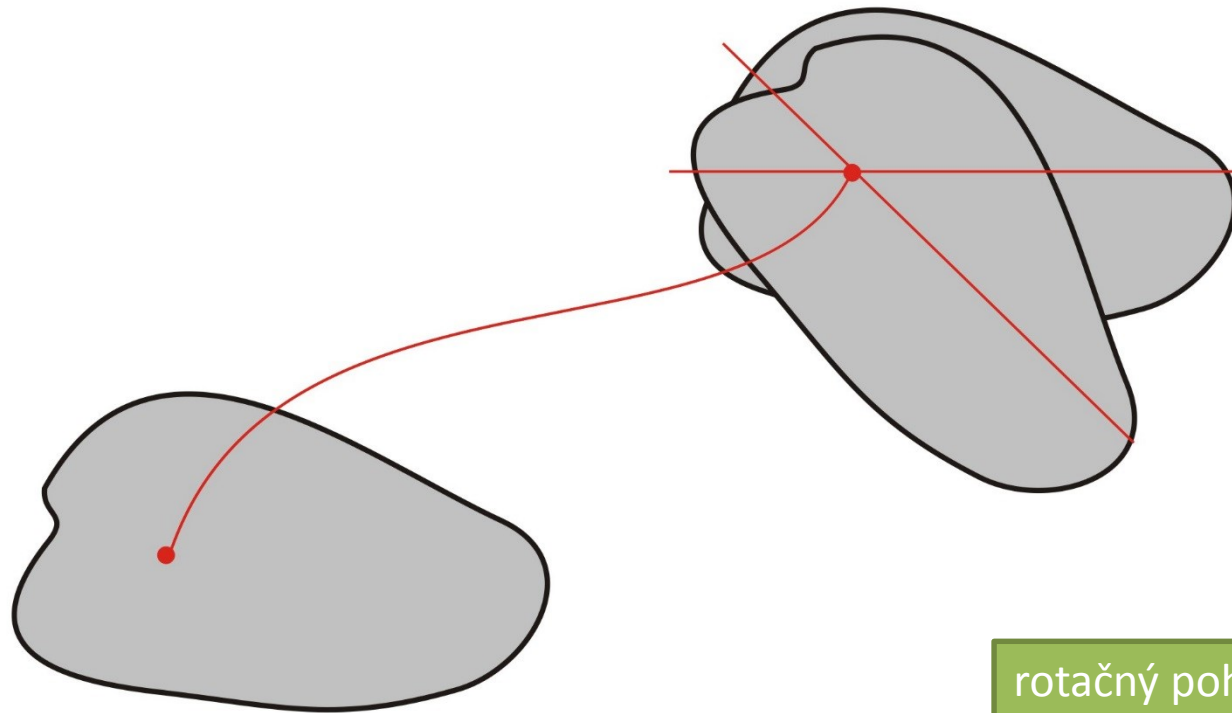
## Rozklad pohybu



translační pohyb (unášavý)  
referenčního bodu

# 4. Rovinný pohyb telesa

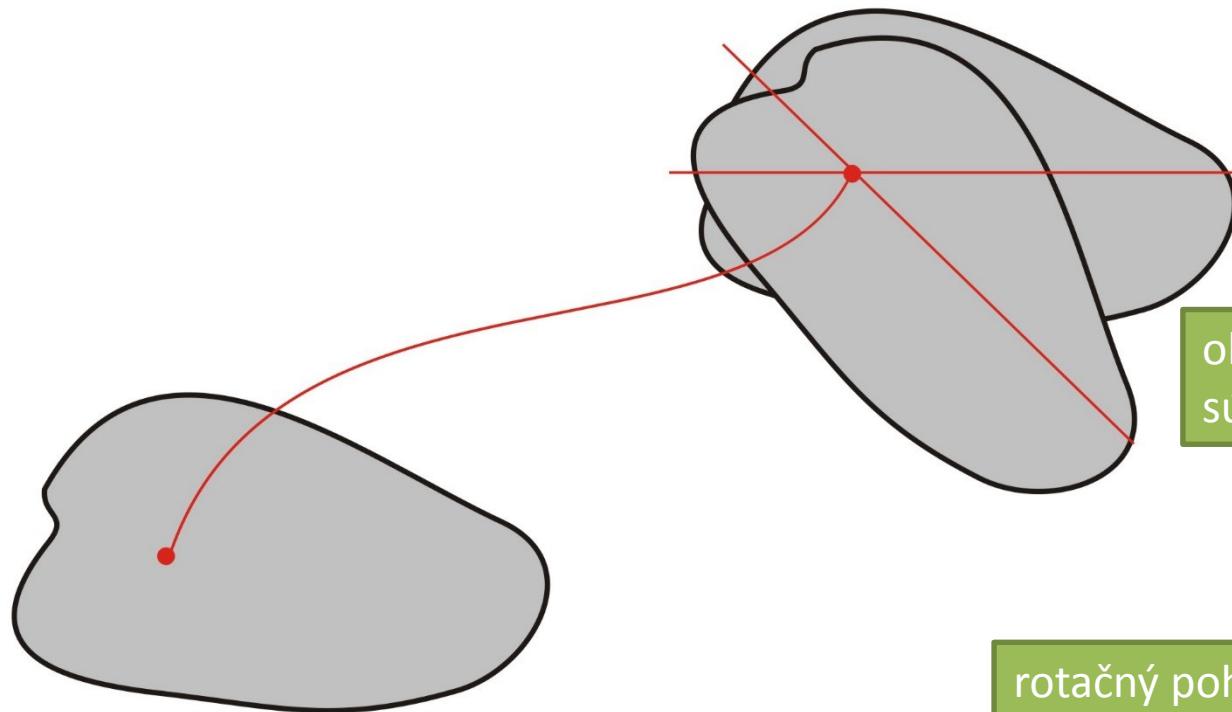
## Rozklad pohybu



rotačný pohyb (relatívny)  
okolo referenčného bodu

# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

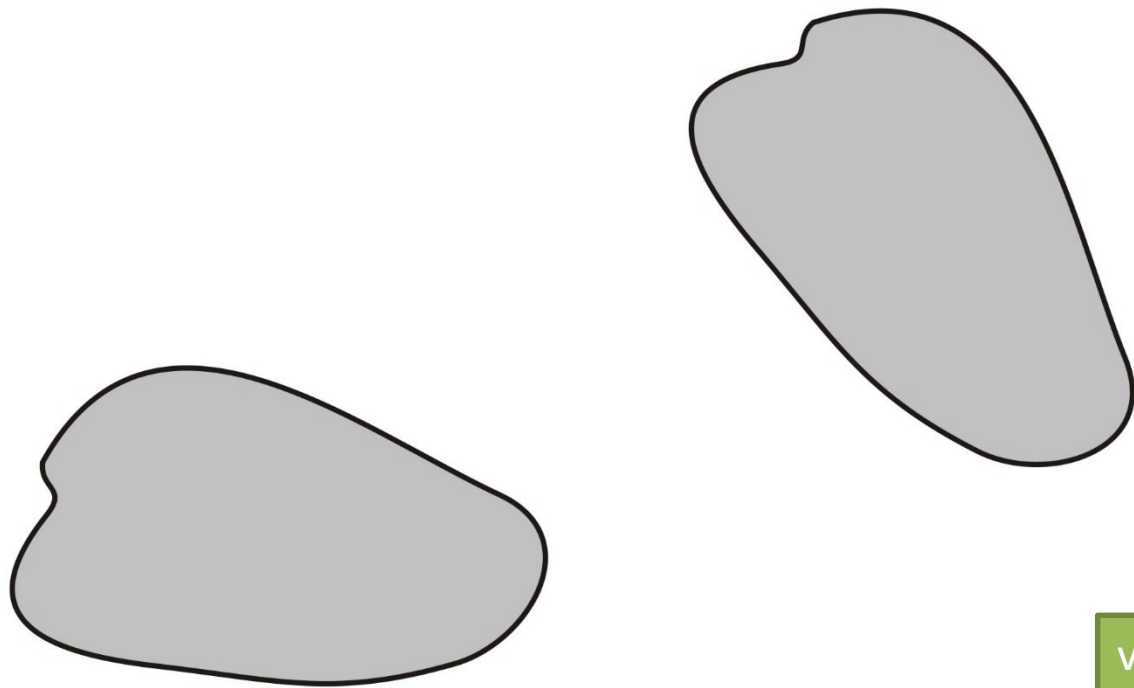


oba pohyby prebiehajú súčasne

rotačný pohyb (relatívny) okolo referenčného bodu

# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu



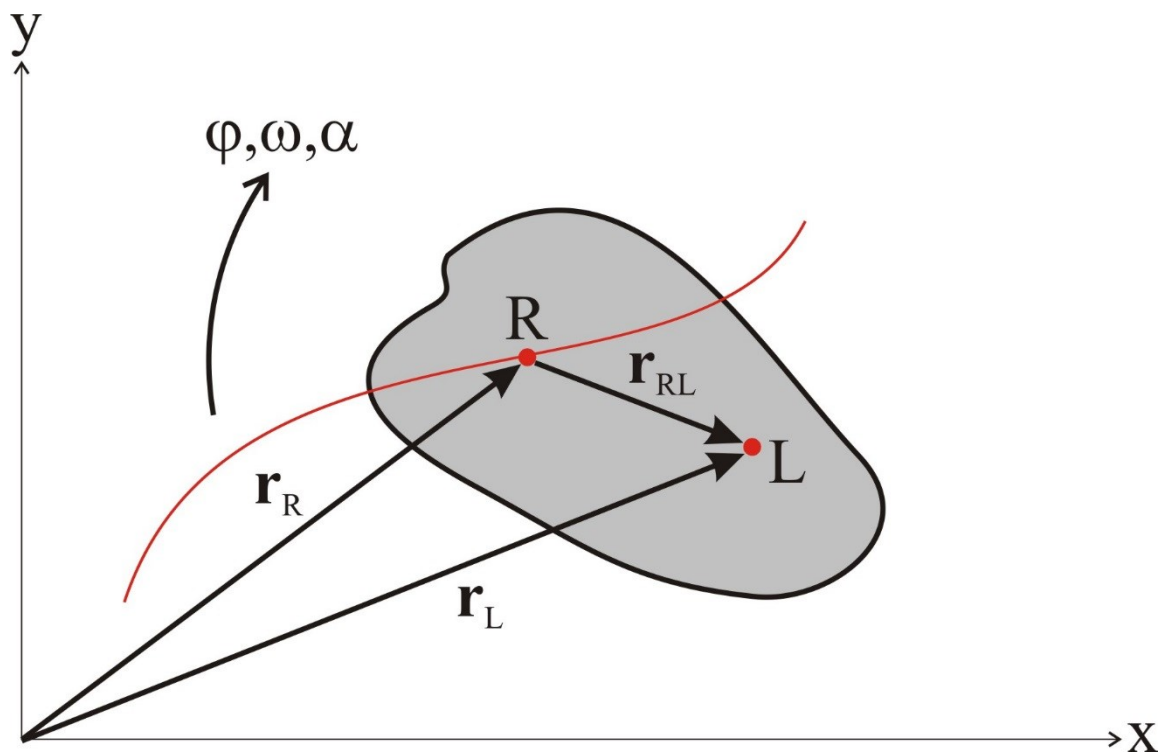
výsledný pohyb



# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

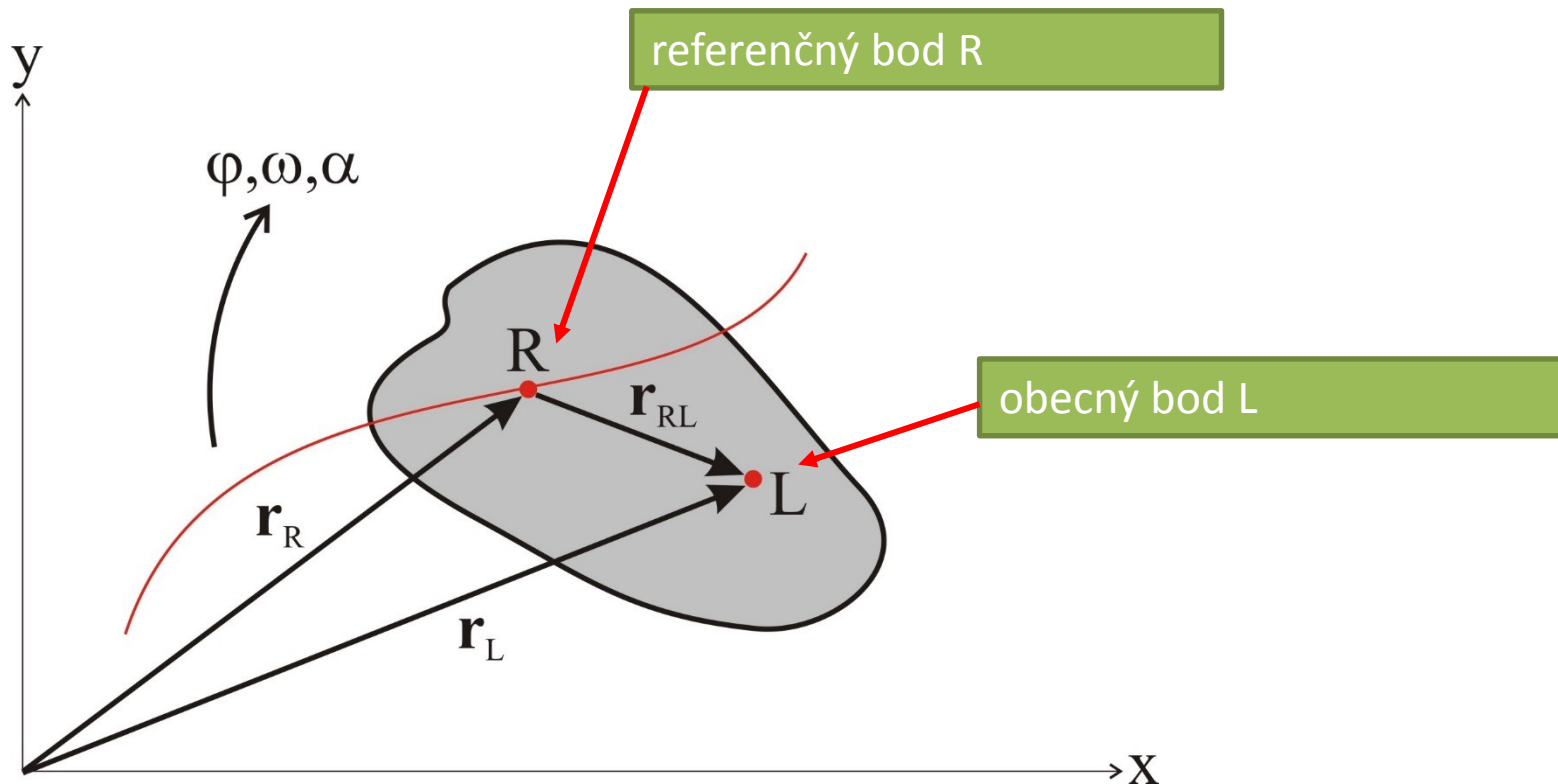
pohyb obecného bodu L



# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L



referenční bod R

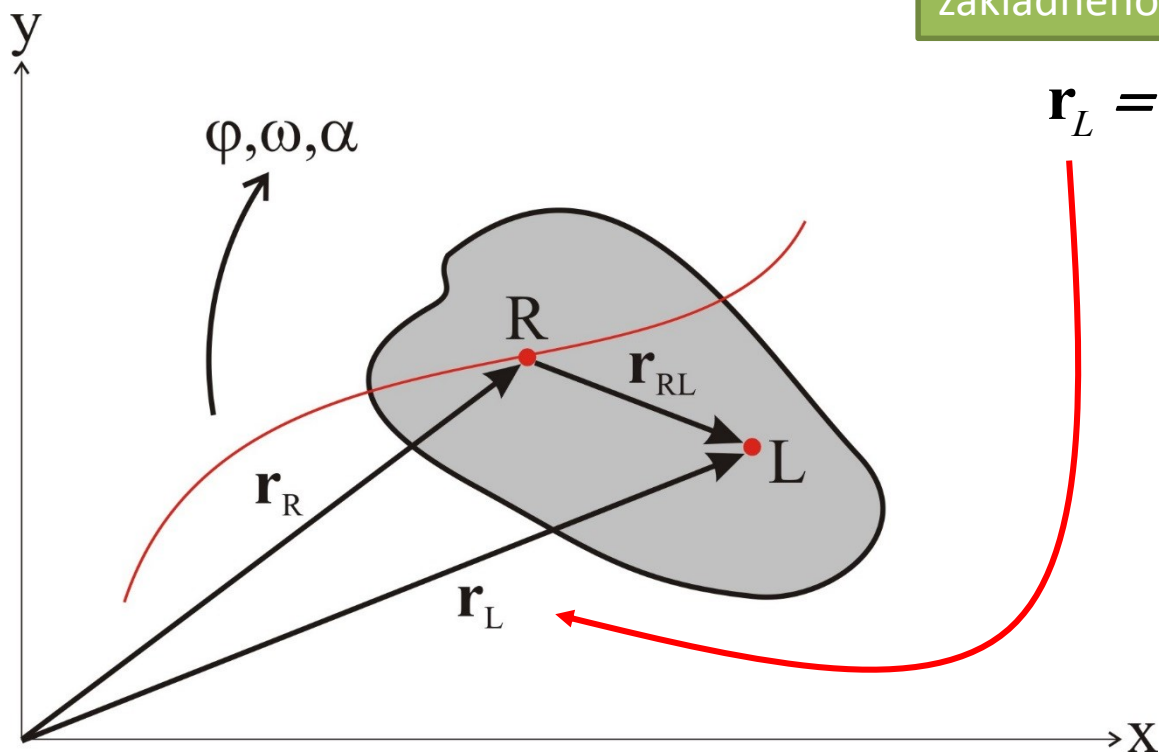
obecný bod L

# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L

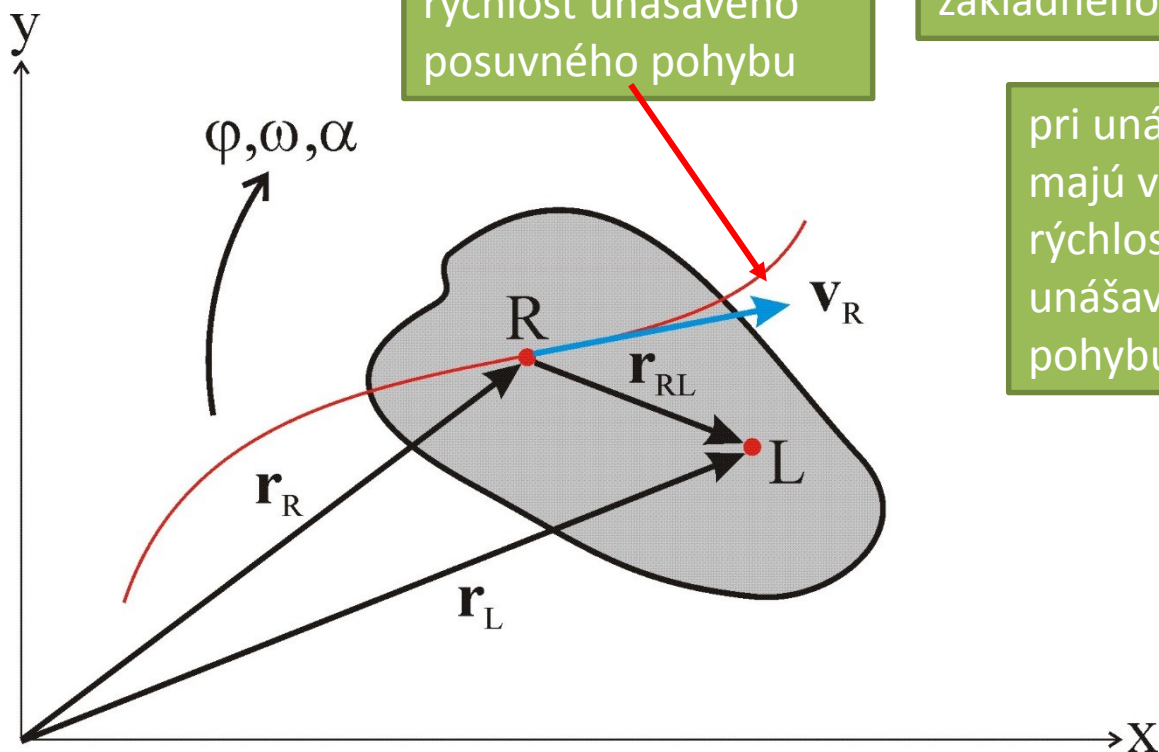
**poloha** obecného bodu L využitím základného rozkladu



# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L



rýchlosť unášavého  
posuvného pohybu

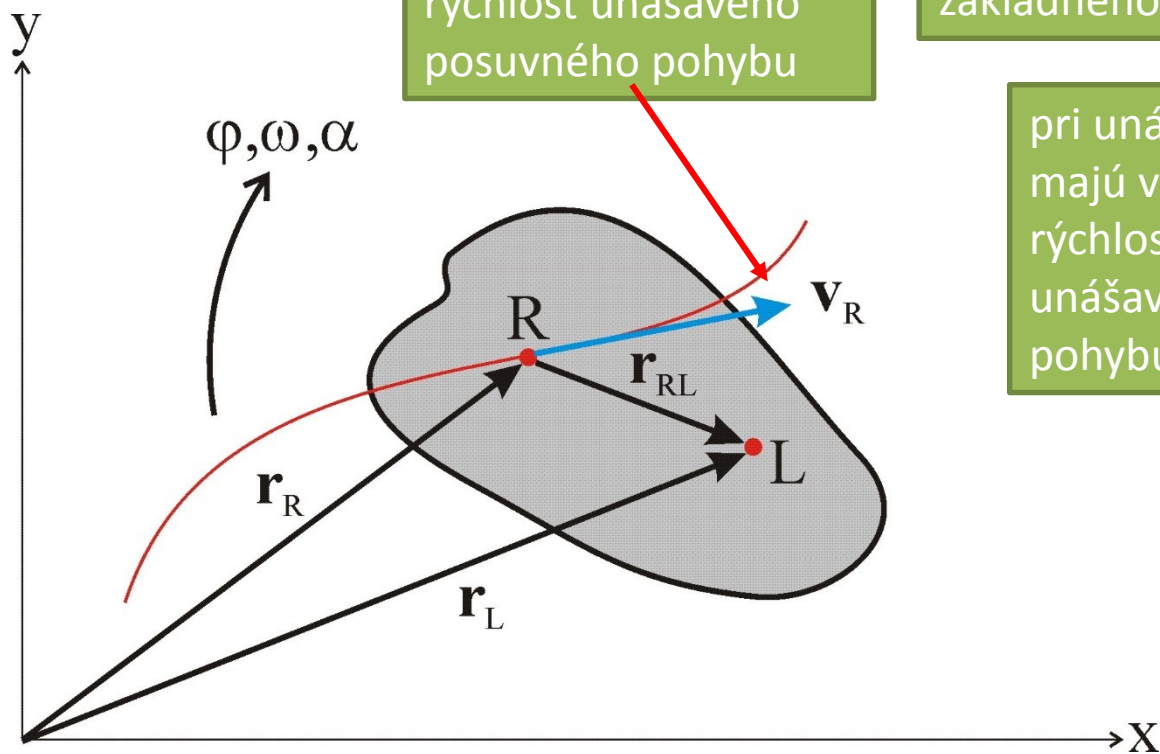
**rýchlosť** obecného bodu L využitím  
základného rozkladu

pri unášavom posuvnom pohybe  
majú všetky body telesa rovnaké  
rýchlosti, t.j. aj bod L sa pri  
unášavom pohybe translačnom  
pohybuje rýchlosťou bodu R

# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L



rýchlosť unášavého  
posuvného pohybu

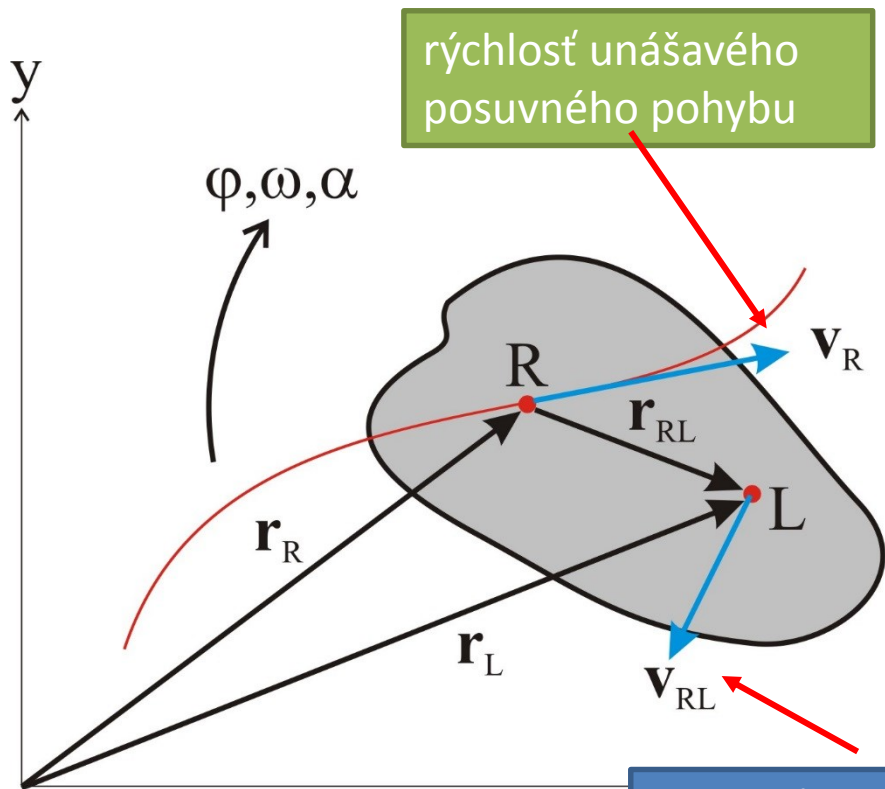
**rýchlosť** obecného bodu L využitím  
základného rozkladu

pri unášavom posuvnom pohybe  
majú všetky body telesa rovnaké  
rýchlosti, t.j. aj bod L sa pri  
unášavom pohybe translačnom  
pohybuje rýchlosťou

# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L



rýchlosť unášavého posuvného pohybu

rýchlosť relatívneho rotačného pohybu predstavuje iba rýchlosť rotácie telesa okolo bodu R (ako keby sa bod R nepohyboval)

rýchlosť relatívneho rotačného pohybu

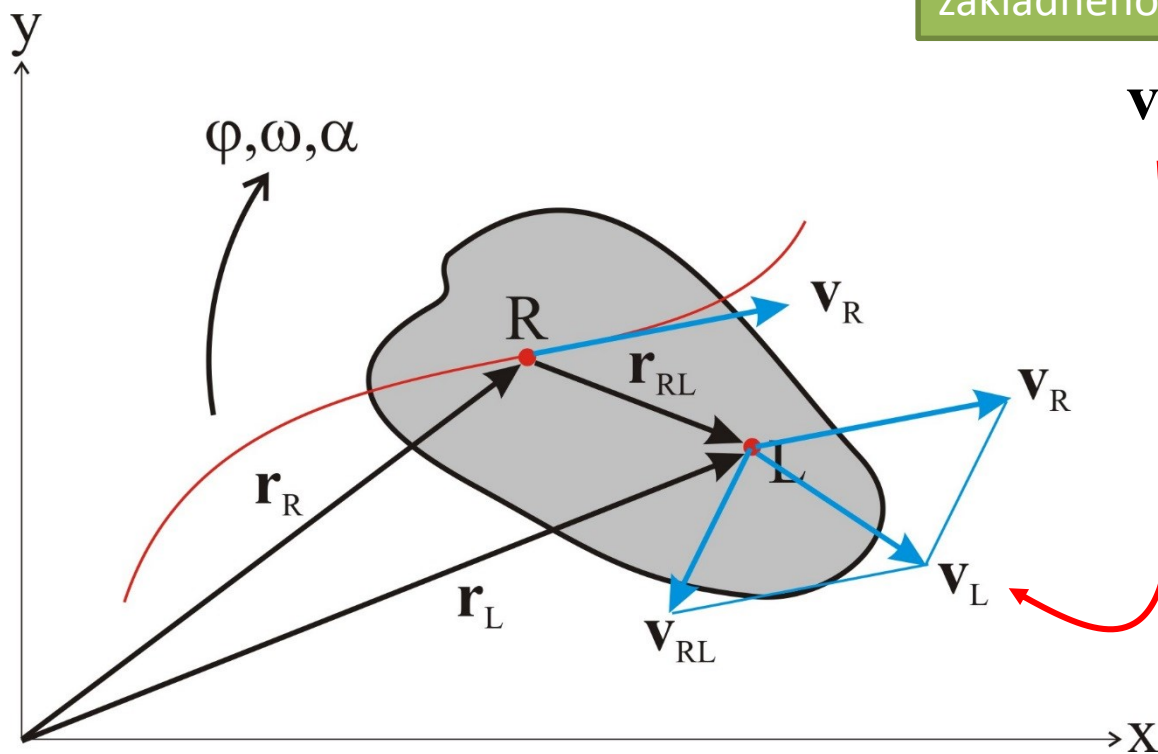
$$\mathbf{v}_{RL} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{RL}$$

# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L

**rýchlost** obecného bodu L využitím základného rozkladu



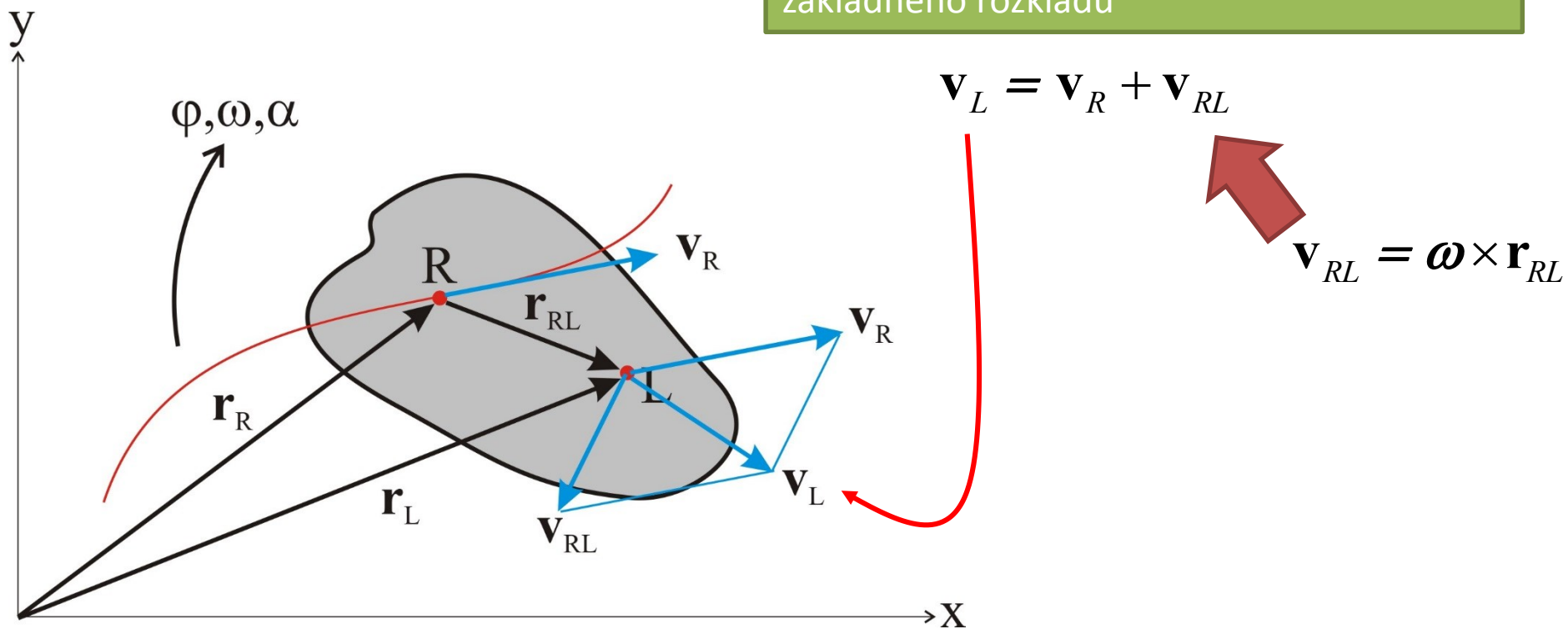
výsledná rýchlosť bodu L je potom určená súčtom unášavej a relatívnej rýchlosti

# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L

**rýchlost** obecného bodu L využitím základného rozkladu



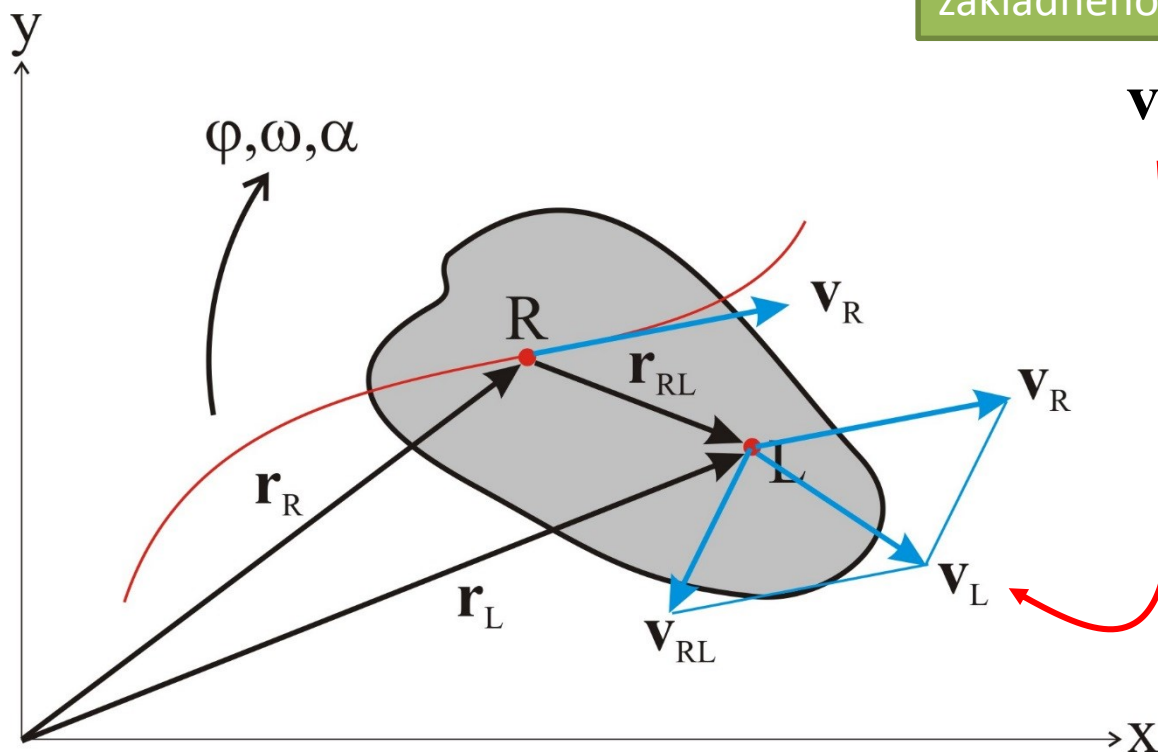


# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L

**rýchlost** obecného bodu L využitím základního rozkladu



$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{RL}$$



$$\mathbf{v}_{RL} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{RL}$$

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_R + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{RL}$$

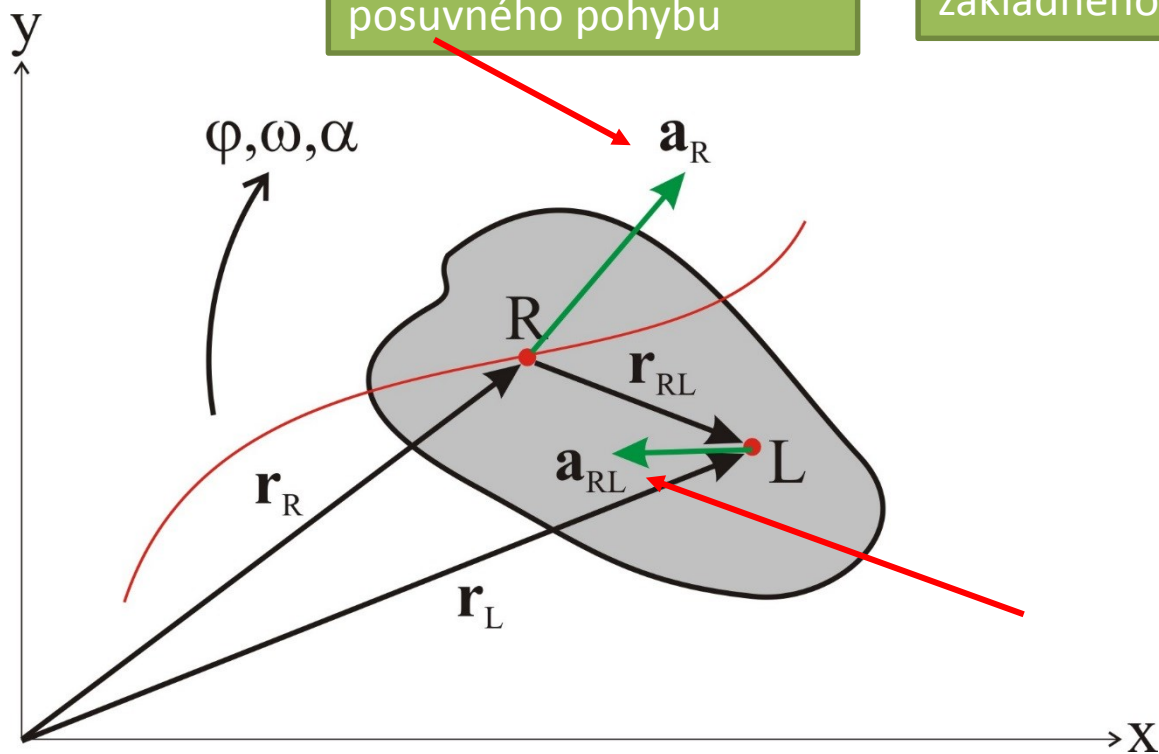
# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L

zrýchlenie unášavého  
posuvného pohybu

**zrýchlenie** obecného bodu L využitím  
základného rozkladu



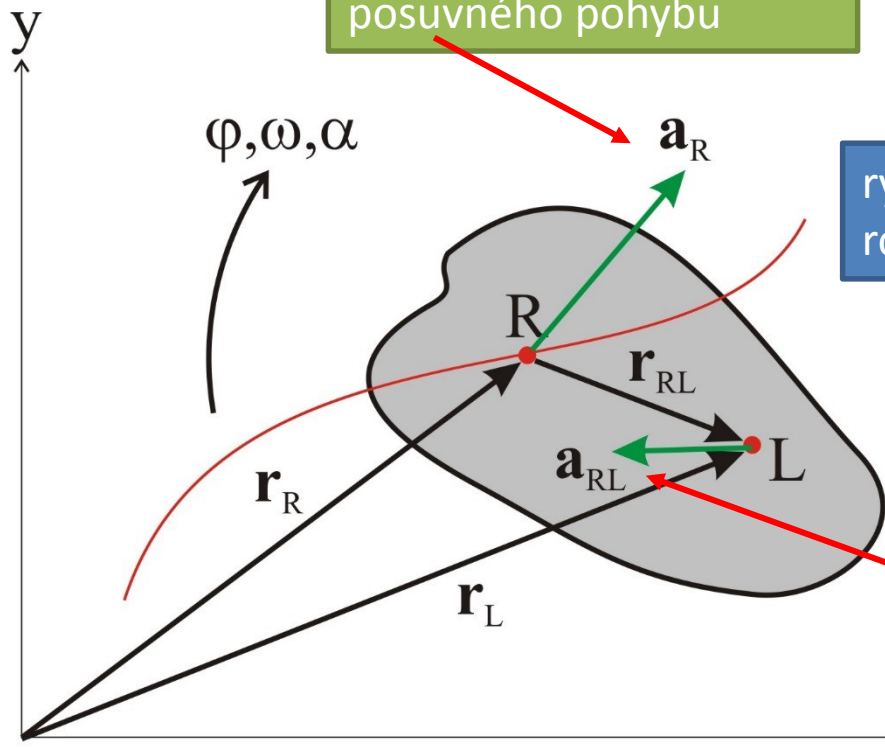
# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L

zrýchlenie unášavého  
posuvného pohybu

**zrýchlenie** obecného bodu L využitím  
základného rozkladu



rýchlosť relatívneho  
rotačného pohybu:

$$\mathbf{v}_{RL} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{RL}$$

zrýchlenie relatívneho  
rotačného pohybu

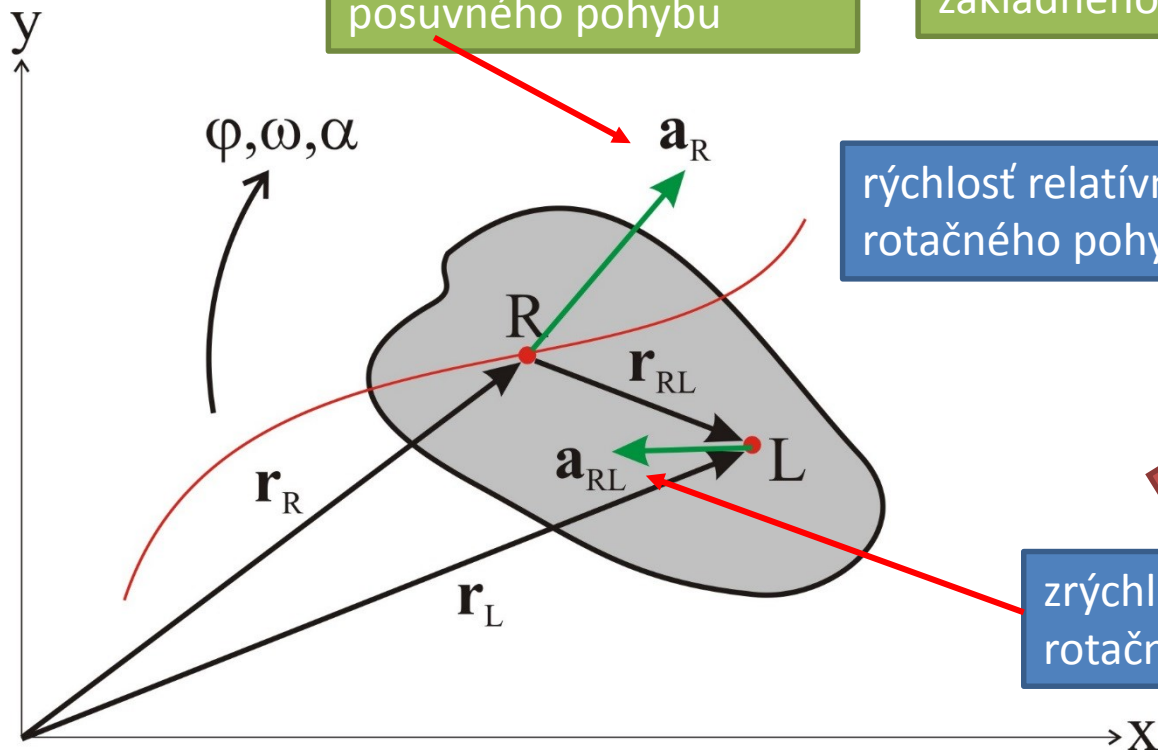
# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L

zrýchlenie unášavého  
posuvného pohybu

**zrýchlenie** obecného bodu L využitím  
základného rozkladu



rýchlosť relatívneho  
rotačného pohybu:

$$\mathbf{v}_{RL} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{RL}$$

$$\mathbf{a}_{RL} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{RL} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{RL}$$

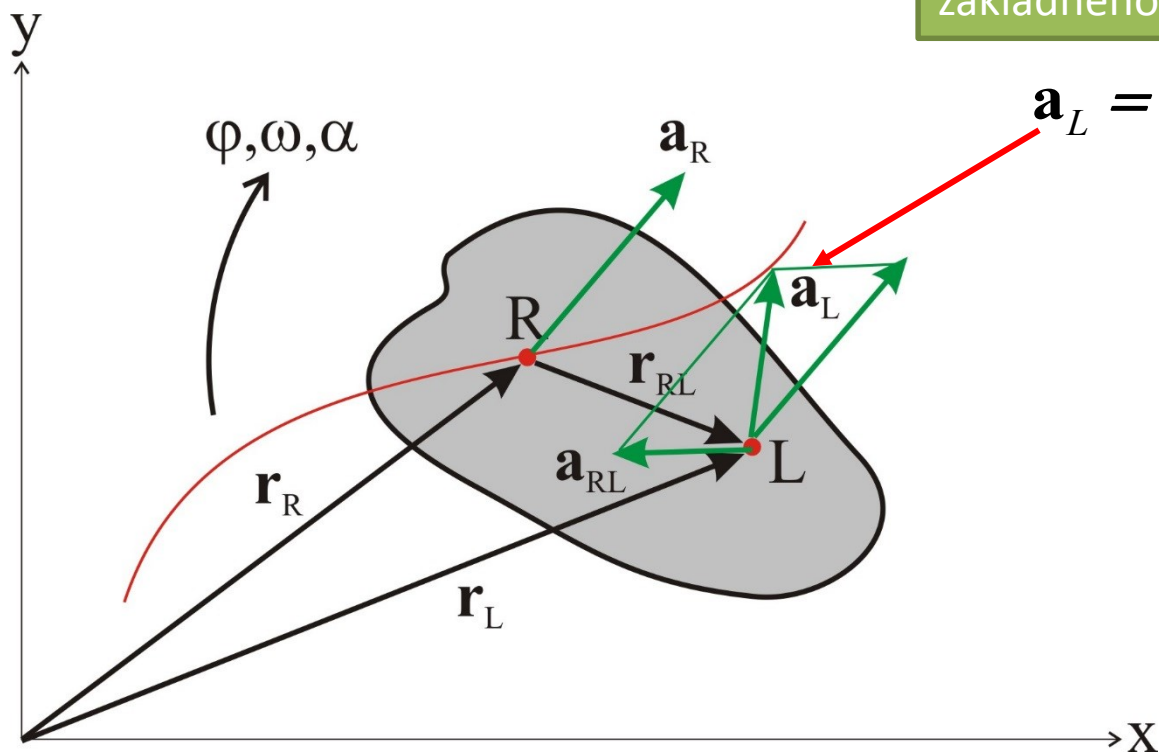
zrýchlenie relatívneho  
rotačného pohybu

# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L

**zrychlenie** obecného bodu L využitím základného rozkladu

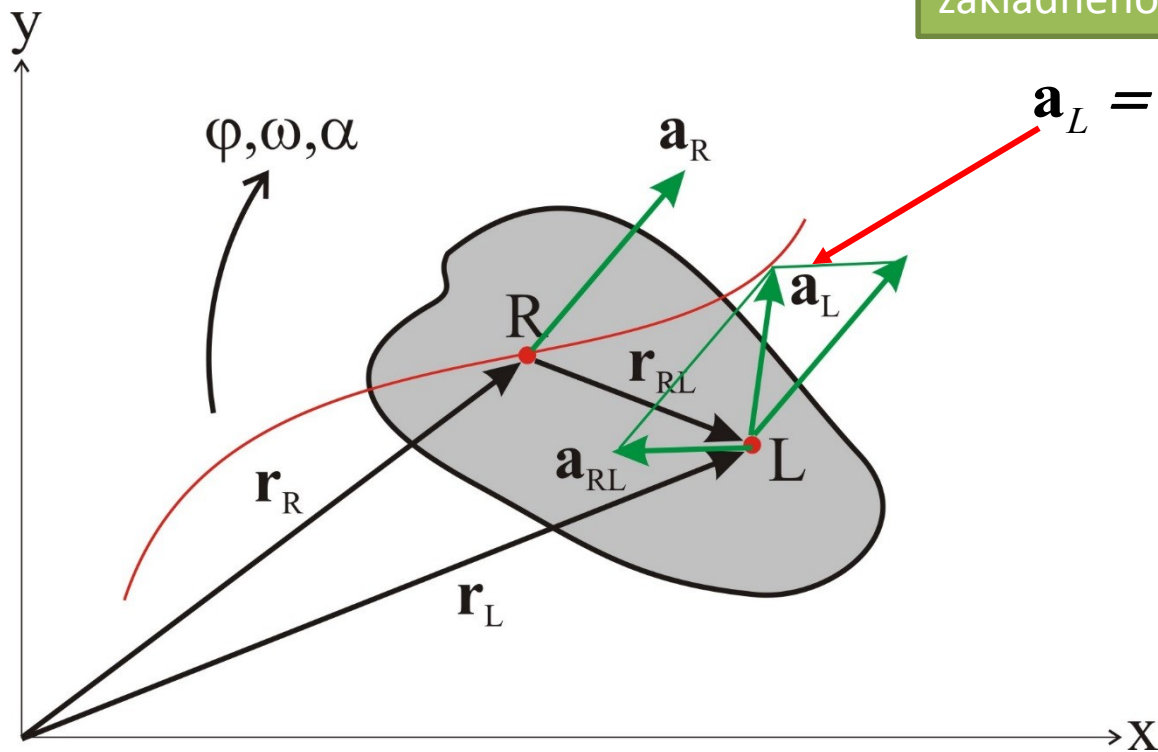


# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L

**zrychlenie** obecného bodu L využitím základného rozkladu



$$\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_{RL}$$

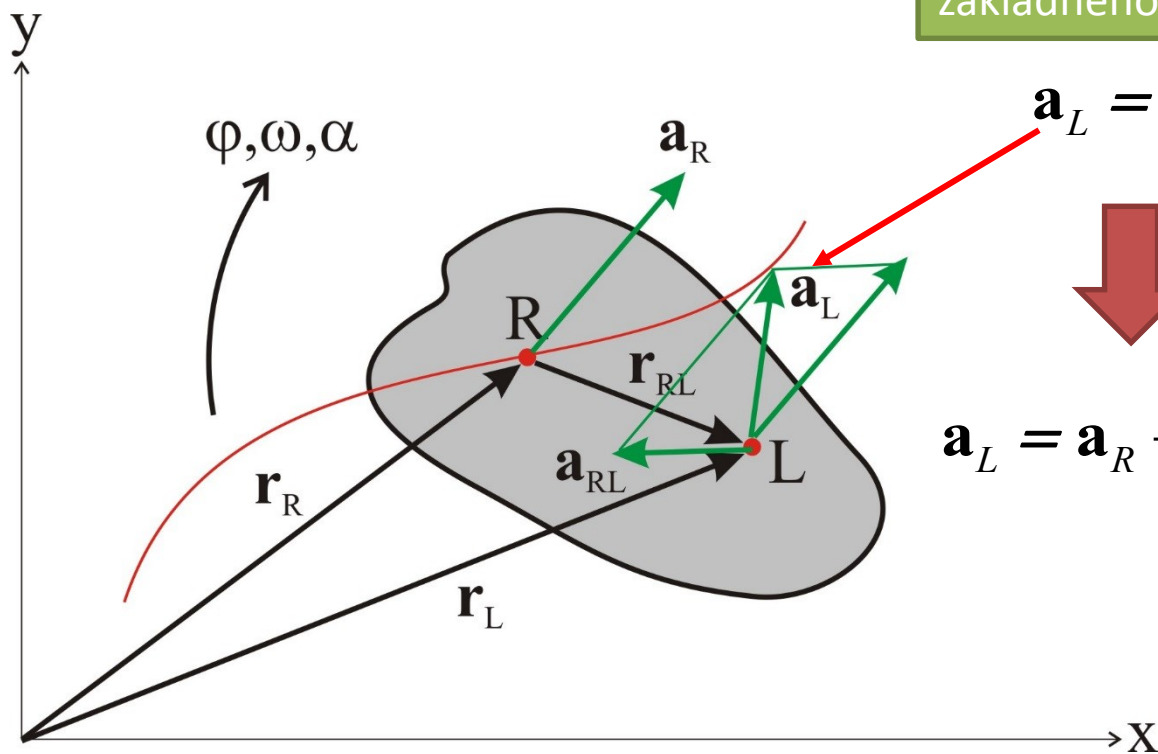
$$\mathbf{a}_{RL} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{RL} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{RL}$$

# 4. Rovinný pohyb telesa

## Rozklad pohybu

pohyb obecného bodu L

**zrychlení** obecného bodu L využitím základného rozkladu



$$\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_{RL}$$

$$\mathbf{a}_{RL} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{RL} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{RL}$$

$$\mathbf{a}_L = \mathbf{a}_R + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{RL} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{RL}$$

# 4. Rovinný pohyb telesa

Tabuľa

- príklad



# 5. Sférický a priestorový pohyb telesa

Charakter. sfér. pohybu

sférický pohyb



- teleso koná sférický pohyb, ak jeden jeho bod je trvalo v klúde
- tento bod sa nazýva stred sférického pohybu
- ak telesu nie sú kladené iné väzby, potom má tri stupne voľnosti
- trajektóriami bodov sú sférické krivky – t.j. krivky ležiace na guľových plochách so stredom v strede sférického pohybu
- opisuje sa pomocou tzv. Eulerovych uhlov:
  - precesia
  - nutácia
  - vlastná rotácia

# 5. Sférický a priestorový pohyb telesa

Charakter. sfér. pohybu

sférický pohyb



# 5. Sférický a priestorový pohyb telesa

Charakter. priestor. pohybu

priestorový pohyb



- predstavuje najobecnejší prípad pohybu telesa
- základný rozklad obecného priestorového pohybu telesa k bodu  $\Omega$  je jeho rozklad na **unášavý pohyb posuvný** určený pohybom bodu  $\Omega$  – tzv. referenčný bod, a na **relatívny sférický pohyb** okolo tohto bodu
- poloha telesa v priestore je potom určená súradnicami referenčného bodu  $\Omega$  a Eulerovými uhlami, ktoré definujú relatívny sférický pohyb