

Dynamika mechatronických systémov

Dynamika bodu I.

Vladimír Kutiš

Oddelenie aplikovanej mechaniky a mechatroniky
UAMT, FEI STU Bratislava



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta elektrotechniky a informatiky

SLOVAK UNIVERSITY OF TECHNOLOGY IN BRATISLAVA

Faculty of Electrical Engineering and Information Technology

Obsah prednášky

1. Cieľ dynamiky
2. Základné pojmy
3. Newtonove pohybové zákony
4. Základné vety dynamiky hmotného bodu

1. Cieľ dynamiky

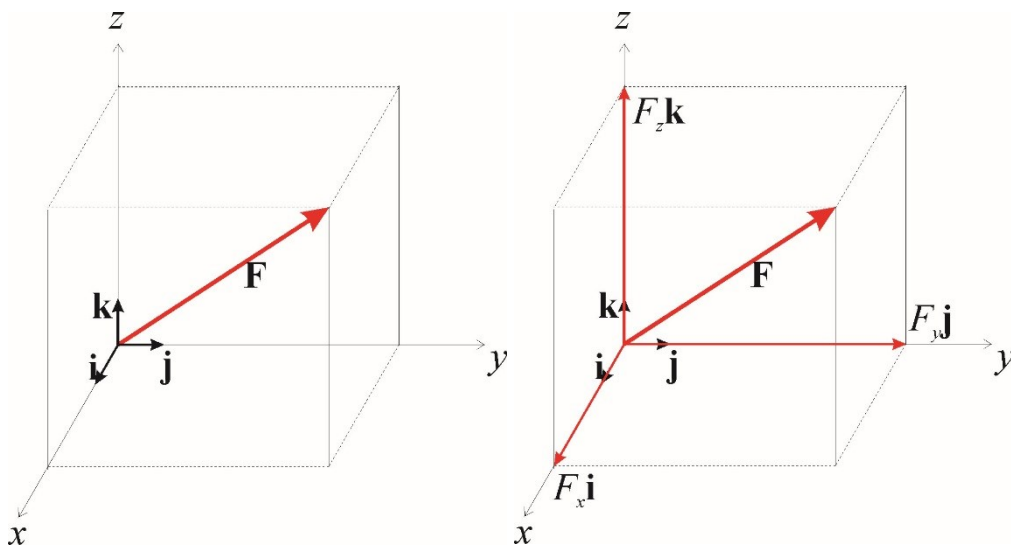
- vyšetriť súvislosti medzi pohybom mechanických sústav a pôsobiacimi silami
- tento vzájomný vzťah je definovaný pomocou pohybových rovníc
- hlavná úloha dynamiky je zostaviť pohybové rovnice a vyriešiť ich analyticky alebo numericky

2. Základné pojmy

Sila



- je vektorová veličina, ktorá vyjadruje pôsobenie jedného bodu (alebo telesa) na iný bod (alebo teleso), alebo pôsobenie poľa na daný bod (alebo teleso)



$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

2. Základné pojmy

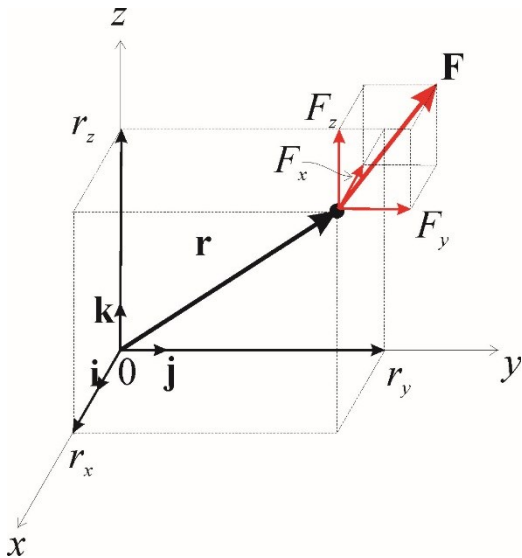
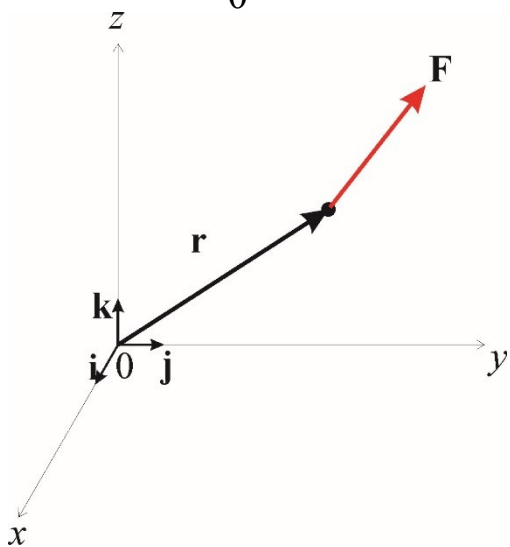
Moment sily



• je vektorová veličina, ktorá sa určuje vždy k určitému bodu

Moment k bodu 0

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$$

2. Základné pojmy

Hmotný bod



- je teleso, ktorého geometrické rozmery v uvažovanej sústave môžeme zanedbať
- v 3D má 3DOF
- v 2D má 2DOF
- hmotnosť hmotného bodu vyjadruje mieru zotrvačnosti hmotného bodu

3. Newtonove pohybové zákony

1. zákon – Zákon zotrvačnosti

- vzhľadom na **inerciálnu vz. s.** sa pohybový stav hmotného bodu nemení, t.j. zotrváva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, ak na hmotný bod nepôsobia žiadne sily



- pohybový stav hmotného bodu je vyjadrený **hybnosťou**, ktorá musí byť vyjadrená v inerciálnej vz.s.



vektor rýchlosti vyjadrený v inerc. vz.s.

$$\mathbf{p}_A = m\mathbf{v}_A$$

3. Newtonove pohybové zákony

2. zákon – Zákon sily

- časová zmena hybnosti hmotného bodu, t.j. zmena pohybového stavu hmotného bodu je úmerná výslednej sile, ktorá pôsobí na daný hmotný bod a táto zmena hybnosti prebieha v smere, v ktorom pôsobí výsledná sila



- matematická formulácia tohto zákona



vektor výslednej sily pôsobiacej na hmotný bod

$$\dot{\mathbf{p}}_A = F(\mathbf{r}_{A0}, \mathbf{v}_A, t)$$

3. Newtonove pohybové zákony

2. zákon – Zákon sily

- ak sa hmotnosť hmotného bodu nemení:



$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = m \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

zložkový tvar

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = m \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$ma_x = F_x$$

$$ma_y = F_y$$

$$ma_z = F_z$$

3. Newtonove pohybové zákony

2. zákon – Zákon sily

- ak na hmotný bod pôsobí viacero síl, potom

$$m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}_i$$

tu sú zahrnuté všetky pôsobiace sily

bod bez väzieb

sú to všetky akčné sily

bod s väzbami

okrem akčných síl musia byť zahrnuté aj reakčné sily, ktoré predstavujú silové pôsobenie kinematických väzieb

3. Newtonove pohybové zákony

3. zákon – Zákon akcie a reakcie

- silové pôsobenie medzi hmotnými bodmi resp. telesami je vždy vzájomné, t.j. 2 hmotné body pôsobia na seba rovnako veľkými silami rovnakého smeru ale opačne orientovanými



- matematická formulácia tohto zákona



$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

3. Newtonove pohybové zákony

Postup výpočtu

1. **Vytvorenie modelu systému** – fyzikálny systém nahradzame modelom
2. **Zvolenie vzťažnej sústavy a súradnicového systému** – pre rôzne modely môžu byť výhodné rôzne vz.s. a SS
3. **Uvoľnenie vyšetrovaného bodu resp. telesa** – vplyv ostatných telies a väzieb je po uvoľnení zanesený do modelu silovým pôsobením týchto telies a väzieb
4. **Vyjadrenie rýchlostí a zrýchlení** – musia byť vyjadrené s rešpektovaním inerciálnej vz.s.
5. **Zapísanie Newtonovho pohybového zákona** – vektorové rovnice sa prepíšu na zložkové v danej vz.s.
6. **Získanie pohybovej rovnice** – ak je potrebné, môžu byť rozšírené o rovnice väzieb, potrebné sú počiatočné podmienky
7. **Vyriešenie danej resp. daných pohybových rovníc**

3. Newtonove pohybové zákony

Tabuľa

- príklad – kyvadlo: rôzne SS, rôzne vz.s.

4. Základné vety dynamiky hmotného bodu

- Zostavenie pohybových rovníc pomocou Newtonovho pohybového zákona je univerzálny spôsob, ako získať pohybové rovnice
- Avšak existujú aj iné koncepty, ktoré umožňujú zostaviť pohybové rovnice jednoduchšie
- Medzi tieto koncepty patria nasledovné spôsoby analyzovania problémov



- Zmena hybnosti
- Zmena momentu hybnosti
- Zmena kinetickej energie
- Konzervatívne sily, potenciálna energia

4. Základné vety dynamiky hmotného bodu

Zmena hybnosti

- vychádza sa z Newtonovho druhého zákona

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}dt$$

- integrovaním v čase t_1 až t_2 dostávame

$$m\mathbf{v}(t_2) - m\mathbf{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt \quad \Rightarrow \quad m\mathbf{v}(t_2) = m\mathbf{v}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}dt$$

4. Základné vety dynamiky hmotného bodu

Zmena hybnosti

$$m\mathbf{v}(t_2) = m\mathbf{v}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt$$

- ak sila $\mathbf{F} = \mathbf{0}$: impulz sily je nulový, hybnosť sústavy sa nemení, t.j. pre izolovanú sústavu (izolovaná sústava je taká, na ktorú nepôsobia žiadne sily) platí zákon zachovania hybnosti
- ak sila $\mathbf{F} = \text{konšt.} \neq \mathbf{0}$ alebo ak $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ ale nie je funkciou polohy, potom integrál na pravej strane je možné vyjadriť
- ak časový interval $t_2 - t_1$ je veľmi krátky, t.j. ak sila pôsobí veľmi krátky čas, potom takúto silu voláme impulzná sila



- posledný prípad nám môže zjednodušiť výpočet

4. Základné vety dynamiky hmotného bodu

Zmena hybnosti

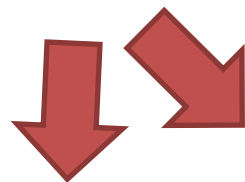
- príklad – impulz sily

4. Základné vety dynamiky hmotného bodu

Zmena momentu hybnosti

- zavádza sa nový pojem – moment hybnosti

$$\mathbf{L}_{A0} = \mathbf{r}_{A0} \times (m\mathbf{v}_A)$$



- časová derivácia

- moment hybnosti by mal byť označený vzťažným bodom, na ktorý sa tento moment hybnosti vzťahuje



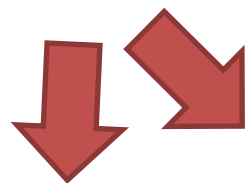
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{A0}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{A0} \times (m\mathbf{v}_A)) = \mathbf{v}_A \times (m\mathbf{v}_A) + \mathbf{r}_{A0} \times (m\mathbf{a}_A)$$

4. Základné vety dynamiky hmotného bodu

Zmena momentu hybnosti

- zavádza sa nový pojem – moment hybnosti

$$L_{A0} = \mathbf{r}_{A0} \times (m\mathbf{v}_A)$$



- časová derivácia

- moment hybnosti by mal byť označený vzťažným bodom, na ktorý sa tento moment hybnosti vzťahuje

$$\frac{d}{dt}(L_{A0}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{A0} \times (m\mathbf{v}_A)) = \mathbf{v}_A \times \cancel{(m\mathbf{v}_A)} + \mathbf{r}_{A0} \times (m\mathbf{a}_A)$$

$\mathbf{0}$
 M_{A0}

\uparrow
 \uparrow

4. Základné vety dynamiky hmotného bodu

Zmena momentu hybnosti

- zavádza sa nový pojem – moment hybnosti

$$L_{A0} = \mathbf{r}_{A0} \times (m\mathbf{v}_A)$$

- časová derivácia

- moment hybnosti by mal byť označený vzťažným bodom, na ktorý sa tento moment hybnosti vzťahuje

$$\frac{d}{dt}(L_{A0}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{A0} \times (m\mathbf{v}_A)) = \mathbf{v}_A \times (m\mathbf{v}_A) + \mathbf{r}_{A0} \times (m\mathbf{a}_A)$$

$$\frac{d}{dt}(L_{A0}) = \mathbf{M}_{A0}$$

- dôležitý vzťah najmä pre dynamiku telies

4. Základné vety dynamiky hmotného bodu

Tabuľa

- možno Příklad na moment hybnosti