

Dynamika mechatronických systémov

Dynamika sústavy bodov

Vladimír Kutiš

Oddelenie aplikovanej mechaniky a mechatroniky
UAMT, FEI STU Bratislava



SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Fakulta elektrotechniky a informatiky

SLOVAK UNIVERSITY OF TECHNOLOGY IN BRATISLAVA

Faculty of Electrical Engineering and Information Technology

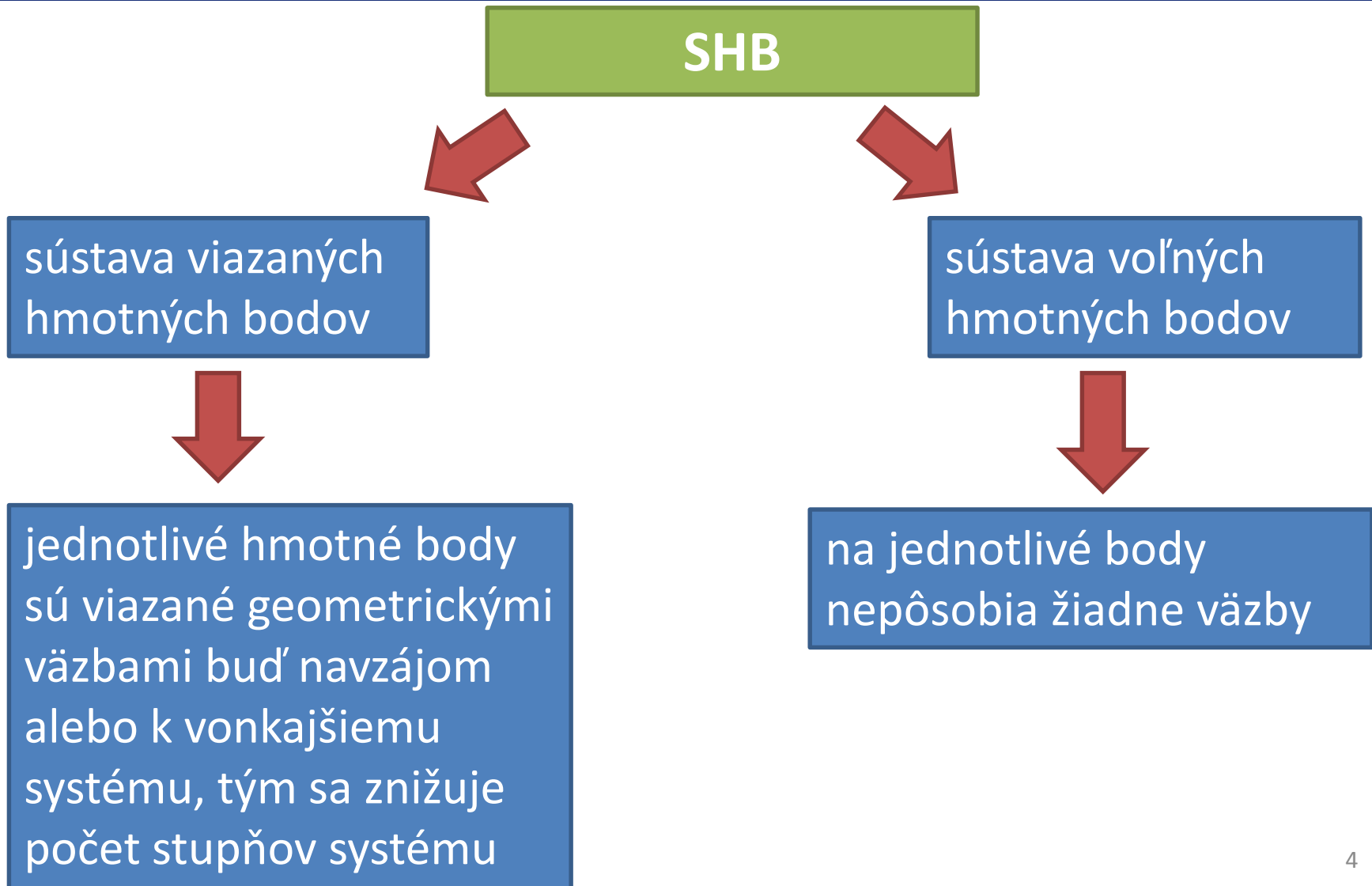
Obsah prednášky

1. Základné pojmy
2. Newtonove pohybové zákony pre SHB
3. Základné vety dynamiky SHB

1. Základné pojmy

- mechanický model, ktorého pohyb je charakterizovaný pohybom 2 alebo viacerých bodov, nazývame sústavou hmotných bodov – SHB
- jednotlivé hmotné body na seba obecnne pôsobia, pričom toto pôsobenie sa vyjadruje vnútornými silami F_{ij}^I - silový účinok hmotného bodu i na hmotný bod j

1. Základné pojmy



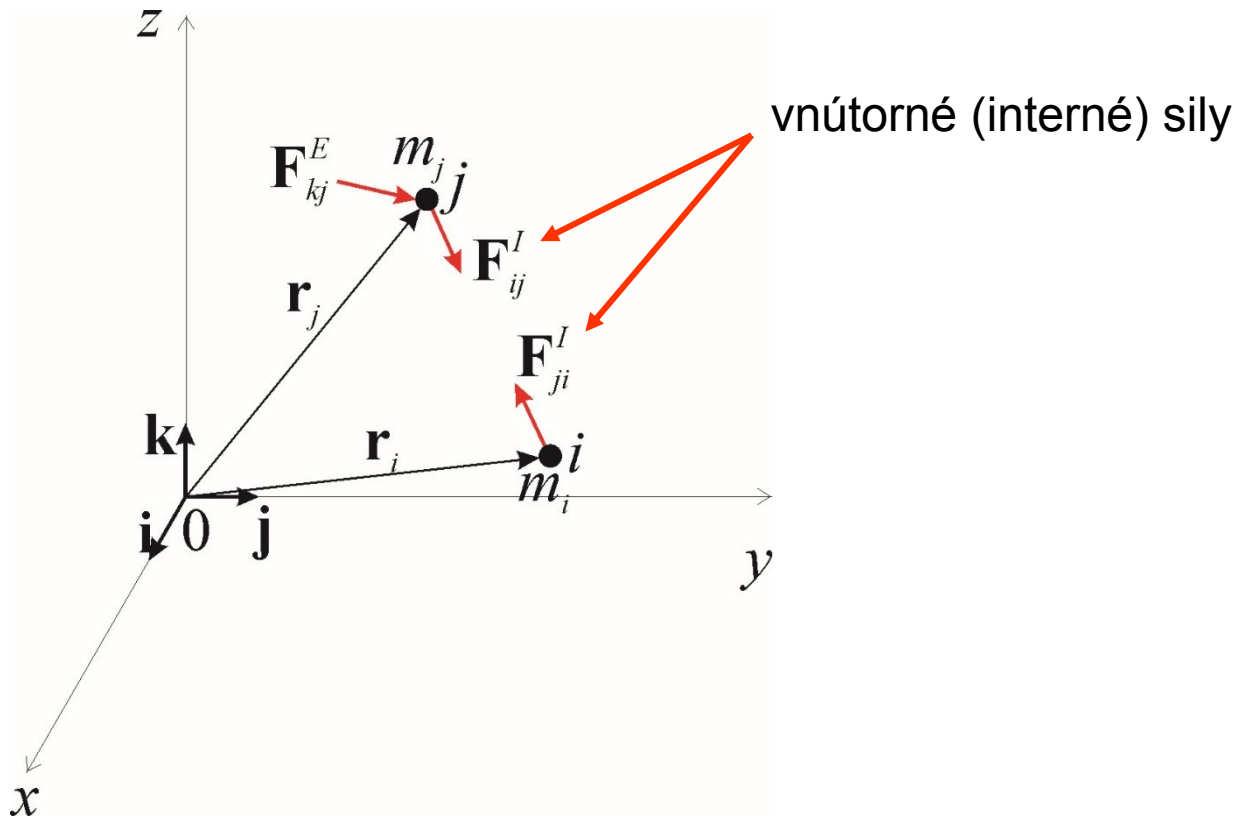
1. Základné pojmy

zvláštny typy sústav hmotných bodov:

- sústava na ktorú nepôsobia žiadne vonkajšie sily – tzv. **izolovaná sústav**
- **dokonale tuhé teleso** – všetky jeho body sú vzájomne zviazané takým spôsobom, že vzájomná poloha všetkých bodov zostáva trvale nezmenená

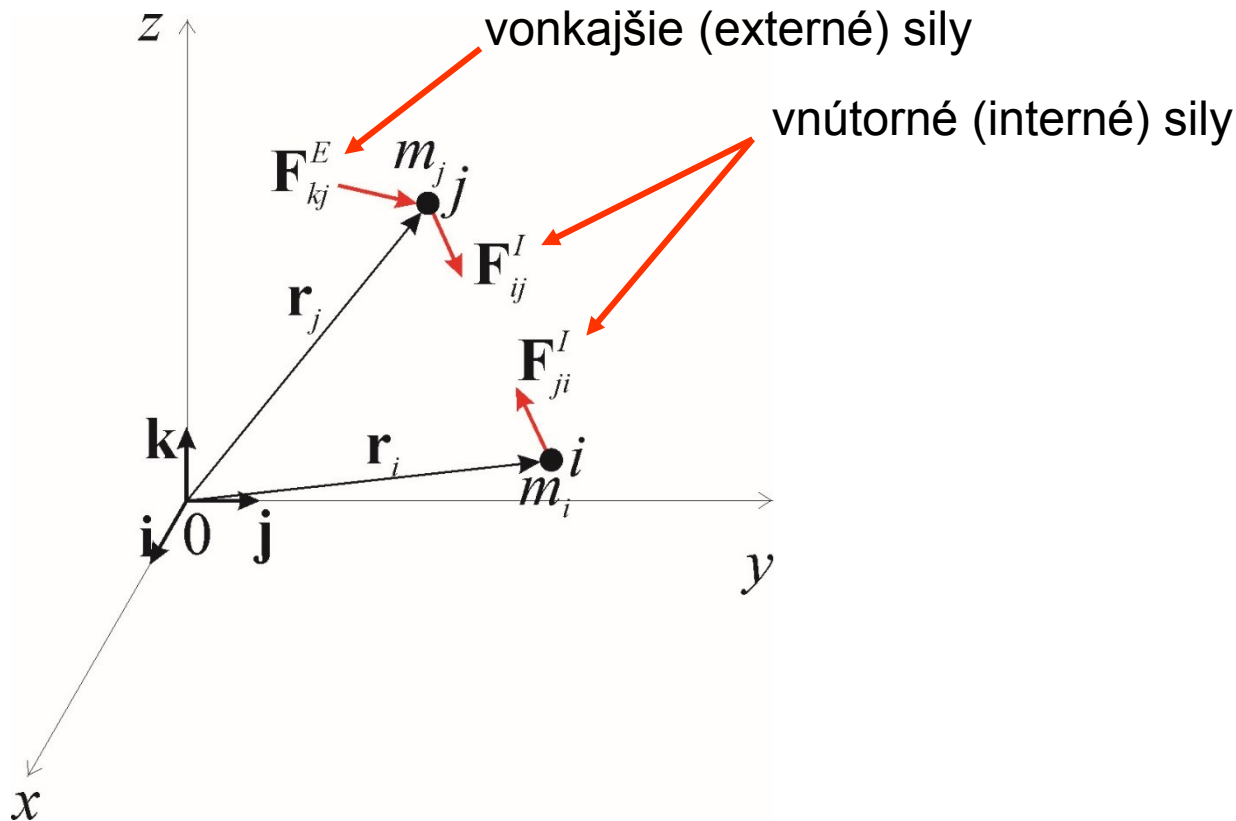
2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

- pre SHB sa dajú zostaviť pomocou metódy uvoľňovania
- na ľubovoľný bod SHB pôsobia jednak sily vonkajšie ako aj sily vnútorné



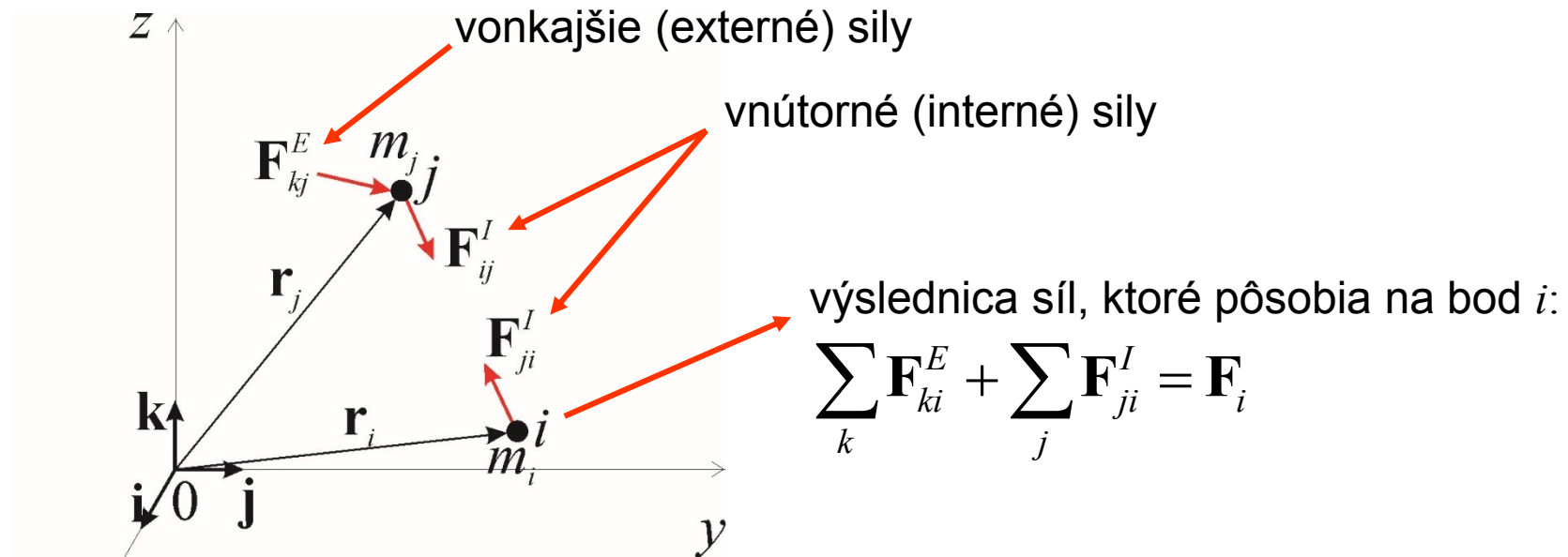
2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

- pre SHB sa dajú zostaviť pomocou metódy uvoľňovania
- na ľubovoľný bod SHB pôsobia jednak sily vonkajšie ako aj sily vnútorné



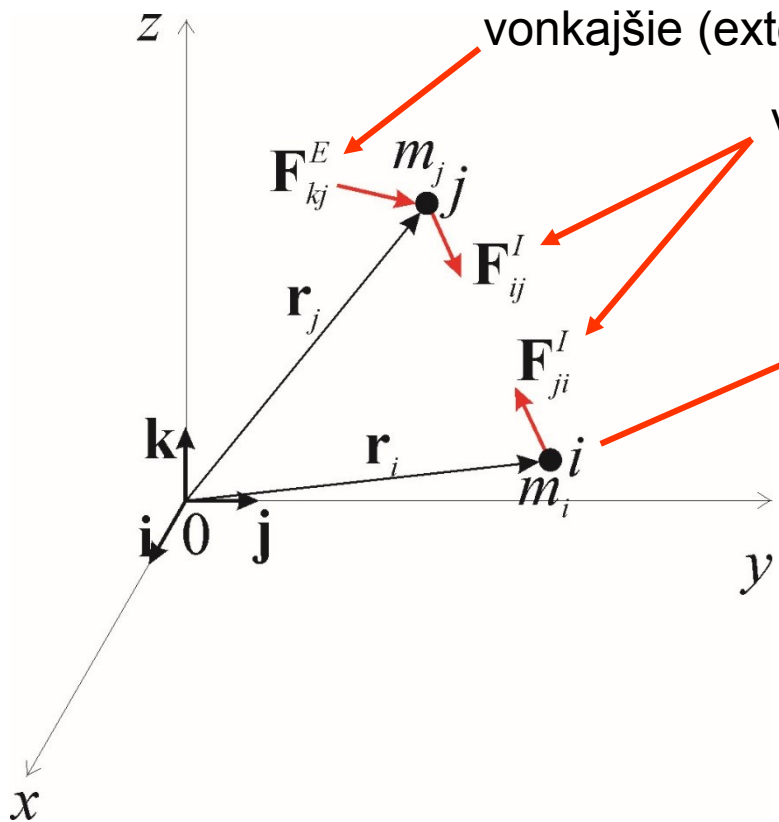
2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

- pre SHB sa dajú zostaviť pomocou metódy uvoľňovania
- na ľubovoľný bod SHB pôsobia jednak sily vonkajšie ako aj sily vnútorné



2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

- pre SHB sa dajú zostaviť pomocou metódy uvoľňovania
- na ľubovoľný bod SHB pôsobia jednak sily vonkajšie ako aj sily vnútorné



vonkajšie (externé) sily

vnútorné (interné) sily

výslednica síl, ktoré pôsobia na bod i :

$$\sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I = \mathbf{F}_i$$

potom pre N hmotných bodov platí N vektorových pohybových rovníc:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$

2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

N rovníc:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$

2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

N rovníc:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$

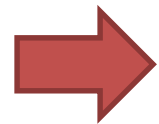


$$\mathbf{F}_i = \sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I$$

2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

N rovníc:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$



$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \left(\sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I \right)$$



sčítaním všetkých N rovníc:

$$\mathbf{F}_i = \sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I$$

2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

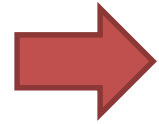
N rovníc:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$



$$\mathbf{F}_i = \sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I$$

sčítaním všetkých N rovníc:



$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \left(\sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I \right)$$

ale



$$\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I = \mathbf{0}$$

2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

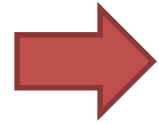
N rovníc:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$



$$\mathbf{F}_i = \sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I$$

sčítaním všetkých N rovníc:

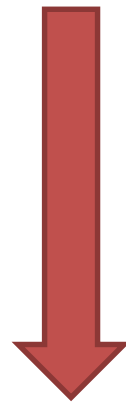


$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \left(\sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I \right)$$

ale



$$\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I = \mathbf{0}$$



$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^E$$

2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

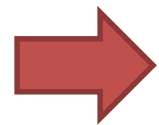
N rovníc:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$



$$\mathbf{F}_i = \sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I$$

sčítaním všetkých N rovníc:



$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \left(\sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I \right)$$

ale



$$\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I = \mathbf{0}$$

nazýva sa Newtonovou pohybovou rovnicou celej sústavy a vystupujú v nej len vonkajšie (externé) sily

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^E$$

2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

N rovníc:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$

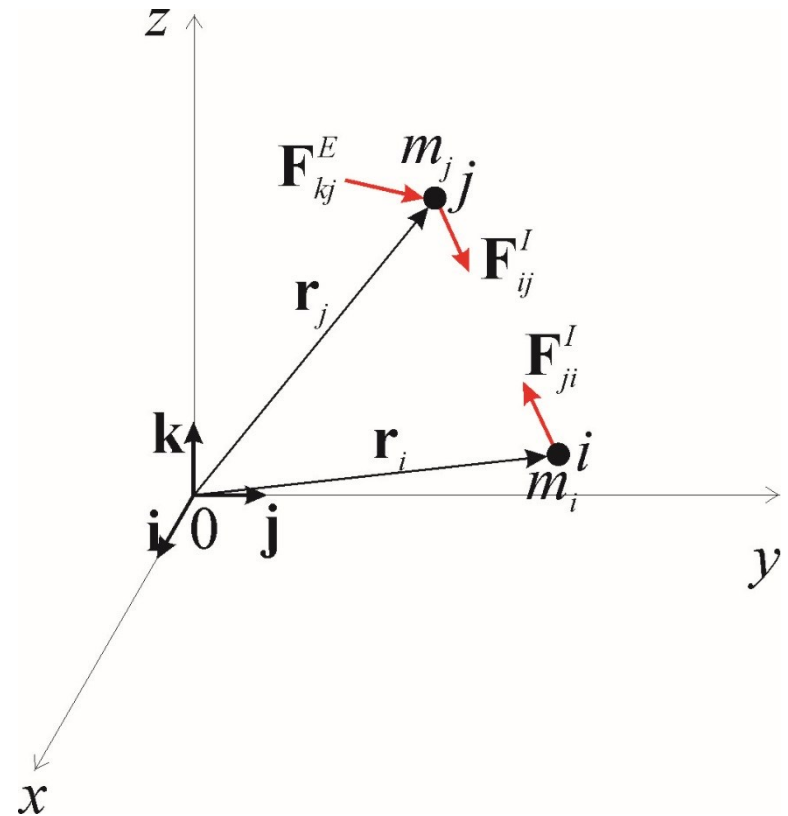
2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

N rovníc:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$

i -ty bod vektorovo vynásobíme zľava:

$$\mathbf{r}_i \times$$



2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

N rovníc:

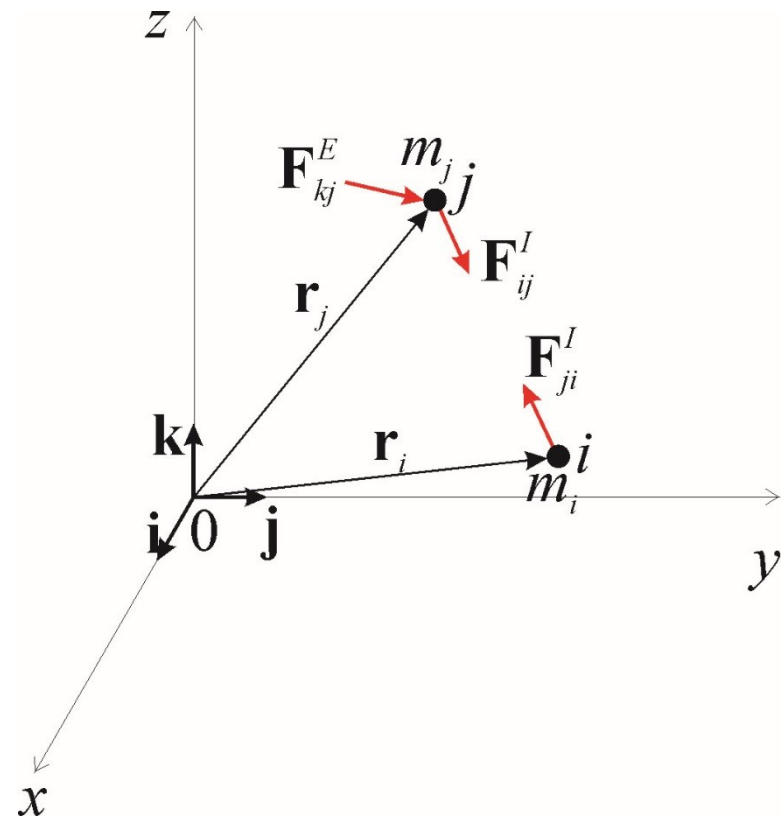
$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$



$$\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$

i -ty bod vektorovo vynásobíme zľava:

$$\mathbf{r}_i \times$$



2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

N rovníc:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$



$$\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad i = 1, 2, \dots$$

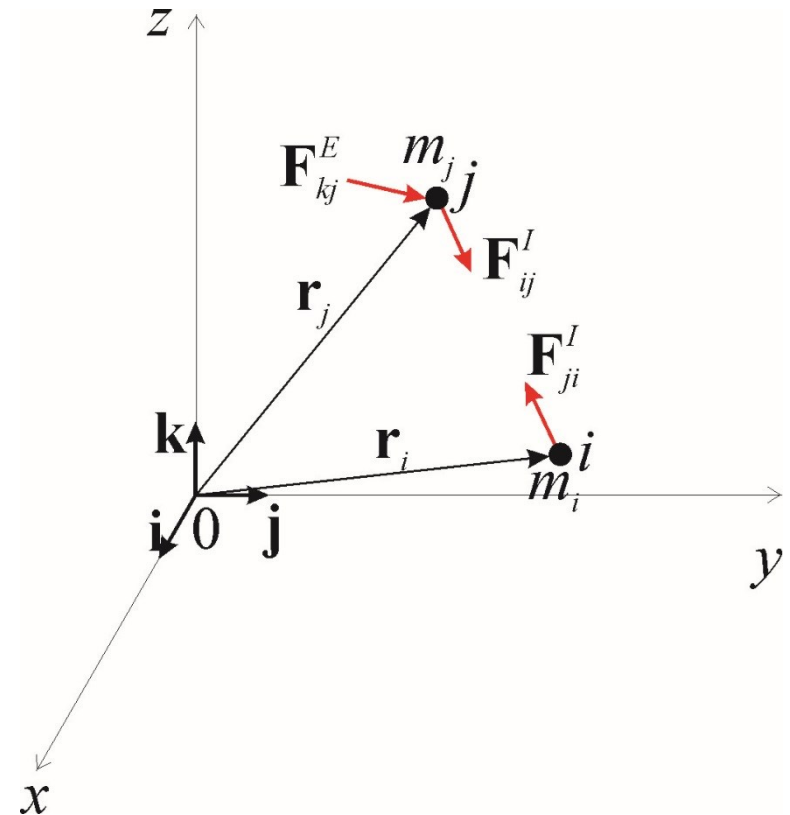


sčítaním N rovníc

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

i -ty bod vektorovo vynásobíme zľava:

$$\mathbf{r}_i \times$$



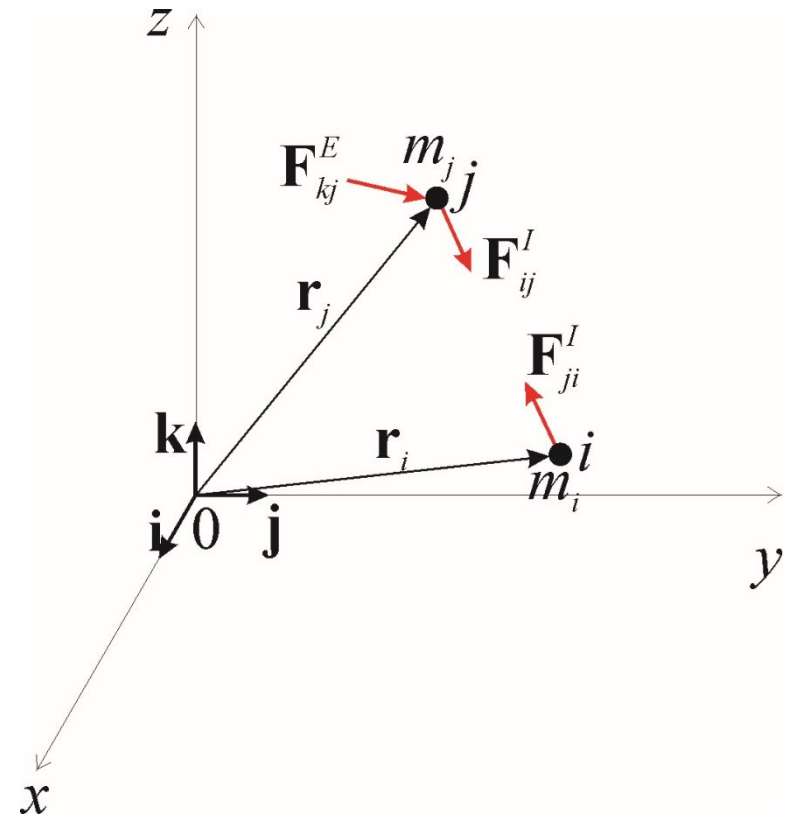
2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$



pravú stranu je možné upraviť nasledovne

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I \right) \\ &= \sum_i \sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^I \end{aligned}$$



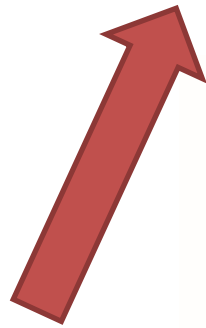
2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$



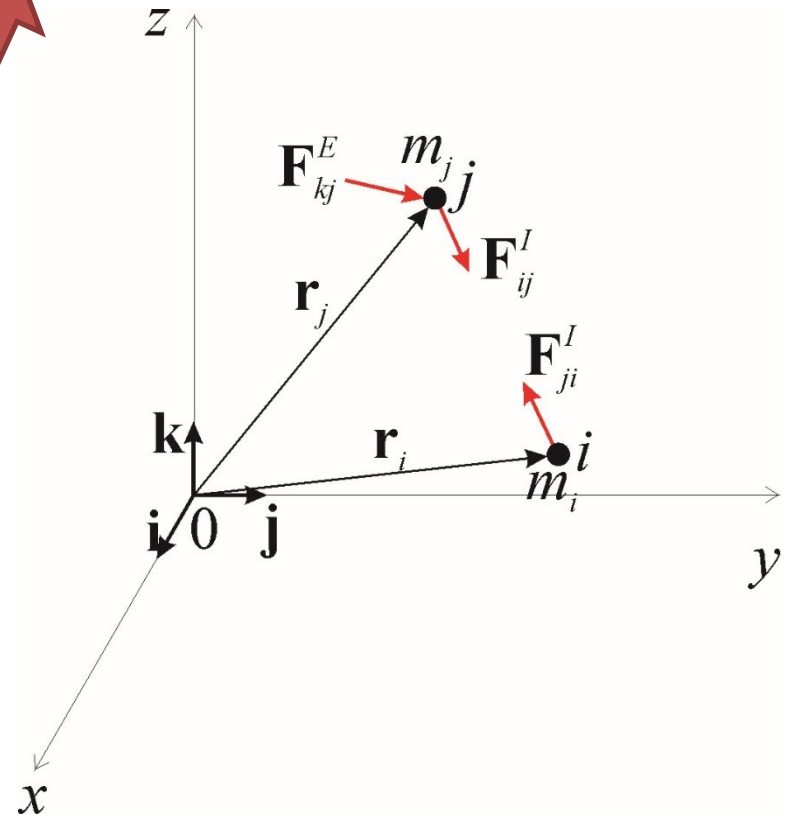
pravú stranu je možné upraviť nasledovne

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I \right) \\ &= \sum_i \sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^I \end{aligned}$$



majú rovnako veľký otáčavý účinok (moment) ale opačne orientovaný, takže platí:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^I + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}^I = \mathbf{0}$$



2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$



pravú stranu je možné upraviť nasledovne

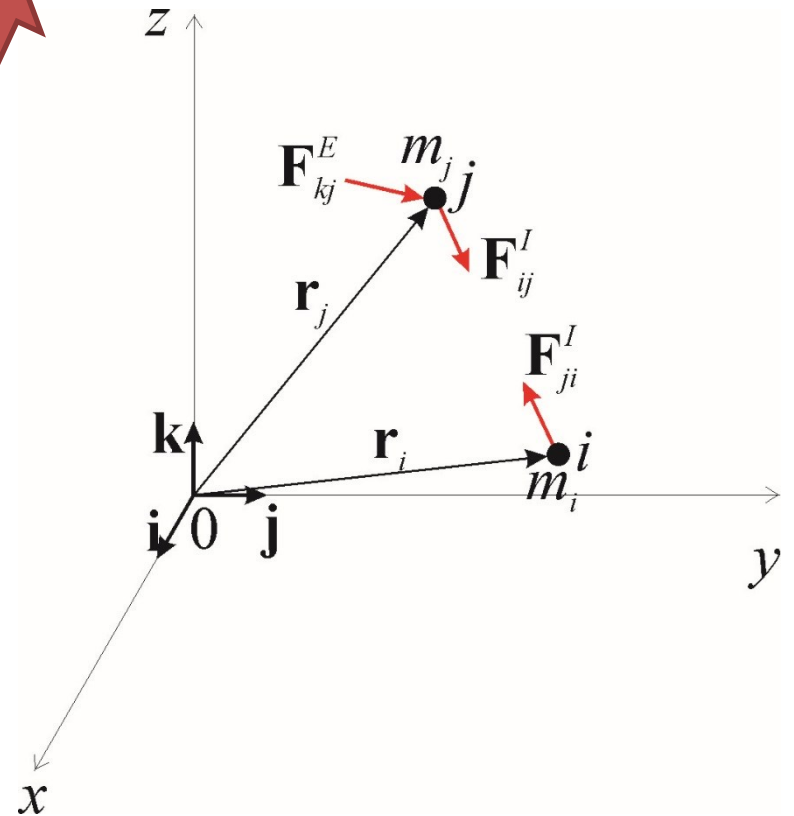
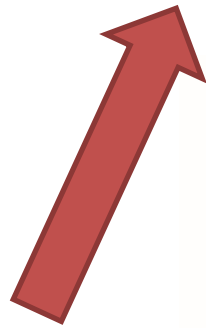
$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I \right) \\ &= \sum_i \sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^I \end{aligned}$$

potom:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^E$$

majú rovnako veľký otáčavý účinok (moment) ale opačne orientovaný, takže platí:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^I + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}^I = \mathbf{0}$$



2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

majú rovnako veľký otáčavý účinok (moment) ale opačne orientovaný, takže platí:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

pravú stranu je možné upraviť nasledovne

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\sum_k \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^I \right) \\ &= \sum_i \sum_k \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki}^E + \sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^I \end{aligned}$$

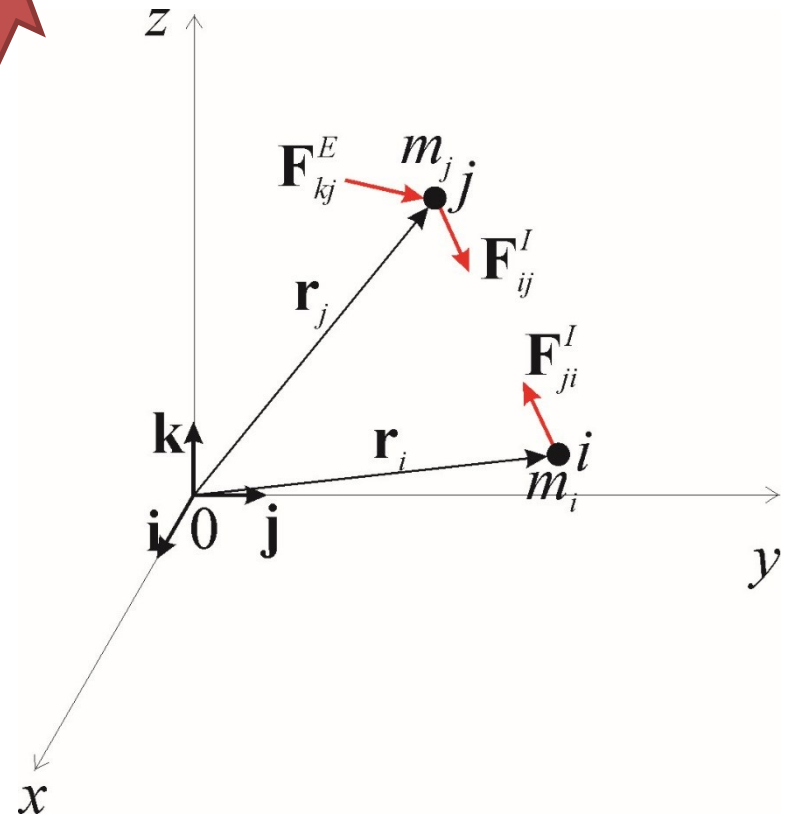
potom:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^E$$

resp.:

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{M}_{i0}^E$$

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^I + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}^I = \mathbf{0}$$



2. Newtonove pohybové zákony pre SHB

- pohybové rovnice (silové aj momentové) pre jednotlivé hmotné body ale aj pre celú sústavu môžeme rozpísať do jednotlivých skalárnych zložiek

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^E$$

$$\sum_i m_i a_{ix} = \sum_i F_{ix}^E$$

$$\sum_i m_i a_{iy} = \sum_i F_{iy}^E$$

$$\sum_i m_i a_{iz} = \sum_i F_{iz}^E$$

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{M}_{i0}^E$$

$$\sum_i (y_i m_i a_{iz} - z_i m_i a_{iy}) = \sum_i M_{ix}^E$$

$$\sum_i (z_i m_i a_{ix} - x_i m_i a_{iz}) = \sum_i M_{iy}^E$$

$$\sum_i (x_i m_i a_{iy} - y_i m_i a_{ix}) = \sum_i M_{iz}^E$$

3. Základné vety dynamiky

SHB

Tabuľa

- Príklad – Newtonove pohyb. rovnice SHB
- Stred hmotnosti SHB
- Hybnosť SHB
- Moment hybnosti SHB
- Kinetická energia SHB
- Celková práca