

9. Namáhanie krútením

9.1 Pojem krútenia

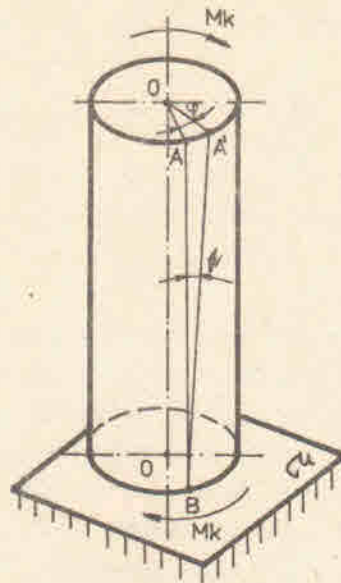
Krútenie je spôsob namáhania, pri ktorom výslednica vnútorných síl tvorí dvojicu síl ležiacu v reze kolmom na os skrúcovanej tyče. Praktickým príkladom je krútenie hriadeľov a tyčí točivých strojov, náprav vozidiel a pod. Problém krútenia je jednoducho riešiteľný pre tyče s hriadele kruhového a medzikruhového prierezu. Krútenie štvorcových, obdĺžnikových a tenkostenných valcovaných profilov je omnoho zložitejší problém, ktorým sa vzhľadom na určený rozsah tohto skriptu podrobnejšie zaoberať nebudeme. Čitateľom odporúčame pozrieť zodpovedajúce normy alebo inú literatúru uvedenú v závere skriptu.

9.2 Krútenie hriadeľov a tyčí kruhového prierezu

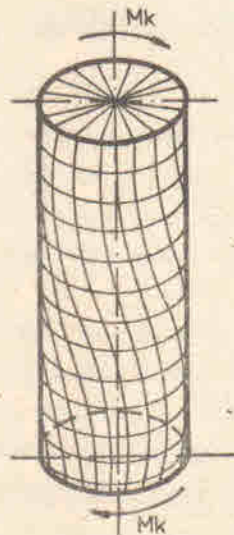
Pojem hriadeľa od pojmu tyče sa líši v tom, že hriadeľ na rozdiel od tyče vykonáva točivý pohyb, pri ktorom prenáša určený krútiaci moment od hnacieho člena k poháňaným prvkom stroja. Metóda riešenia úlohy je však rovnaká. Pri krútení konštrukčných prvkov nás zaujíma priebeh krútiacich momentov v jednotlivých prierezoch po dĺžke hriadeľa, ako aj jeho deformácia.

Uvažujme kruhový valec, ktorého spodný koniec je chytený v nehybnej rovine π a ktorého voľný koniec je zaťažený dvojicou síl s momentom M_k (obr. 9.1). Ak narýsujeme na plášti valca pred jeho skrútením sieť sústavy rovnako vzdialených kružníc, povrchových priamok a polomery na čelnom priereze, možno po skrútení, ak je uhol skrútenia φ malý (obr. 9.2), pozorovať, že:

1. os prúta zostáva priama,
2. všetky povrchové priamky sa natočia o rovnaký uhol μ ,
3. čelné prierezy zostanú rovinné a obrisy žiadneho z prierezov sa nekrivia (kružnice zostávajú kružnicami s rovnakou dĺžkou polomeru ako pred skrútením,
4. vzdialenosť medzi súmedznými prierezmi sa nemení,
5. sprievodiče povrchových priamok na čelnom priereze sa natočia o rovnaký uhol φ a zostanú priame.



Obr. 9.1
Krútenie kruhového prierezu



Obr. 9.2
Deformácia povrchových priamok

Tieto experimentálne poznatky dávajú podklad pre prijatie týchto hypotéz:

1. všetky prierezy zostávajú po skrútení tyče rovinné,
2. polomery v týchto prierezoch sa nemenia,
3. vzdialenosť medzi jednotlivými prierezmi sa skrútením tyče nemení.

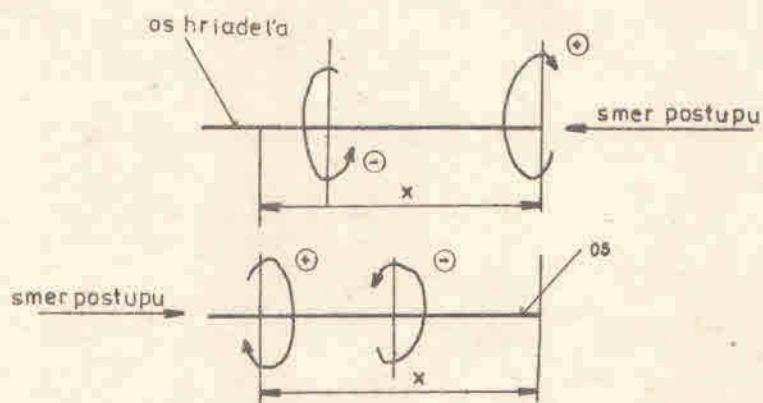
Prijateľnosť týchto hypotéz je potvrdená tým, že na nich založené vzorce sa dobre zhodujú a výsledkami skúšok.

Ako stanovujú uvedené hypotézy, pri krútení nedochádza k zmene rozmerov valca ani v jednom smere. To znamená, že vo valci nedochádza ku vzniku normálových napätí. Vplyvom natočenia jednotlivých priereзов voči sebe budú v nich pôsobiť šmykové napätia.

9.3 Priebeh krútiacich momentov

Na určenie nebezpečného prierezu a na dimenzovanie prierezu potrebujeme určiť priebeh vnútorných krútiacich momentov po dĺžke hriadeľa. Krútiaci moment v myšlenom reze určíme metódou myšleného rezu podľa definície:

Vnútorný krútiaci moment v ľubovoľnom reze sa rovná algebrickému súčtu vonkajších krútiacich momentov z jednej strany od toho rezu. Za kladný pritom považujeme ten vonkajší krútiaci moment, ktorý v smere postupu točí v zmysle pohybu hodinových ručičiek (obr. 9.3).



Obr. 9.3

Voľba zmyslu krútiacich momentov

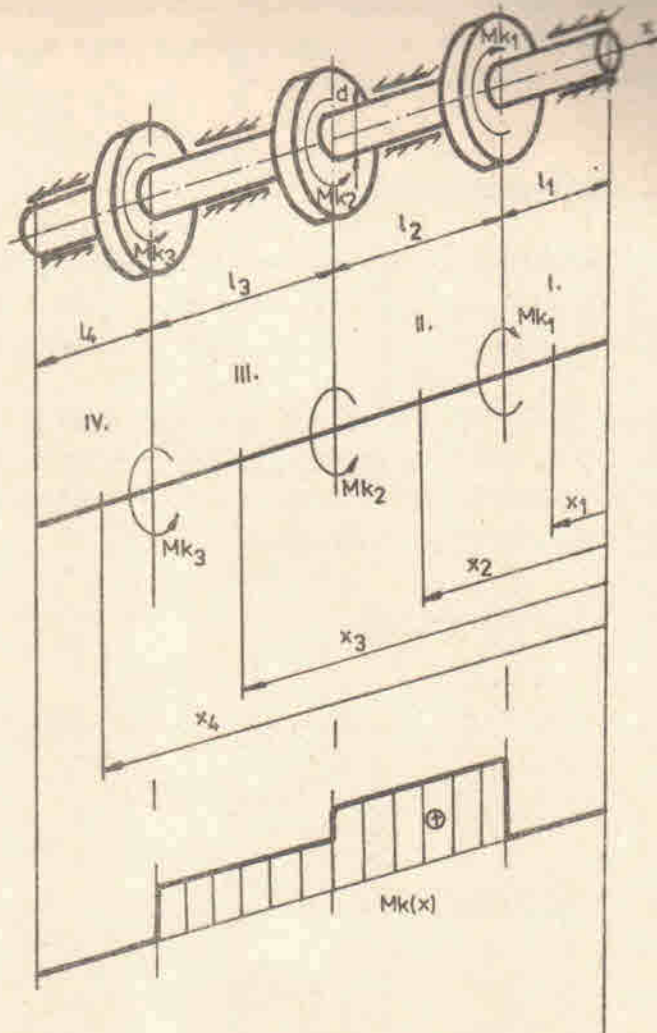
Příklad 1

Určite priebeh krútiacich momentov hriadeľa zaraženého a uloženého podľa obr. 9.4, ak trenie v ložiskách zanedbáme. Dané je $M_{k1} = 500 \text{ Nm}$, $M_{k2} = 200 \text{ Nm}$, $M_{k3} = 300 \text{ Nm}$.

Riešenie

Skutočnosť, že krútiaci moment na hriadeľ privedený je cez ozubený alebo iný prevod odovzdaný hlavným prvkom stroja, možno vyjadriť statickou podmienkou rovnováhy vonkajších krútiacich momentov točiacich okolo osi x

$$\sum M_{kx} = 0 : M_{k1} - M_{k2} - M_{k3} = 0 = 500 - 300 - 200 = 0$$



Obr. 9.4
Pribeh krútiacich momentov

Vzhľadom na nespojitosť zaraženia hriadeľa volíme úseky I až IV, v ktorých urobíme myslené rezy. Podľa definície určíme vnútorné krútiace momenty:

Úsek I. $x_1 \in (0, l_1)$
 $Mk(x_1) = 0$

Úsek II. $x_2 \in (l_1, l_1+l_2)$
 $Mk(x_2) = Mk_1 = 500 \text{ Nm}$

Úsek III. $x_3 \in (l_1+l_2, l_1+l_2+l_3)$
 $Mk(x_3) = Mk_1 - Mk_2 = 500 - 200 = 300 \text{ Nm}$

Úsek IV. $x_4 \in (l_1+l_2+l_3, l_1+l_2+l_3+l_4)$
 $Mk(x_4) = 500 - 200 - 300 = 0$

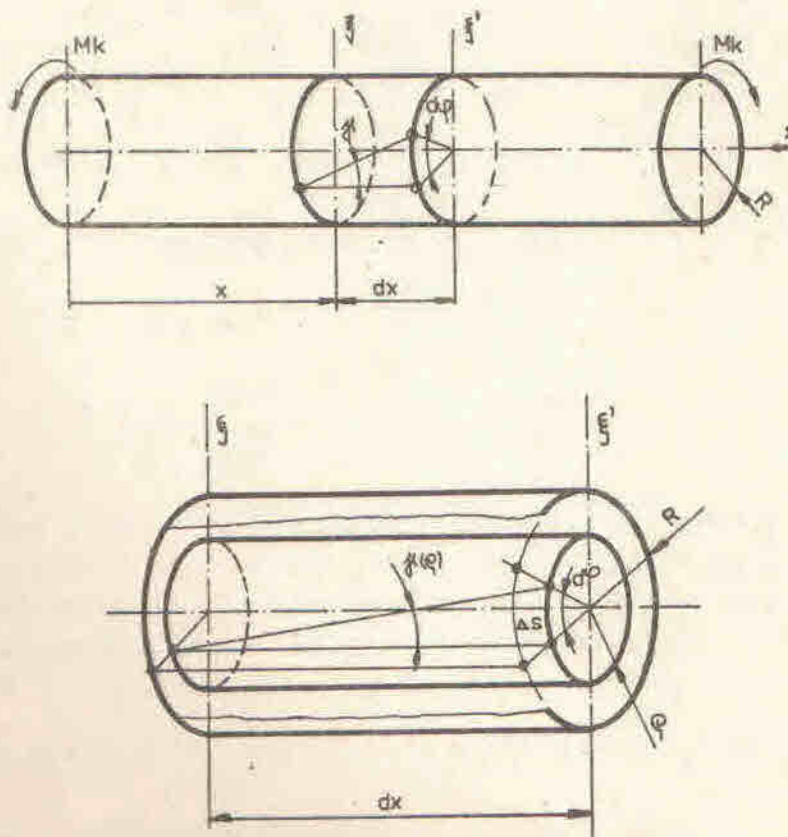
Rovnice krútiacich momentov sú rovnicami priamky rovnobežnej s osou x a sú znázornené na obr. 9.4. Z priebehu krútiacich momentov $M_k(x)$ vidieť, že najviac namáhaný je II. úsek hriadeľa.

9.4 Napätie a deformácia skrúcaných prvkov kruhového prierezu

Pri určovaní šmykového napätia v myšlených rezoch, kolmých na os hriadeľa, budeme vychádzať z Hookovho zákona pre šmykové napätie

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (9-1)$$

Najprv však potrebujeme určiť pomerné skosenie γ . Dvoma myšlenými rezmi, vzdialenými od seba o hodnotu dx , vyberieme z tyče polomeru R element (obr. 9.5a) a z neho ďalší element polomeru ρ (obr. 9.5b).



Obr. 9.5a, 9.5b
Deformácia

Keď r' sa oproti rezu r natočí o uhol skrútenia $d\varphi$. Dĺžku oblúka natočenia Δs na polomere ρ môžeme určiť

$$\Delta s = \rho \cdot d\varphi = \gamma(\rho) \cdot dx$$

Odtiaľ pomerne skosenie na polomere ρ bude

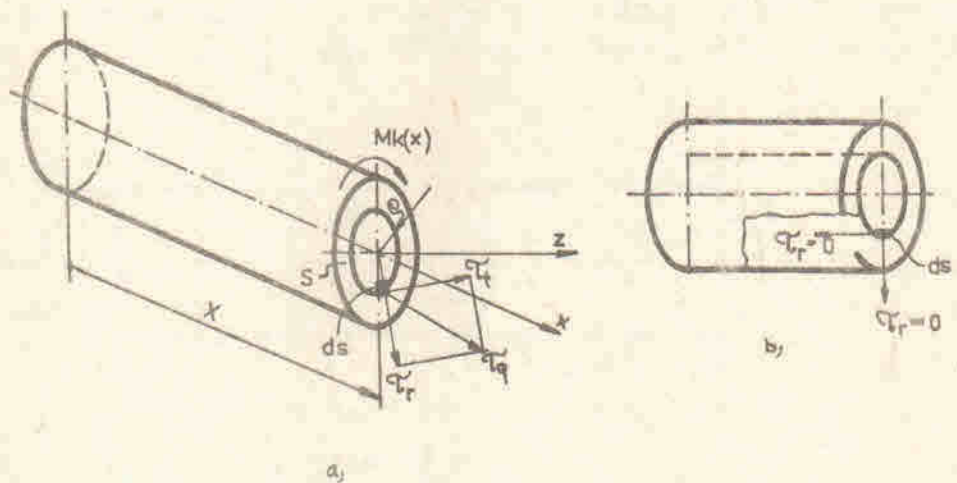
$$\gamma(\rho) = \rho \cdot d\varphi / dx = \rho \cdot \vartheta \quad (9-3)$$

kde $\vartheta = \frac{d\varphi}{dx}$ je pomerný uhol skrútenia.

Napätie na polomere ρ potom je

$$\tau(\rho) = G \cdot \gamma(\rho) = G \cdot \rho \cdot \vartheta \quad (9-4)$$

Pretože ϑ je tiež neznáme, doplníme rovnicu (9-4) statickou podmienkou rovnováhy medzi vonkajšími a vnútornými silami v myšlenom reze (obr. 9.6a).



Obr. 9.6

Šmykové napätie

Pretože priečne rezy zostávajú pri deformácii rovinné, nedochádza ku vzájomnému posuvu valcových rezov tyče. Možno preto predpokladať, že združené šmykové napätie $\tau_r = 0$ a výsledné šmykové napätie na ploške ΔS je $\tau(\rho) = \tau_t$ (leží na dotyčnici ku kružnici s polomerom ρ).

Potom

$$\sum M_x = 0 : M_k(x) - \int_S \tau(\rho) \cdot ds \cdot \rho = 0 \quad (9-5)$$

Dosadením z rovnice (9-4) za $\tau(\rho)$ dostaneme:

$$M_k(x) = \int_S G \cdot \rho \cdot \vartheta \cdot \rho \cdot ds = G \cdot \vartheta \int_S \rho^2 ds = G \cdot \vartheta \cdot J_p \quad (9-6)$$

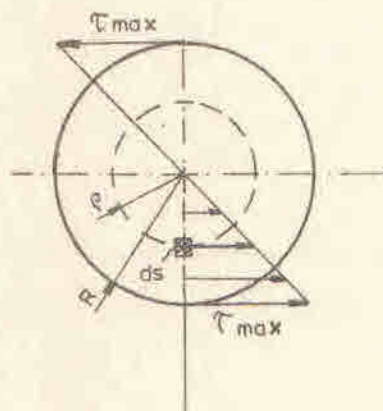
Odtiaľ

$$\vartheta = \frac{M_k(x)}{G \cdot J_p} \quad (9-7)$$

resp. po dosadení do (9-4)

$$\tau(\rho) = G \cdot \rho \cdot \frac{Mk(x)}{G \cdot J_p} = \frac{Mk(x)}{J_p} \cdot \rho \quad (9-8)$$

Pretože krútiaci moment $Mk(x)$ a polárny moment zotrvačnosti J_p je pre daný prierez konštantný, šmykové napätie v myslenom reze je priamo úmerné polomeru ρ . Jeho priebeh po kruhovom priereze je znázornený na obr. 9.7.



Obr. 9.7

Napätie v kruhovom priereze

Maximálne napätie je na povrchu tyče ($\rho = R$)

$$\tau_{\max} = [\tau(\rho)]_{\rho=R} = \frac{Mk(x)}{J_p} \cdot R = \frac{Mk(x)}{J_p/2} = \frac{Mk(x)}{W_k} \quad (9-9)$$

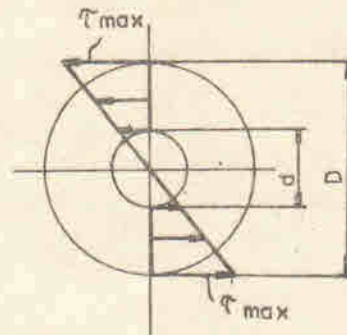
Číselníka W_k sme zaviedli prierezový modul tyče (hriadeľa) v krútení. Pre kruhový priemer

$$W_k = \frac{J_p}{R} = \frac{\frac{\pi \cdot D^4}{32}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \approx 0,2 D^3 \quad [m^3] \quad (9-10)$$

Pre vzdziakruhový prierez

$$W_k = \frac{J_p}{R} = \frac{\frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]}{\frac{D}{2}} \approx 0,2 \cdot D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] \quad (9-11)$$

Z rozloženého napätia po kruhovom priereze vidíme, že materiál vo vnútri prierezu nie je pevnostne využitý. Preto je výhodnejšie navrhovať hriadele vzdziakruhového prierezu, pre ktorý priebeh napätia je nakreslaný na obr.



Obr. 9.8

Napätie v medzikruhovom priereze

V prípadoch, kde zmenšenie vlastnej tiaže súčiastky má veľký význam, odporúča sa navrhovať hriadele medzikruhového prierezu.

Pevnostná podmienka pri návrhu skrúcaných tyčí bude mať tvar

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{dov}} \quad (9-12)$$

kde τ_{\max} je šmykové napätie na obvode nebezpečného prierezu. V nebezpečnom priereze je $M_k(x) = M_{k\max}$, potom

$$\frac{M_{k\max}}{W_k} \leq \tau_{\text{dov}} \quad (9-13)$$

Pre plný kruhový prierez možno určiť vyžadovaný priemer d , keď dosadíme za $W_k = 0,2 d^3$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{k\max}}{0,2 \cdot \tau_{\text{dov}}}} \quad (9-14)$$

Celkový uhol skrútenia tyče možno určiť zo vzťahu (9-7)

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k(x)}{G \cdot J_p} \quad (9-15)$$

$$\Rightarrow \varphi = \int_l \vartheta dx = \int_l \frac{M_k(x)}{G \cdot J_p} dx \quad (9-16)$$

Ak je priebeh $M_k(x) = M_k$ po dĺžke tyče konštantný vrátane konštantnosti tuhosti v krútení $G \cdot J_p$, celkový uhol skrútenia bude

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot J_p} \quad (9-17)$$

9. Energia napätosti pri krútení

Pretože pri krútení vzniká v myslenom reze šmykové napätie, celkovú energiu napätosti určíme zo vzťahu

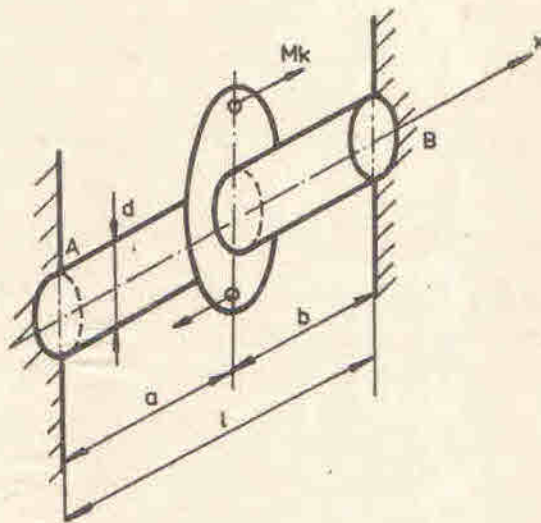
$$\begin{aligned}
 A &= \int_V \frac{1}{2} \tau(\rho) \cdot \rho(\rho) dV = \int_V \frac{1}{2G} \tau^2(\rho) \cdot dS \cdot dx = \\
 &= \int_S \int_l \frac{1}{2G} \cdot \frac{M_k^2(x)}{J_p^2} \cdot \rho^2 \cdot dS \cdot dx = \int_l \left[\frac{M_k^2(x)}{2G \cdot J_p^2} \left(\int_S \rho^2 \cdot dS \right) \right] dx = \\
 &= \int_l \frac{M_k^2(x)}{2G \cdot J_p} dx \qquad (9-18)
 \end{aligned}$$

Pre prípad tyče konštantného prierezu namáhanej konštantným krútiacim momentom $M_k(x) = M_k$ dostaneme energiu napätosti z (9-18) v tvare

$$A = \frac{M_k^2 \cdot l}{2G \cdot J_p} \qquad (9-19)$$

9.6 Staticky neurčité úlohy pri krútení

Skrucovaná tyč je uložená staticky neurčito, ak väzby odoberajú viac stupňov voľnosti, ako ich má samotná tyč. V našom prípade, ak je tyč votknutá na oboch koncoch (obr. 9.9), väzby odoberajú 12 stupňov voľnosti v priestore, zatiaľ čo tyč ich má len 6.



Obr. 9.9
Príklad

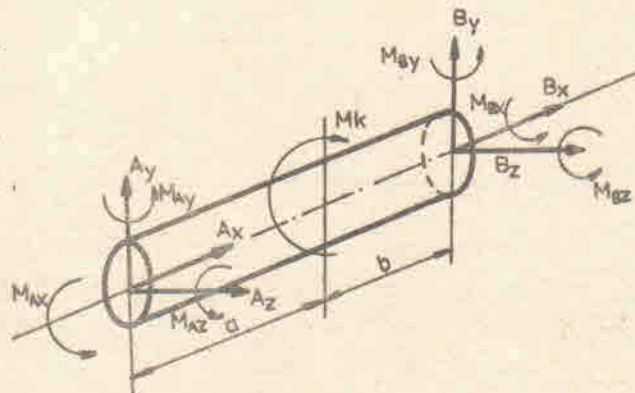
Teoreticky je takáto úloha 6-krát staticky neurčitá. Prakticky však ide len o úlohu raz staticky neurčitú (staticky neurčitou veličinou je väzbový krútiaci moment buď v jednej, alebo v druhej väzbe), pretože ostatné zložky väzbových reakcií na základe zákona akcie a reakcie musia byť rovné nule.

Postup riešenia staticky neurčitých úloh v krútení je rovnaký ako pri iných druhoch namáhania. Úlohu riešime tak, že statické podmienky rovnováhy doplníme deformačnou podmienkou pre celkový uhol skrútenia. Deformačnú podmienku vyjadríme 2. Castiglianovou vetou alebo metódou porovnávania deformácie.

Príklad 2

Určite priebeh krútiacich momentov pre skrúcovanú tyč podľa obr. 9.9, keď je dané: M_k , G , J_p , l , a , b .

Po odstránení väzieb (obr. 9.10) je zrejmé, že nenulové väzbové reakcie sú momenty M_{Ax} a M_{Bx} .



Obr. 9.10
Väzbové reakcie

Zo statickej podmienky rovnováhy krútiacich momentov okolo osi x vyplýva:

$$\sum M_{kx} = 0 : M_{Ax} + M_{Bx} + M_k = 0 \quad (9-20)$$

Pretože v (9-20) máme dve neznáme, musíme napísať ďalšiu dopĺňujúcu rovnicu vyjadrujúcu deformačnú podmienku.

Napr. je zrejmé, že celkový uhol skrútenia v reze B je nulový

$$\varphi_B = 0$$

Podľa druhej Castiglianovej vety platí:

$$\varphi_B = \frac{\partial A}{\partial M_{Bx}} = 0$$

Celková energia napätosti podľa (9-18) je

$$A = \frac{1}{2GJ_p} \int_l M_k^2(x) dx$$

Priebeh krútiacich momentov je znázornený na obr. 9.11.

Úsek č. I:

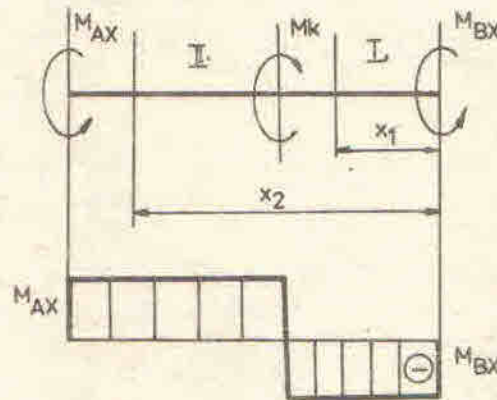
$$x_1 \in (0, b)$$

$$M_k(x_1) = -M_{Bx}$$

Úsek č. II:

$$x_2 \in (b, l)$$

$$M_k(x_2) = -M_{Bx} + M_k$$



Obr. 9.11
Príklad

Energia napätosti tyče bude rovná súčtu energie napätosti jej úsekov

$$A = A_I + A_{II} = \frac{1}{2GJ_p} \left[\int_0^b M_k^2(x_1) \cdot dx_1 + \int_b^l M_k^2(x_2) \cdot dx_2 \right]$$

Vyjadrením druhej Castiglianovej vety dostaneme:

$$\varphi_B = \frac{1}{G \cdot J_p} \left[\int_0^b M_k(x_1) \frac{\partial M_k(x_1)}{\partial M_{Bx}} dx_1 + \int_b^l M_k(x_2) \frac{\partial M_k(x_2)}{\partial M_{Bx}} dx_2 \right] = 0$$

Dosadením za momenty a ich parciálnej derivácie dostaneme:

$$\int_0^b (-M_{Bx})(-1) dx + \int_b^l (-M_{Bx} + M_k)(-1) dx_2 = 0$$

$$M_{Bx} \cdot b + M_{Bx} \cdot a - M_k \cdot a = 0$$

$$M_{Bx} = M_k \frac{a}{l}$$

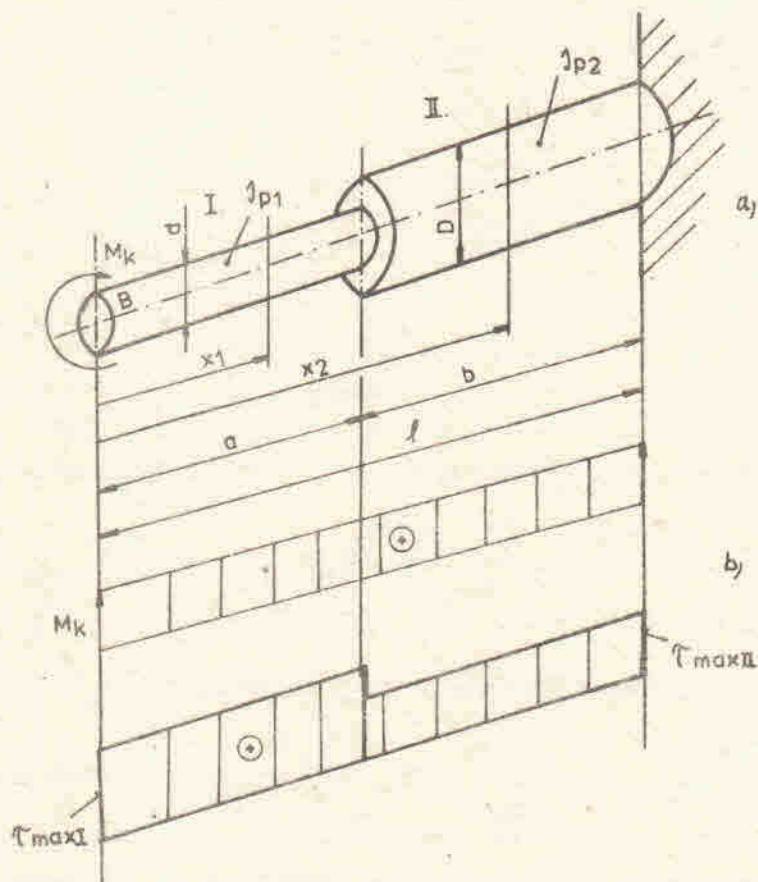
(9-21)

Priebeh krútiacich momentov je zhodný s obr. 9.11 s tým, že za M_{Bx} dosadíme konkrétnu vypočítanú hodnotu (9-21). (Z rovnice (9-20) je zrejmä aj hodnota momentu M_{Ax}).

9.7 Riešené príklady ku kap. 9

Príklad 1

Votknutá tyč odstupňovaného prierezu je na voľnom konci skrúcovaná krútiacim momentom M_k (obr. 9.12a). Určite priebeh krútiacich momentov $M_k(x)$, maximálne šmykové napätie, ako aj celkový uhol skrútenia prierezu na voľnom konci tyče. Dané je: $M_k, J_{p1}, J_{p2}, d, D, a, b, l$.



Obr. 9.12

Príklad

Riešenie

Ide o staticky určitú úlohu. Vzhľadom na nespojitosť prierezu tyče zvolíme na nej dva úseky. V každom úseku vedieme jeden myslený rez, v ktorom podľa definície určíme veľkosť vnútorného krútiaceho momentu:

I. $x_1 \in (0, a)$

$$M_k(x_1) = M_k = \text{const}$$

$$\tau_{\max I} = \frac{M_k(x_1)}{W_{kI}} = \frac{M_k}{0,2 d^3}$$

II. $x_2 \in (a, l)$

$$M_k(x_2) = M_k = \text{const}$$

$$\tau_{\max II} = \frac{M_k(x_2)}{W_{kII}} = \frac{M_k}{0,2 D^3}$$

Priebeh krútiacich momentov a šmykového napätia je znázornený na obr. 9.12b. Z obrázku je zrejmé, že najviac namáhaná je časť tyče v priereze d. Porucha takejto tyče spravidla nastane v mieste zmeny prierezu v dôsledku koncentrácie napätia. Celkový uhol skrútenia v priereze B bude

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \int_0^l \frac{M_k(x)}{G J_p} dx = \int_0^a \frac{M_k(x_1)}{G J_{p1}} dx_1 + \int_a^l \frac{M_k(x_2)}{G J_{p2}} dx_2 = \\ &= \frac{M_k \cdot a}{G J_{p1}} + \frac{M_k \cdot b}{G J_{p2}} \end{aligned}$$

Ako vidieť, celkový uhol skrútenia na voľnom konci tyče je daný súčtom uhlov skrútenia jednotlivých častí tyče.

Příklad 2

Na konci osadeného hriadeľa je upevnené široké ozubené koleso, ktoré prenáša od pohonu výkon P [kW] pri otáčkach hriadeľa n [$\frac{1}{s}$]. Na základe zvoleného matematického modelu určite priebehy krútiacich momentov a celkový uhol skrútenia hriadeľa. Na základe analýzy výsledkov navrhnete optimálny fyzikálny model danej úlohy.

Riešenie

Pre fyzikálny model podľa obr. 9.13a možno zvoliť tri matematické abstrakcie skutočnosti, ktoré sú znázornené na obr. 9.13b.

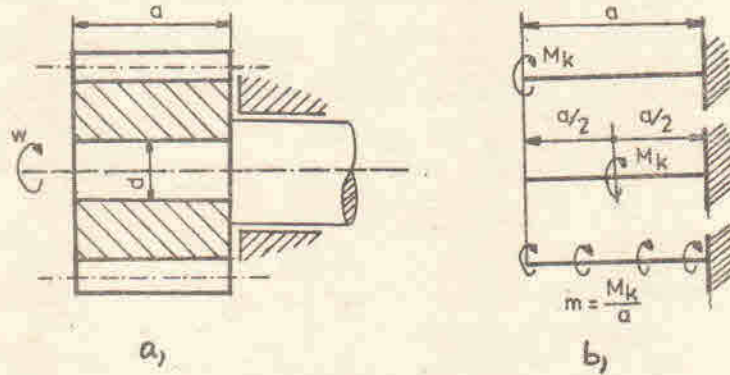
Je to opodstatnené tým, že prenos krútiaceho momentu na hriadeľ prebieha cez pomerne veľkú styčnú plochu. Preto možno zaražujúci moment zobraziť tromi naznačenými hraničnými možnosťami. Priebehy krútiacich momentov pre jednotlivé varianty sú znázornené na obr. 9.14, pričom

$$M_k = 159 \frac{P}{n} \quad [\text{Nm}]$$

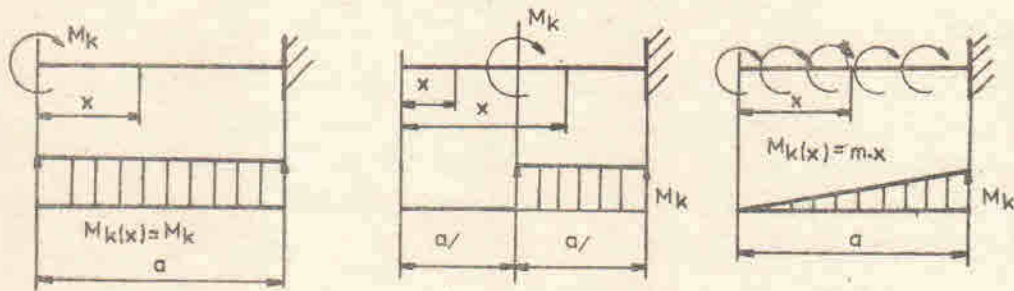
Z obr. 9.14 je zrejmé, že najpriaznivejšie je namáhaný hriadeľ podľa posledného modelu, ktorý sa najviac približuje ku skutočnosti. Priebeh krútiacich momentov pri spojitom rozložení zaraženia nás vedie k tomu, aby sme volili hriadeľ s premenlivým priemerom hriadeľa podľa vzťahu

$$\frac{M_k(x)}{0,2 \cdot d^3(x)} \leq \tau_{dov} \Rightarrow d(x) = \sqrt[3]{\frac{m \cdot x}{0,2 \cdot \tau_{dov}}}$$

Z konštrukčných dôvodov nemožno pre $x = 0$ voliť $d(x) = 0$. Podobné hriadele sú okrem krútenia spravidla namáhané aj skrihom a ohybom. Toto kombinované namáhanie potom jednoznačne stanoví veľkosť prierezu $d(x)$.

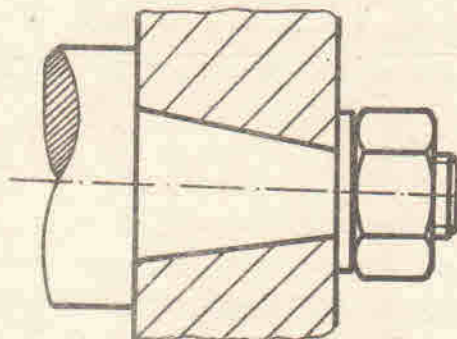


Obr. 9.13
Príklad



Obr. 9.14
Porovnanie modelov

Približné schéma možného spojenia hriadeľa s kolesom je znázornená na obr. 9.15.

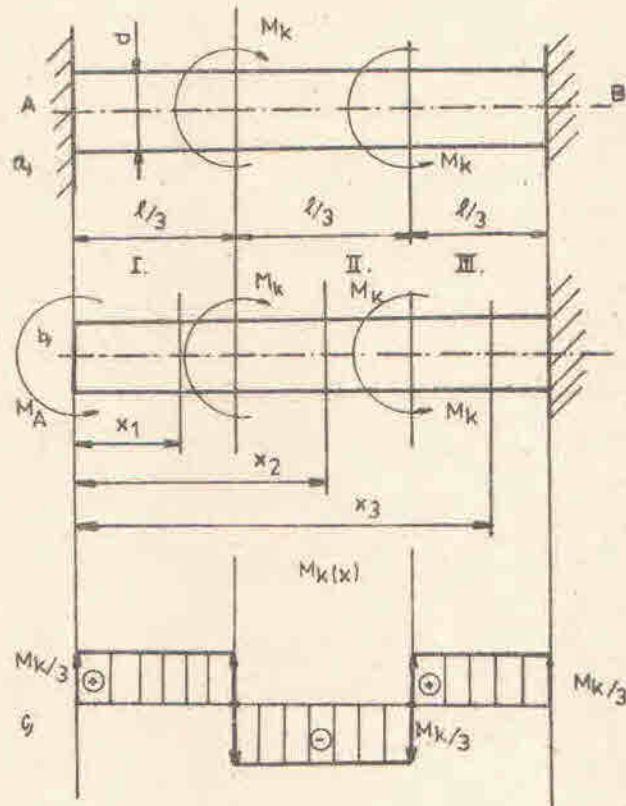


Obr. 9.15
Uloženie širokého náboja

Uhol kužela možno zvoliť tak, aby bol spoj v dôsledku trenia medzi nábojom kolesa a hriadeľa samosvorný.

Príklad 3

Určite priebeh krútiacich momentov a vypočítajte potrebný priemer hriadeľa podľa obr. 9.16a, keď je dané: M_k , l , γ_{dov} , G .



Obr. 9.16
Príklad

Riešenie

Statically neurčitú úlohu riešime tak, že jednu z väzieb odstránime (napr. v reze A) a jej účinok nahradíme staticky neurčitým krútiacim momentom M_A . Jeho smer možno zvoliť ľubovoľne. Skutočný smer M_A bude určený z riešených rovníc rovnováhy a doplňujúcej deformačnej podmienky

$$\varphi_A = \frac{\partial A}{\partial M_A} = 0$$

Energia napätosti

$$A = A_I + A_{II} + A_{III} = \frac{1}{2G \cdot J_p} \left[\int_0^{l/3} M_k^2(x_1) dx_1 + \int_{l/3}^{2l/3} M_k^2(x_2) dx_2 + \int_{2l/3}^l M_k^2(x_3) dx_3 \right]$$

resp.

$$\int_0^{l/3} M_k(x_1) \frac{\partial M_k(x_1)}{\partial M_A} dx_1 + \int_{l/3}^{2l/3} M_k(x_2) \frac{\partial M_k(x_2)}{\partial M_A} dx_2 + \int_{2l/3}^l M_k(x_3) \frac{\partial M_k(x_3)}{\partial M_A} dx_3 = 0$$

Jednotlivé krútiace momenty v zvyčajných rezačoch

I. $x_1 \in (0, l/3)$

$$M_k(x_1) = M_A$$

$$\frac{\partial M_k(x_1)}{\partial M_A} = 1$$

II. $x_2 \in (l/3, 2l/3)$

$$M_k(x_2) = M_A - M_k$$

$$\frac{\partial M_k(x_2)}{\partial M_A} = 1 - \frac{\partial M_k}{\partial M_A}$$

III. $x_3 \in (2l/3, l)$

$$M_k(x_3) = M_A - M_k + M_k$$

$$\frac{\partial M_k(x_3)}{\partial M_A} = 1$$

Potom

$$\int_0^{l/3} M_A dx_1 + \int_{l/3}^{2l/3} (M_A - M_k) dx_2 + \int_{2l/3}^l M_A dx_3 = 0$$

$$M_A \cdot \frac{l}{3} + (M_A - M_k) \cdot \frac{l}{3} + M_A \cdot \frac{l}{3} = 0$$

$$M_A = \frac{M_k}{3}$$

zakreslený na obr. 9.16c. Hriadeľ je teda momentom M_k osx = $M_k/3$.

Pribeh krútiacich momentov je namáhaný konštantou

Z pevnostnej p...

Prít
9.15

náme:

(obr. 9.17e) je namáhaný krútiacim momentom M_k . Určite krútiace momenty a skontrolujte pevnosť hriadeľa v nebezpečnom mieste. Je dané: $M_k = a, b, l$.

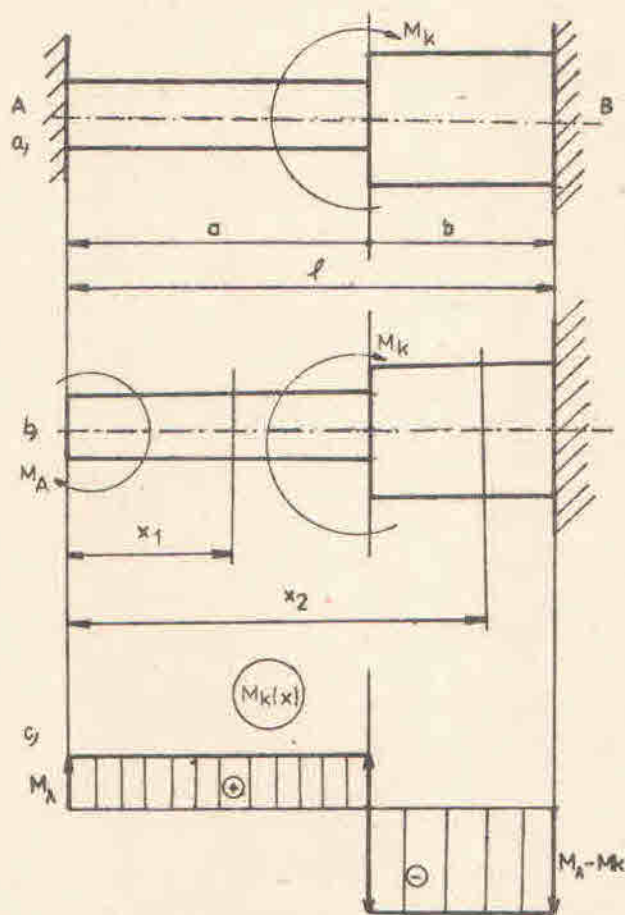
$$\tau_{p1} = \frac{M_k \cdot d^4}{32} \cdot \tau_{p2} = \frac{M_k \cdot d^4}{32}$$

Rieše

Je to
hriadeľ
ky

Vzhľadom
ky a
bude

resp.



Obr. 9.17
Príklad

Riešenie

Je to staticky neurčitá úloha krútenia. Jednu väzbu preto odstránime a nahradíme ju staticky neurčitým momentom M_A . Určíme ho z deformačnej podmienky

$$\varphi_A = \frac{\partial A}{\partial M_A} = 0$$

Vzhľadom na nespojitosť prierezu a zaťaženia, zvolíme na hriadeľi dva úseky a v nich myslené rezy (obr. 9.17b). Energia napätosti ťmykových napätí bude

$$A = A_I + A_{II} = \frac{1}{2G \cdot J_{p1}} \int_0^a M_k^2(x_1) dx_1 + \frac{1}{2G \cdot J_{p2}} \int_a^l M_k^2(x_2) dx_2$$

resp.

$$\frac{1}{J_{p1}} \int_0^a M_k(x_1) \frac{\partial M_k(x_1)}{\partial M_A} dx_1 + \frac{1}{J_{p2}} \int_a^l M_k(x_2) \frac{\partial M_k(x_2)}{\partial M_A} dx_2 = 0$$

Vyjadrením krútiacich momentov

I. $x_1 \in (0, a)$

$$M_k(x_1) = M_A$$

$$\frac{\partial M_k(x_1)}{\partial M_A} = 1$$

II. $x_2 \in (a, l)$

$$M_k(x_2) = M_A - M_k$$

$$\frac{\partial M_k(x_2)}{\partial M_A} = 1$$

a dosadením do predchádzajúcej rovnice dostaneme:

$$\frac{1}{J_{p1}} \int_0^a M_A dx_1 + \frac{1}{J_{p2}} \int_a^l (M_A - M_k) dx_2 = 0$$

$$\frac{M_A \cdot a}{J_{p1}} + \frac{(M_A - M_k) \cdot b}{J_{p2}} = 0$$

$$M_A = M_k \left[\frac{b \cdot J_{p1}}{a \cdot J_{p2} + b \cdot J_{p1}} \right]$$

Priebeh krútiacich momentov je znázornený na obr. 9.17c. Za predpokladu $a \cdot J_{p2} > b \cdot J_{p1}$ bude nebezpečný prierez v úseku č. II. Aby hriadeľ v danom úseku vyhovoval pevnostnej podmienke, musí platiť:

$$\tau_{\max II} = \frac{|M_A - M_k|}{W_{kII}} = \frac{M_k \left[\frac{a \cdot J_{p2}}{a \cdot J_{p2} + b \cdot J_{p1}} \right]}{0,2 D^3} \leq \tau_{dov}$$

Príklad 5

Navrhните medzikruhový prierez skrúcovanej tyče, keď je dané: $M_k = 10^3 \text{ Nm}$, $\tau_{dov} = 100 \text{ N/mm}^2$, $\frac{D}{d} = 2$, $l = 1 \text{ m}$ (obr. 9.18a).

Riešenie

Ľahko možno ukázať, že priebeh krútiacich momentov má charakter znázornený na obr. 9.18b. Maximálne šmykové napätie preto bude

$$\tau_{\max} = \frac{|M_k \max|}{W_k} = \frac{M_k/2}{0,2 \pi D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4 \right]}$$

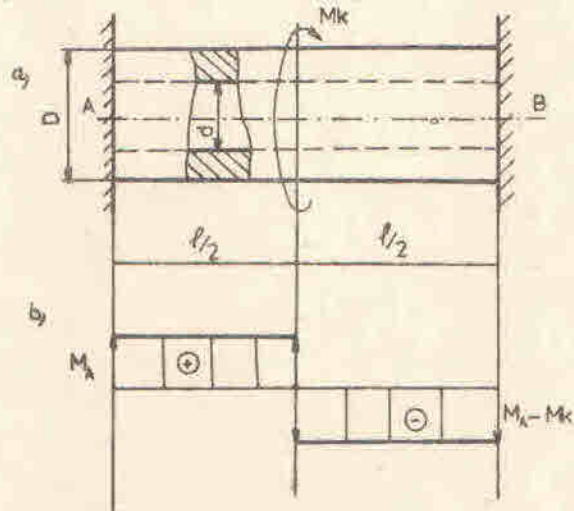
Z pevnostnej podmienky

$$\tau_{\max} \leq \tau_{dov}$$

určime priemer

$$D \approx \sqrt[3]{\frac{M_{k/2}}{0,2 \pi \cdot \tau_{\text{dov}} \cdot (1 - (\frac{1}{2})^4)}} = \sqrt[3]{\frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot \text{N mm}}{0,2 \pi \cdot 100 \cdot \text{N/mm}^2 \cdot (1 - \frac{1}{16})}}$$

$$\Rightarrow D \approx 50,3 \text{ mm}, \quad d = D/2 \approx 24,65 \text{ mm}$$



Obr. 9.18
Príklad

čledu
v danom

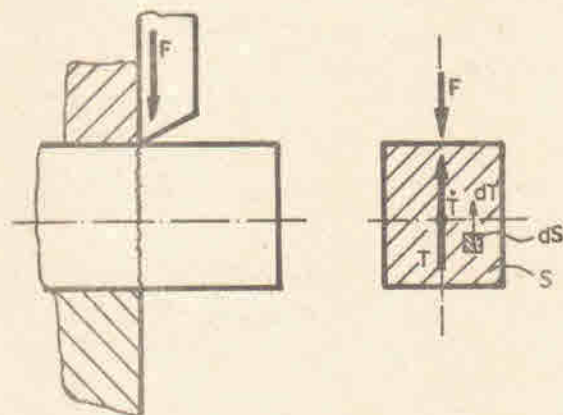
10^3 Nm ,

zornený

10. Namáhanie a strih

Uvažujme prípad strihania materiálu, obr. 10.1, strižnou silou F . V myšlienom reze vzniká výslednica vnútorných síl, ktorá musí byť v rovnováhe so strižnou silou F . Pretože výslednica vnútorných síl (nazývame ju priečnou silou), leží v reze S , na elementárnej položke dS definujeme šmykové napätie

$$\tau = \frac{dT}{dS} \quad (10-1)$$



Obr. 10.1
Strih

Podľa staršej hypotézy sú šmykové napätia rovnobežné so silou F a rovnaké vo všetkých bodoch prierezu

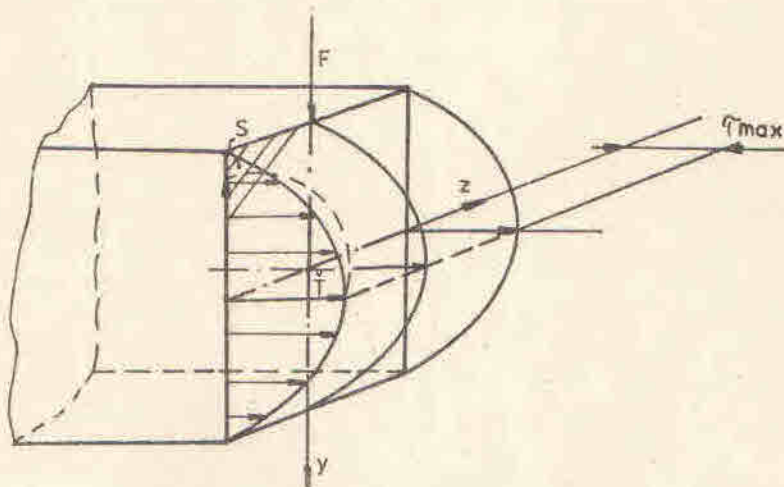
$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{F}{S} \quad (10-2)$$

Novšie hypotézy stanovujú nerovnomerné rozdelenie šmykových napätí po priereze, ktoré je závislé od tvaru prierezu. Napr. pre obdĺžnikový prierez je priebeh napätia parabolicky s max. hodnotou

$$\tau_{\max} = \frac{T}{S_{\text{red}}}; \quad S_{\text{red}} = \frac{2}{3} S \quad (10-3)$$

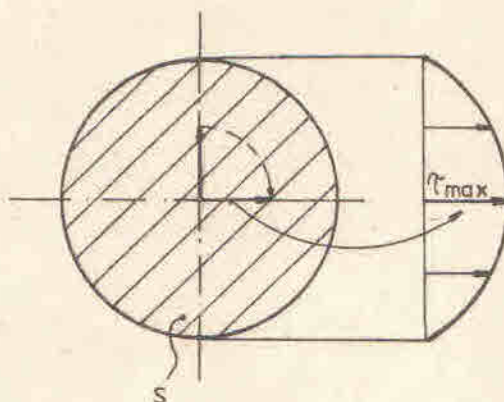
kde S_{red} je redukovaný prierez. Na obr. 10.2 je znázornený jeho priebeh vyklopený von z rezovej roviny o uhol 90° . Maximálne napätia sú teda v bodoch ležiacich na osi z . V bodoch prierezu na hornej a dolnej hrane prierezu je nulové. Pre kruhový prierez je $S_{\text{red}} = \frac{3}{4} S$ a priebeh napätia je

eliptický, obr. 10.3.



Obr. 10.2

Priebeh napätia pre obdĺžnikový prierez



Obr. 10.3

Priebeh napätia v kruhovom priereze

Predpoklad rovnomerného rozloženia šmykových napätí je splnený len v okamihu prestrihnutia, keď dosiahne napätie v každom bode prierezu hodnotu medze pevnosti v šayku. Pevnostná podmienka pri tomto druhu namáhania bude mať tvar

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{dov}} \quad (10-4)$$

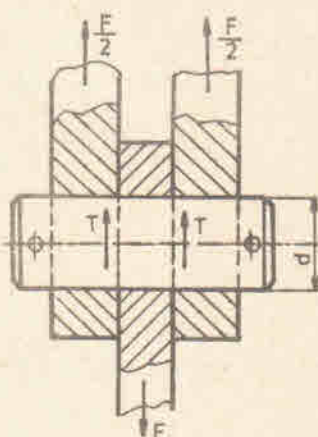
Namáhanie strihom sa najčastejšie vyskytuje pri spojovacích častiach, ako sú nitové a skrutkové spoje, zvarané spoje a pod.

Namáhanie priečnou silou je obvykle sprevádzané namáhaním ohybovým momentom, ktorým sa budeme zaoberať v ďalšej kapitole.

Príklady ku kap. 10

Príklad 1

Navrhните prierez spojovacieho kolika namáhaného strižnou silou F podľa obr. 10.4. Dané je: $F = 1000 \text{ N}$, $\tau_{\text{dov}} = 90 \text{ MPa}$.



Obr. 10.4
Príklad

Naznačené myslené rezy sú namáhané priečnou silou $T = \frac{F}{2}$. Šmykové napätie bude

$$\tau_{\text{max}} = \frac{T}{\frac{3}{4} S} = \frac{F/2}{\frac{3}{4} \pi \frac{d^2}{4}}$$

Z pevnostnej podmienky (10-4) dostaneme:

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{F}{\pi \cdot d^2} \leq \tau_{\text{dov}}$$

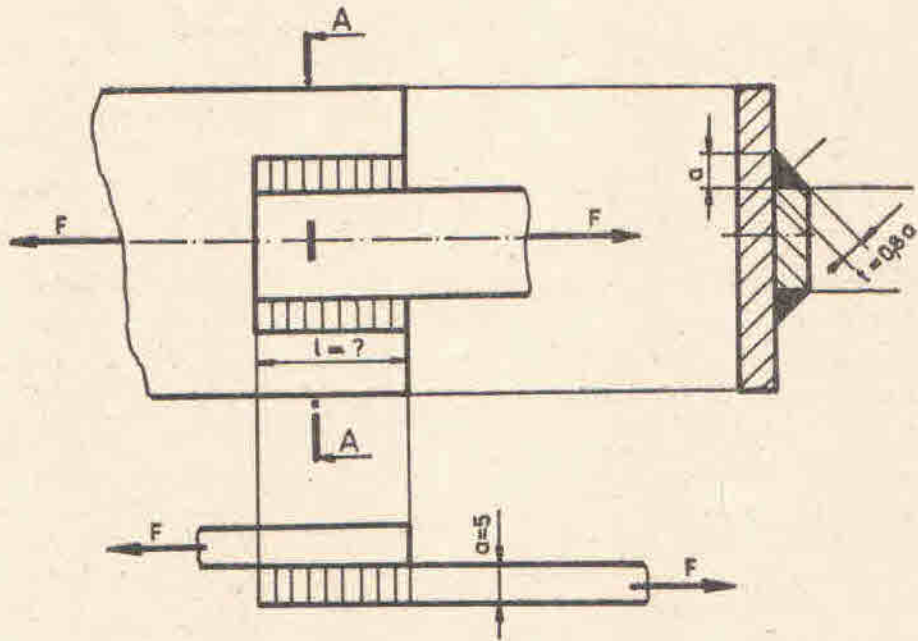
resp.

$$d \geq \sqrt{\frac{8F}{3\pi \cdot \tau_{\text{dov}}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1000}{3\pi \cdot 90}} \approx 9,71 \text{ [mm]}$$

Príklad 2

Ďahadlo je privarené dvoma kútovými zvarmi. Vypočítajte potrebnú dĺžku kútových zvarov, keď sú namáhané podľa obr. 10.5. Rezy zvarov sú namáhané priečnou silou $T = \frac{F}{2}$. Vzhľadom na možnú nerovnomernosť a nehomogénnosť zvaru budeme za namáhaný prierez zvaru považovať

$$S = l \cdot t = l \cdot 0,8 \cdot s = 4l$$



Obr. 10.5
Kontrola zváreného spoja

Šmykové napätie pre obdĺžnikový prierez

$$\tau_{\max} = \frac{T}{S_{\text{red}}} = \frac{F \cdot \frac{d}{2}}{\frac{3}{4} \cdot 4l} \leq \tau_{\text{dov}}$$

odtiaľ

$$l \geq \frac{3F}{4l \cdot \tau_{\text{dov}}}$$

podľa

napätie

žku
máhané
nosť

11. Ohyb priamych nosníkov a hriadeľov

Ohyb je taký prípad priameho namáhania, pri ktorom výslednica vonkajšieho zaraženia tvorí dvojicu síl, pôsobiacej v rovine kolmej na priečny prierez nosníka. Nosníkom modelujeme konštrukčné prvky, ktorých priečne rozmery sú oproti jeho dĺžke malé (tyče, prúty). Spojenie nosníka s rámom konštrukcie predtavujú vonkajšie väzby (podpery), ktoré odoberajú stupne voľnosti pohybu uloženému telesu. Podobne ako v predchádzajúcich prípadoch namáhania, nahradzame ich pri riešení úlohy väzbovými reakciami.

11.1 Rovinný ohyb nosníka, uloženie a zaraženie nosníka, voľba súradnicových systémov

Ak vonkajšie zaraženie pôsobiace na nosník leží v jednej rovine symetrie prierezu - rovine ohybu, hovoríme o rovinnom ohybe nosníka. Pri všeobecnom prípade ohybu pôsobí vonkajšie zaraženie v ľuvovoľných rovinách - priestorový ohyb nosníka. Pre pochopenie podstaty ohybu nosníka stačí podrobnejšie rozbrať rovinný ohyb nosníkov, ktorý je jednoduchším prípadom namáhania. Je zrejmé, že na základe zákona o superpozícii účinkov možno priestorový ohyb rozložiť, resp. zložiť z jednotlivých rovinných ohybov.

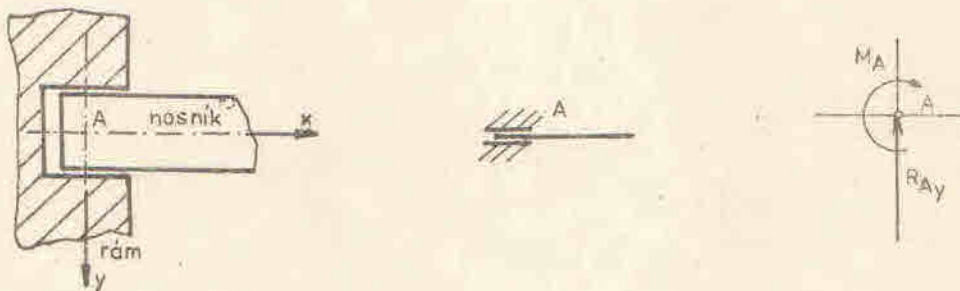
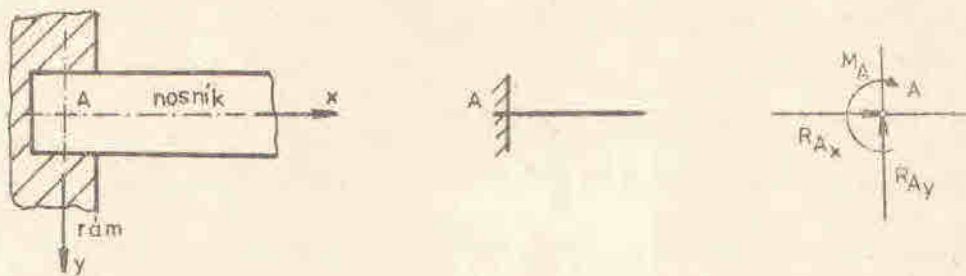
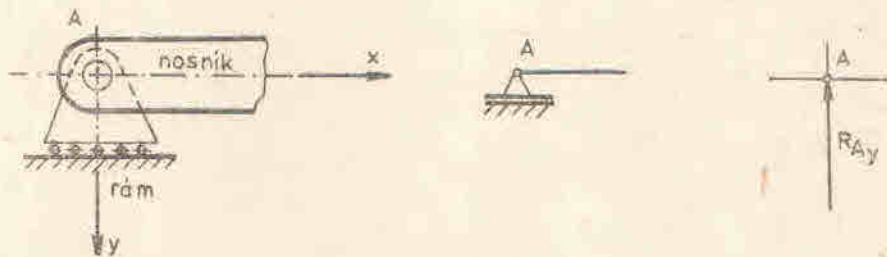
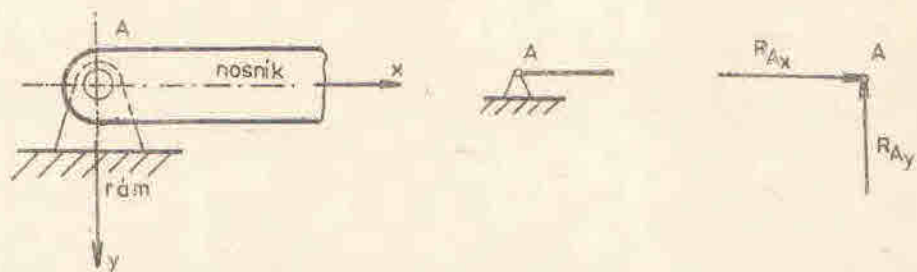
Ako je známe zo statiky, teleso v rovine má 3 stupne voľnosti pohybu. Nosníku v rovine teda treba odobrať väzbami minimálne tieto tri stupne voľnosti. Väzby nosníkov možno rozdeliť na štyri hlavné druhy:

- a) pevné kĺbové uloženie (obr. 11.1a) - odoberá 2° voľnosti pohybu,
- b) posuvné kĺbové uloženie (obr. 11.1b) - odoberá 1° voľnosti pohybu,
- c) dokonalé votknutie (obr. 11.1c) - odoberá 3° voľnosti pohybu,
- d) posuvné votknutie (obr. 11.1d) - odoberá 2° voľnosti pohybu.

Je zrejmé, že jednému nosníku možno potrebné stupne voľnosti odobrať rôznou kombináciou uvedených väzieb.

Ak je nosník uložený tak, že mu odoberáme práve tri stupne voľnosti, hovoríme, že je staticky určitý. Na obr. 11.2 sú vyznačené spôsoby staticky určitých nosníkov.

Zaraženie nosníka možno znázorniť sústredenými silami F , spojito rozloženým bremenom q alebo sústredeným ohybovým momentom M_0 .



Obr. 11.1

Uvoľňovanie väzieb nosníka

ieho
ierez
ry sú
ukcia
i po-
ania,

1-

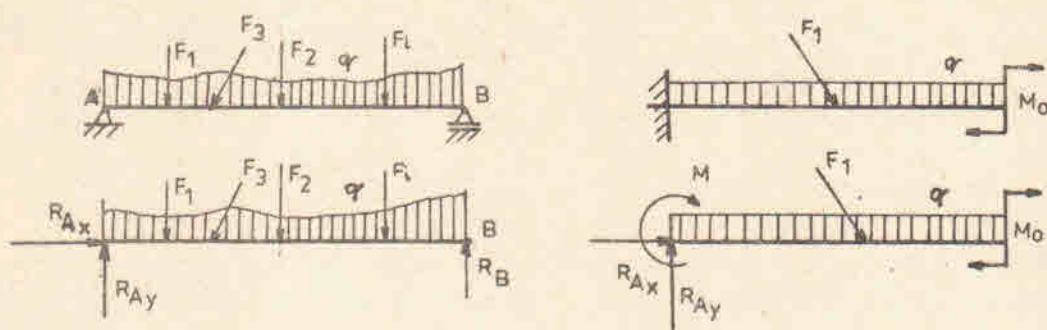
ie
icnom
iesto-
ej-
ha-
sto-

Nosni-
osti.

z-

vo-
ur-

aným



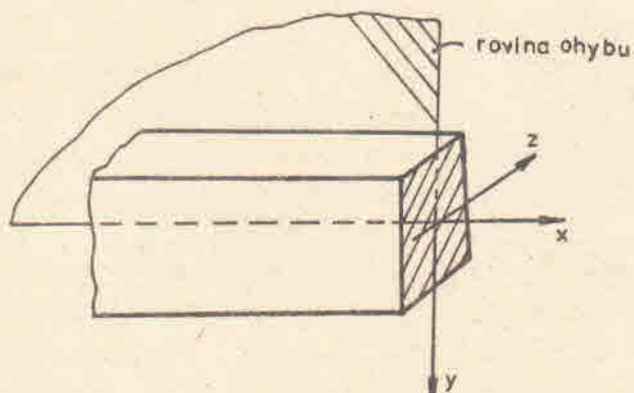
Obr. 11.2
Zaťaženie nosníka

Väzbové reakcie určíme zo statických podmienok rovnováhy uvoľneného nosníka. V prípade rovinných úloh to budú tri podmienky:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 & \sum F_{ix} &= 0 \\ \sum F_{iy} &= 0 & \text{alebo} & \sum M_A = 0 \\ \sum M_A &= 0 & & \sum M_B = 0 \end{aligned}$$

Ak väzby odoberajú nosníku viac ako tri stupne voľnosti, je to staticky neurčitý nosník. Rovnice rovnováhy treba v tomto prípade doplniť deformačnými podmienkami.

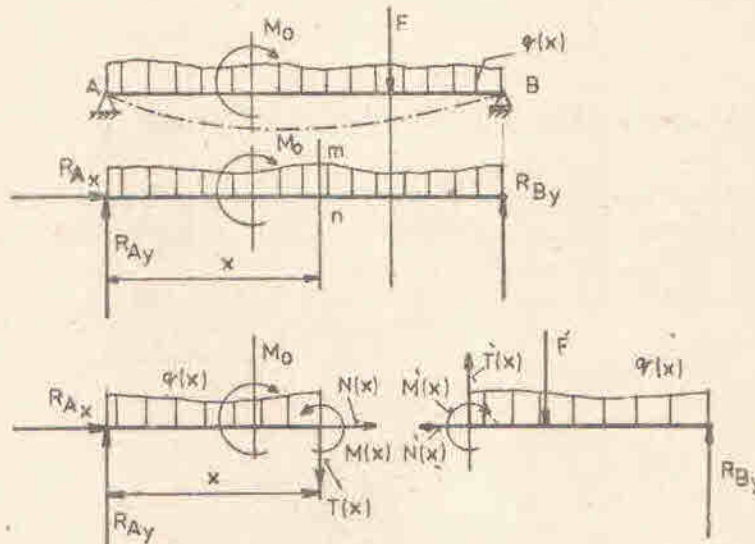
Statické podmienky rovnováhy zostavujeme vzhľadom na vzájomný súradnicový systém. Pri rovinnom ohybe nosníka je zaužívaný taký systém, že rovinou ohybu je x-y rovina (obr. 11.3). Pozdĺžna os prúta tvorí os x. Os + y je orientovaná smerom nadol. Os z je kolmá na rovinu ohybu nosníka.



Obr. 11.3
Rovina symetrie (ohybu) prierezu

11.2 Ohybový moment a priečna sila v myslenom reze nosníka

Na obr. 11.4 je staticky určitý nosník ohýbaný vonkajším zaražením. Účinkom zaraženia sa nosník deformuje. Deformované os nosníka tvorí priehybovú čiaru nosníka. V jednotlivých rezoch nosníka budú - ako reakcia na vonkajšie sily - pôsobiť vnútorné sily. V prípade rovinného ohybu to bude osová sila $N(x)$, ohybový moment $M(x)$ a priečna sila $T(x)$. Súradnica x nám určuje polohu mysleného rezu.



Obr. 11.4
Vnútorné sily

V myslenom reze x sú znázornené kladné smery vnútorných veličín. Na základe zákona akcie a reakcie platí:

a) $M(x) = M'(x)$
 $N(x) = N'(x)$
 $T(x) = T'(x)$

b) Výslednice vnútorných síl v myslenom reze musia byť v rovnováhe s vonkajším zaražením (vrátane väzbových reakcií) pôsobiacich z jednej strany rezu na odrezanej časti telesa.

Definície

Osová sila $N(x)$ v reze $m-n$ je rovná algebrickému súčtu všetkých vonkajších síl v smere osi nosníka z jednej strany rezu (v našom prípade od bodu A po rez x , resp. od bodu B po rez x). Kladná osová sila pôsobí von z rezu. Pri nosníkoch zaražených silami kolmými na os nosníka je osová sila $N(x)$ rovná nule. V ďalšom odvádzaní ju preto nebudeme uvažovať.

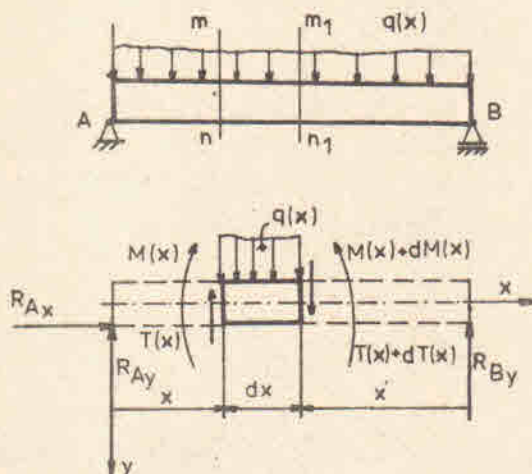
Priečna sila $T(x)$ v reze $m-n$ je rovná algebrickému súčtu všetkých vonkajších síl kolmých na os prúta z jednej strany rezu. Kladný smer priečnej sily dostaneme otočením kladného smeru $N(x)$ o 90° v smere hodinových ručičiek.

Ohybový moment $M(x)$ v reze $m-n$ je rovný algebrickému súčtu momentov všetkých vonkajších síl z jednej strany rezu.

Kladný ohybový moment ohýba nosník tak, že horné vlákna prierezu nosníka stláča a dolné ťahuje.

11.3 Súvis medzi $M(x)$ a $T(x)$ - Žuravského veta

Žuravského veta slúži na určenie priebehu priečných síl po dĺžke nosníka, keď je známa funkcia vyjadrujúca priebeh ohybových momentov $M(x)$.



Obr. 11.5a
Žuravského veta

Z nosníka na obr. 11.5a vyberieme dvoma rezmi (m, n a m_1, n_1) elementárnu časť dĺžky dx . Nosník je zaražený spojitou rozloženým bremenom $q(x)$ [N/m]. Účinky odrezaných častí nosníka nahradíme v reze x vnútornými veličinami $T(x)$ a $M(x)$. V reze $x + dx$ nadobudnú hodnotu $T(x) + dT(x)$, $M(x) + dM(x)$; obr. 11.5b. Vnútorné veličiny sú do myšlených rezov vložené v kladnom zmysle.

Nosník sa pred rozrezaním nachádzal v statickej rovnováhe. Keďže nám vnútorné veličiny nahrádzajú účinok odrezaných častí nosníka, musí sa v statickej rovnováhe nachádzať aj odrezaná časť dx (obr. 11.5b). Musia byť teda splnené statické podmienky rovnováhy:

$$1. \sum F_{ix} = 0 \quad ; \quad 0 = 0$$

2. Σ

3. Σ

Za pre
tej po

Podľa
sily $T(x)$

Rovnice
sily $T(x)$
tov pod

Poznámka

a) Ak z
vzdí
skéh

b) Z ro

vyp
loké

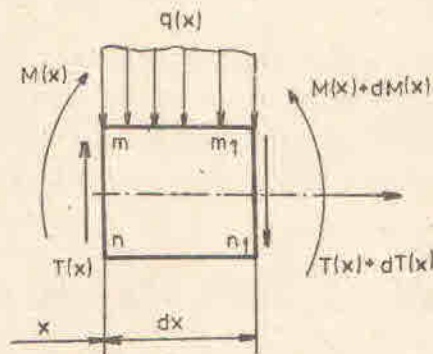
$$2. \sum F_{iy} = 0 : -T(x) + q(x) \cdot dx + T(x) + dT(x) = 0$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x) \quad (11-1)$$

$$3. \sum M_C = 0 \quad T(x) \cdot dx + M(x) - q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} - M(x) - dM(x) = 0$$

Za predpokladu zanedbania súčinu veľmi malých hodnôt ($dx \cdot \frac{dx}{2}$) $\neq 0$ z tretej podmienky rovnováhy dostaneme:

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (11-2)$$



Obr. 11.5b
Žuravského veta

Podľa rovnice (11-1) spojité zaťaženie $q(x)$ dostaneme derivovaním priečnej sily $T(x)$ podľa súradnice x .

Rovnica (11-2) predstavuje Žuravského vetu, ktorá hovorí: Priebeh priečných síl $T(x)$ po dĺžke nosníka dostaneme derivovaním priebehu ohybových momentov podľa súradnice x .

Poznámka

a) Ak zvolíme počiatok súradnicového systému v pravej podpere nosníka a vzdialenosť myšleného rezu označíme x' , ľahko možno ukázať, že v Žuravského vete sa nám zmení znamienko

$$T(x') = - \frac{dM(x')}{dx'}$$

b) Z rovnice (11-1) v prípade

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x) = 0$$

vyplyva, že v mieste nulového spojitého zaťaženia nadobúda priečna sila lokálne extrémny (maximum alebo minimum).

c) Zo Žuravského vety pre prípad

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} = 0$$

vyplýva, že ohybový moment dosahuje lokálne extrémny v miestach, kde je priečna sila nulová (resp. priečna sila $T(x)$ je nulová v mieste lokálnych extrémov ohybového momentu $M(x)$).

11.4 Postup určovania priebehu $M(x)$ a $T(x)$ po dĺžke nosníka

Aby sme mohli určiť nebezpečný prierez nosníka, potrebujeme vyjadriť vzťahy pre $M(x)$ a $T(x)$ v ľubovoľnom mieste nosníka. Prehľad o charaktere namáhania nám dáva grafické znázornenie priebehu $M(x)$ a $T(x)$. Nebezpečný prierez nosníka sa nachádza v mieste najnepriaznivejšej kombinácie veľkosti $M(x)$ a $T(x)$.

Postup určovania priebehu $M(x)$ a $T(x)$ (staticky určené nosníky)

1. Odstránime väzby, nahradíme ich väzbovými reakciami, ktoré vypočítame zo statických podmienok rovnováhy nosníka.
2. Podľa počtu nespojitostí prierezu a zaťaženia zvolíme príslušný počet úsekov a v nich myšlené rezy.
3. V myšlených rezoch podľa definície určíme vzťahy pre $M(x)$ a zo Žuravského vety vypočítame $T(x)$.
4. Vo zvolenej mierke nakreslíme priebeh funkcií $M(x)$ a $T(x)$ po dĺžke nosníka.
5. Určíme nebezpečný prierez nosníka.

Príklad 1

Určite priebeh $M(x)$ a $T(x)$ po dĺžke nosníka, keď je dané: F, l, a, b (obr. 11.6a).

Riešenie

1. Náhrada väzieb je znázornená na obr. 11.6b. Väzbové reakcie určíme zo statických podmienok rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0 :$$

$$R_{Ax} = 0$$

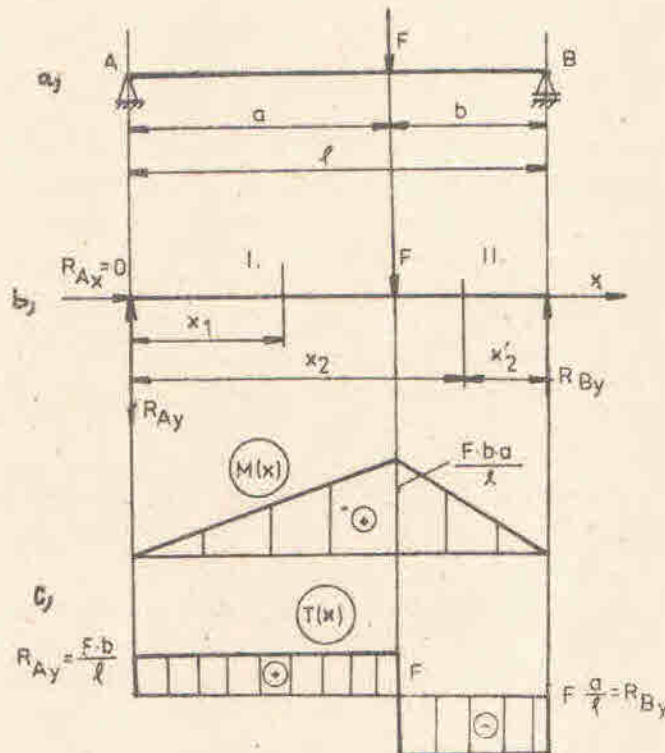
$$\sum M_B = 0 :$$

$$R_{Ay} \cdot l - Fb = 0 \quad R_{Ay} = F \frac{b}{l}$$

$$\sum M_A = 0 :$$

$$R_{By} \cdot l - F \cdot a = 0 \quad R_{By} = F \frac{a}{l}$$

Vázkové reakcie vyšli z rovníc rovnováhy so znamienkom kladným, to znamená, že aj v skutočnosti pôsobia tak, ako sme ich v obr. 11.6b orientovali. (V prípade, že reakcie dostaneme so záporným znamienkom, pôsobia v skutočnosti opačne, ako sme zvolili ich smer).



Obr. 11.6
Príklad

2. Prierez nosníka sa mení spojito, zaťaženie sa mení skokom v pôsobisku sily F . Zvolíme preto dva úseky na nosníku a v nich myslené rezy vo vzdialenostiach x_1 a x_2 od počiatku súradnicového systému (v podpore A).

3. Potom

I. $x_1 \in (0, a)$

$$M(x_1) = R_{Ay} \cdot x_1 = F \frac{b}{l} x_1$$

$$T(x_1) = \frac{dM(x_1)}{dx_1} = R_{Ay} = F \frac{b}{l}$$

II. $x_2 \in (a, l)$

$$M(x_2) = R_{Ay} \cdot x_2 - F(x_2 - a)$$

$$M(x_2) = F \frac{b}{l} \cdot x_2 - F(x_2 - a)$$

$$T(x_2) = \frac{dM(x_2)}{dx_2} = F \frac{b}{l} - F = -F \frac{a}{l}$$

4. Funkcie $M(x_1)$ a $M(x_2)$ sú rovnicami priamky. Stačí preto určiť ich hodnoty v hraničných bodoch intervalu:

$$x_1 = 0 \dots M(x_1) = 0 \qquad x_2 = a \dots M(x_2) = F \frac{b \cdot a}{l}$$

$$x_1 = a \dots M(x_1) = F \frac{ab}{l} \qquad x_2 = l \dots M(x_2) = 0$$

Priečna sila je v prvom aj druhom úseku konštantná. Priebeh $M(x)$ a $T(x)$ je znázornený na obr. 11.6c.

5. Nebezpečný prierez sa nachádza v mieste pôsobenia sily F . V danom reze sú maximálne hodnoty vnútorných veličín (za predpokladu $a > b$):

$$[M(x)]_{x=a} = M_{\text{max}} = \frac{F \cdot a \cdot b}{l}$$

$$[T(x)]_{x=a} = T_{\text{max}} = -R_{By} = F \frac{a}{l}$$

Poznámka

1. Z obr. 11.6c je zrejmé, že priebeh $T(x)$ je grafickou deriváciou $M(x)$ (Žuravského veta).

2. V prípade postupu pre úsek č. II z pravej strany nosníka

$$\text{II. } x_2' \in (0, b)$$

$$M(x_2') = R_{By} \cdot x_2' = F \frac{a}{l} \cdot x_2'$$

$$T(x_2') = - \frac{dM(x_2')}{dx_2'} = -F \frac{a}{l}$$

dostaneme zhodné priebehy $M(x)$ a $T(x)$ ako v predchádzajúcom prípade.

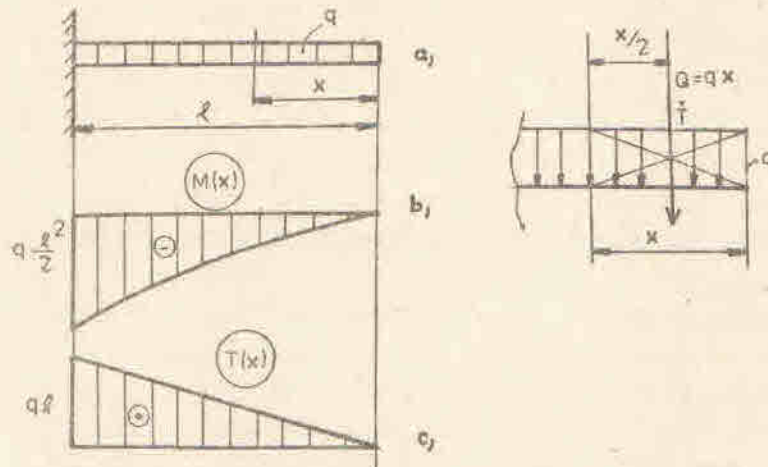
Príklad 2

Určite priebeh $M(x)$ a $T(x)$ pre votknutý nosník podľa obr. 11.7a, keď je dané: q, l .

Riešenie

1. Ak nepotrebujeme poznať veľkosť väzbových reakcií z dôvodu dokonalého upevnenia nosníka v ráme, netreba pri votknutých nosníkoch odstraňovať väzby. Od voľného konca nosníka možno priamo začať robiť myslené rezy na nosníku a určovať priebehy $M(x)$ a $T(x)$.

2. Zaraženie aj prierez sa mení spojito, stačí preto na nosníku voliť jeden úsek s jedným mysleným rezom vo vzdialenosti x od voľného konca nosníka.



Obr. 11.7
Votknutý nosník

3. Potom

$$x \in (0, l)$$

$$M(x) = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$T(x) = - \frac{dM(x)}{dx} = q \cdot x$$

4. Funkcia $M(x)$ je druhého radu. Jej priebeh na úseku $x \in (0, l)$ zistíme tak, že určíme jej hodnoty v hraničných bodoch intervalu, nájdeme jej nulové body a lokálne extrémny.

a) Hodnota $M(x)$ v hraničných bodoch intervalu:

$$x = 0 \dots M(x) = 0; \quad x = l \dots M(x) = -q \frac{l^2}{2}$$

b) Nulové body:

$$M(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2} = 0, \quad x_{1,2} = 0$$

c) Extrémy:

$$M'(x) = -q \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad - \text{miesto extrému}$$

$$M''(x) = -q - \text{maximum}$$

Priebeh $M(x)$ je znázornený na obr. 11.7b. Priebeh priečných síl $T(x)$ je lineárny a je znázornený na obr. 11.7c.

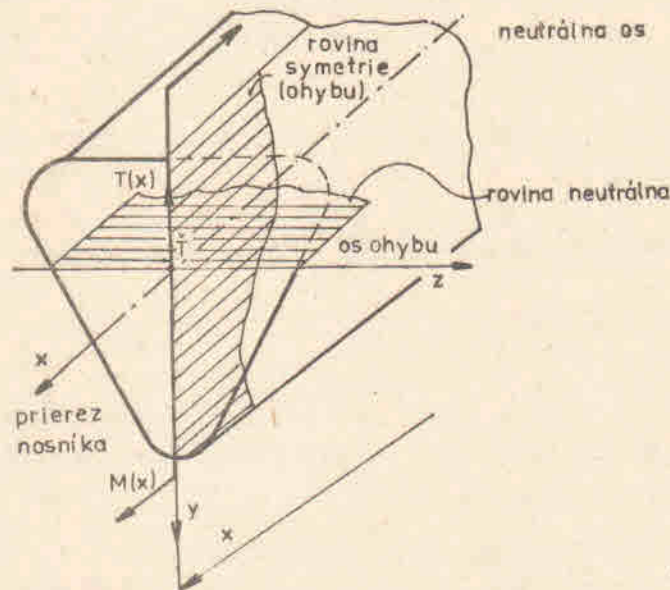
5. Nebezpečný prierez sa nachádza v mieste votknutia nosníka. Maximálne hodnoty vnútorných veličín sú:

$$[M(x)]_{x=l} = -q \frac{l^2}{2} = M_0 \text{ max}$$

$$[T(x)]_{x=l} = T_{\text{max}} = q \cdot l$$

11.5 Rovina symetrie ohybu, neutrálna rovina a neutrálna os

O rovinnom ohybe hovoríme vtedy, ak rovina pôsobenia ohybového momentu je súčasne rovinou súmernosti prierezu prizmatického nosníka. Pôsobením ohybových momentov sa potom nosník prehne, pôvodne priamková os nosníka (spojnica ťažísk plôch prierezu) sa zakríví, pričom ohybová deformácia nosníka nastane v rovine ohybových momentov (obr. 11.8).



Obr. 11.8
Neutrálna rovina

Pri ohybe nosníka podľa obr. 11.8 sa budú horné vlákna stláčať, spodné rozťahovať a niektoré vlákna pritom nemenia svoju dĺžku - neutrálne vlákna. Neutrálne vlákna vypínajú neutrálnu rovinu. Priesečnicu roviny symetrie a neutrálnej roviny nazývame neutrálnou osou. Pri rovinnom ohybe prizmatického nosníka obvykle neutrálna os prechádza ťažiskom prierezu (pozdĺžna os prúta x). Okolo osi z pôsobí ohybový moment M(x).

11.6 Napätosť v priereze pri rovinnom ohybe nosníka

V myslenom reze nosníka vzniká vo všeobecnosti vnútorný ohybový moment M(x) a priečna sila T(x). Ak T(x) = 0, hovoríme o čistom ohybe. Ak M(x) = 0, dostaneme vlastne čistý šmyk. Ohybový moment M(x) leží v rovine kolmej

na myslený rez. Preto táto zložka vektora napätia spôsobí vznik normálovej zložky tenzora napätia $\sigma = f(M(x))$. Priečna sila leží v reze (ako pri čistom šmyku), preto od nej dostaneme šmykové napätie $\tau = f(T(x))$. Je zrejmé, že tieto napätia budú navyše funkciou veľkosti plochy prierezu a môžu byť po priereze rozložené nerovnomerne. Odvođením vzťahov pre normálove a šmykové napätie sa budeme v ďalšom zaoberať osobitne. Pri štíhlych nosníkoch však prevažuje vplyv ohybového momentu na napätosť a deformáciu. Preto vplyv priečnej sily možno zanedbať. Značný vplyv priečnej sily sa však prejavuje pri krátkych a hrubých nosníkoch úzkeho obdĺžnikového prierezu (resp. prierezu pozostávajúceho z obdĺžnikových častí).

11.6.1 Normálove napätia pri rovinnom ohybe nosníka

Experimentálne vyšetrenia ohybu nosníkov obdĺžnikového prierezu, ktorých dĺžky sú oproti výške prierezu dostatočne veľké, dávajú podklad pre prijatie predpokladov:

1. priečne rezy, ktoré boli pred deformáciou rovinné, ostávajú pri čistom ohybe ($T(x) = 0$) aj po deformácii nosníka rovinné;
2. pozdĺžne vlákna na seba netlačia, a preto sa účinkom normálových napätí len lineárne predĺžia alebo skrátia;
3. deformácia vlákien nezávisí od ich polohy v šírke prierezu, teda i normálove napätia, ktoré sa po výške prierezu menia, po šírke prierezu zostávajú však rovnaké;
4. materiál nosníka sa riadi Hookovým zákonom, pričom modul pružnosti v ťahu a tlaku je rovnaký.

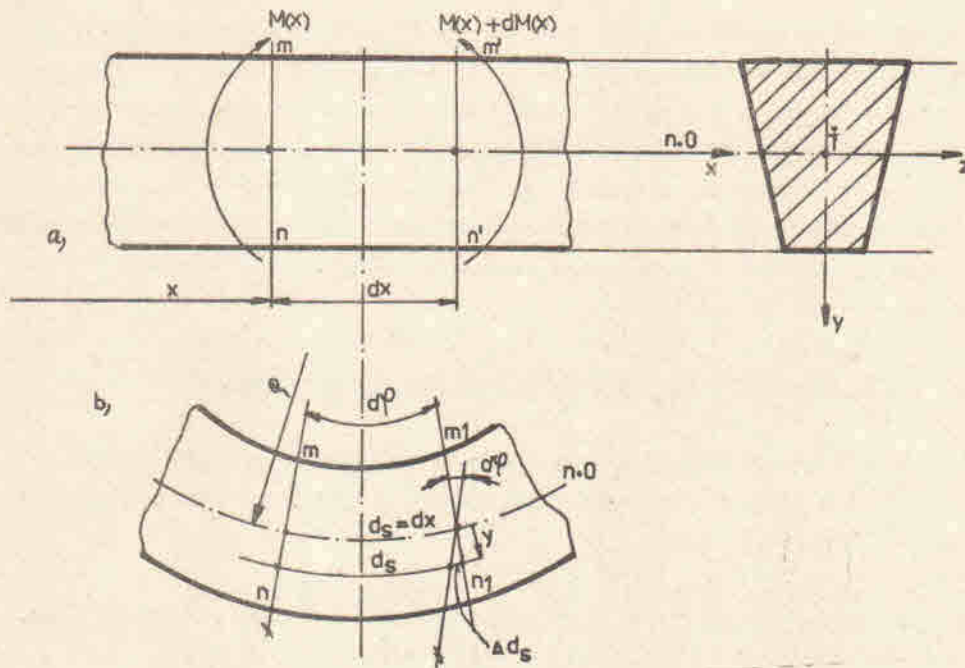
Uvažujme časť nosníka podľa obr. 11.9a. V myslených rezoch x a $x+dx$ pôsobí vnútorný ohybový moment $M(x)$, resp. $M(x) + dM(x)$.

Budeme predpokladať, že na elementárnej dĺžke nosníka dx je zmena vnútorného ohybového momentu zanedbateľná ($dM(x) \approx 0$). Potom deformáciu nosníka možno znázorniť podľa obr. 11.9b. Vlákno vo vzdialenosti y od neutrálnej roviny sa predĺžilo o hodnotu Δds . Pomerné predĺženie sledovaného vlákna bude

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y \cdot d\varphi}{\varrho \cdot dy} = \frac{y}{\varrho} \quad (11-3)$$

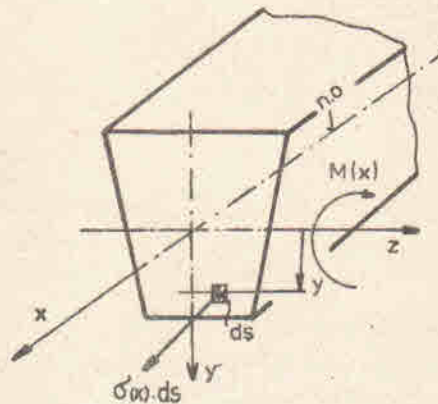
kde ϱ je polomer krivosti neutrálnej osi. Podľa Hookovho zákona normálove napätie v sledovanom vlákne bude

$$\sigma = \epsilon \cdot E = \frac{y}{\rho} \cdot E \quad (11-4)$$



Obr. 11.9
Predĺženie vybratého vlákna

Na obr. 11.10 je znázornené toto napätie pôsobiace na ploške sledovaného vlákna dS .



Obr. 11.10
K výpočtu napätia

Moment tohto napätia k osi z bude

$$dM(x) = \sigma \cdot dS \cdot y \quad (11-5)$$

Integrovaním po celom priereze dostaneme výslednicu vnútorných ohybových momentov

$$M(x) = \int_S \sigma \cdot y \, dS \quad (11-6)$$

resp. dosadením z rovnice (11-4)

$$M(x) = \int_S \frac{E}{\rho} \cdot y^2 \cdot dS = \frac{E}{\rho} \int_S y^2 dS = \frac{E}{\rho} \cdot J_z \quad (11-7)$$

kde J_z je kvadratický moment plochy prierezu k osi z. Aby sme dostali vzájomnú závislosť medzi $M(x)$ a σ , stačí vyjadriť z (11-4) pomer $\frac{E}{\rho} = \frac{\sigma}{y}$ a dosadiť ho do (11-7), t.j.

$$M(x) = \frac{\sigma}{y} \cdot J_z \quad (11-8)$$

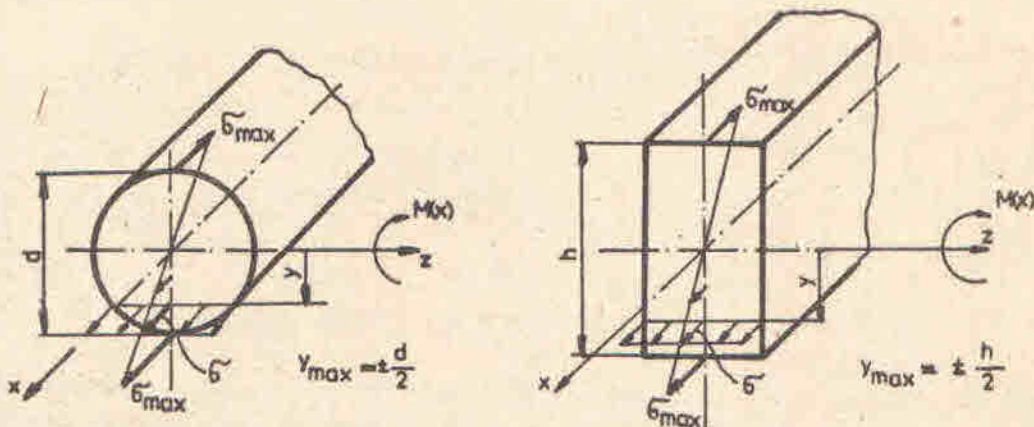
Odtiaľ normálové napätie

$$\sigma = \frac{M(x)}{J_z} \cdot y \quad (11-9)$$

je lineárnou funkciou vzdialenosti sledovaného vlákna od neutrálnej roviny - y. Je zrejmé, že pre

$$\begin{aligned} y = 0 \dots \sigma &= 0 \\ y = y_{\max} \dots \sigma &= \sigma_{\max} = \frac{M(x)}{J_z} \cdot y_{\max} \end{aligned} \quad (11-10)$$

kde y_{\max} je najväčšia vzdialenosť uvažovaného vlákna od neutrálnej roviny. Pribeh napätia pre kruhový a obdĺžnikový prierez je znázornený na obr. 11.11.



Obr. 11.11
Maximálne napätia v priereze

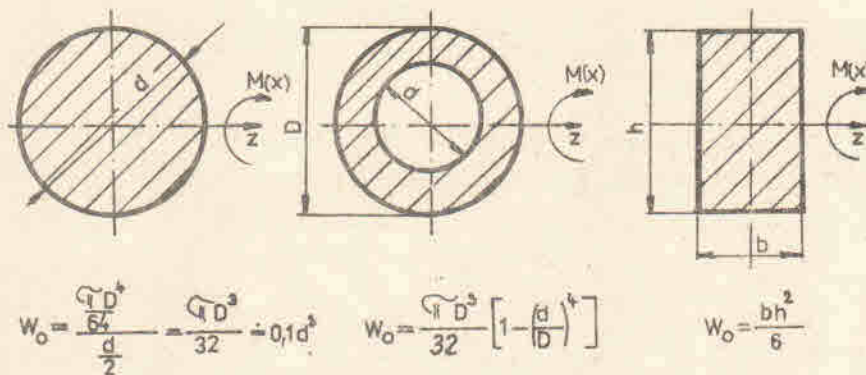
Z priebehu napätia po priereze možno stanoviť tieto závery:

- Najvzdialenejšie vlákna od neutrálnej roviny sú namáhané najväčším normálovým napätím (ťahovým, resp. tlakovým).
- Vlákna v blízkosti neutrálnej roviny nie sú dostatočne využité z hľadiska namáhania normálovým napätím. Pri čistom ohybe treba teda voliť taký typ prierezu, aby materiál nosníka bol sústreďovaný ďalej od neutrálnej roviny (napr. I profil, medzikruhový prierez atď...).
- Zaťaženie nosníka orientovať tak, aby bol ohýbaný okolo 1. hlavnej centrálnej osi zotrvačnosti prierezu (J_z nadobúda maximálnu hodnotu).

Výraz (11-10) zvykneme upraviť do tvaru

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)}{\frac{J_z}{y_{\max}}} = \frac{M(x)}{W_o} \quad (11-11)$$

kde $W_o = \frac{J_z}{y_{\max}}$ nazývame prierezovým modulom v ohybe. Zo vzťahu (11-11) je zrejmé, že σ_{\max} nepriamo úmerne narastá s veľkosťou prierezového modulu. Pre najjednoduchšie typy prierezu sú ich prierezové moduly uvedené na obr. 11.12.



Obr. 11.12
Prierezový modul v ohybe

11.6.2 Normálové napätie v priereze pri šikmom ohybe

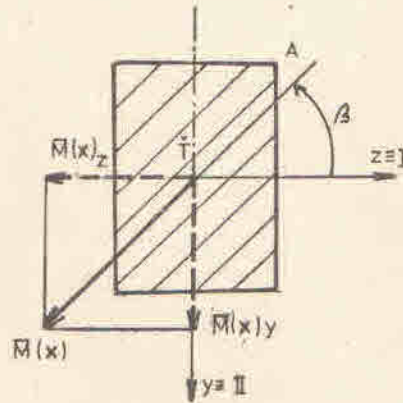
O šikmom ohybe hovoríme vtedy, keď rovina ohybu (v ktorej pôsobí ohybový moment $M(x)$), obr. 11.13, nie je kolmá na niektorú z hlavných centrálnych osí zotrvačnosti prierezu. Vtedy nie je neutrálna rovina (resp. os) kolmá na rovinu ohybu.

Pri riešení šikmého ohybu postupujeme tak, že vektor ohybového momentu

$M(x)$ rozložíme do hlavných centrálnych osí zotrvačnosti I a II a potom každý z rovinných ohybov riešime samostatne. Takto vypočítané napätia v príslušných bodoch prierezu možno algebricky sčítať.

Príklad 1

Určite napätie v bode A obdĺžnikového prierezu, ktorý je namáhaný ohybovým momentom $M(x)$, obr. 11.13.

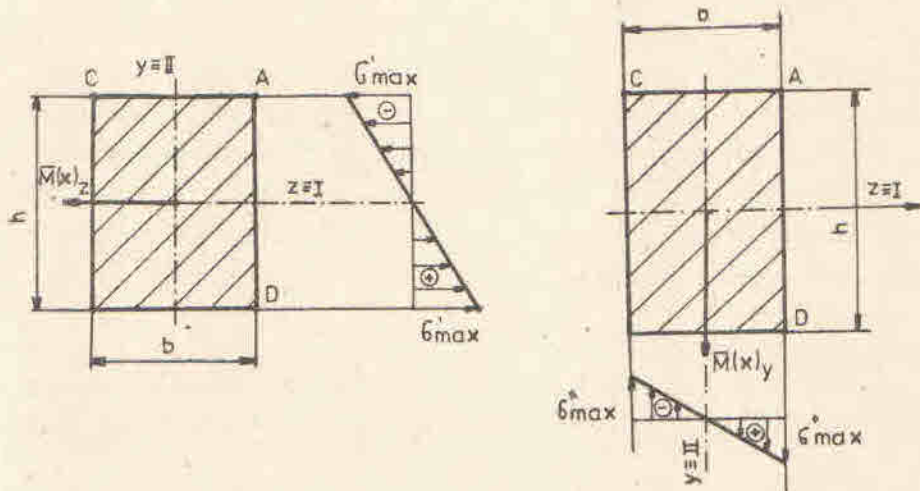


Obr. 11.13
Šikmý ohyb

Hlavné centrálné osi zotrvačnosti sú $z \equiv I$, $y \equiv II$ a nech vektor $M(x)$ zvierá s osou I uhol β . Zložky vektora $M(x)$ potom budú:

$$\bar{M}(x)_z = \bar{M}(x) \cdot \cos \beta \quad \text{a} \quad \bar{M}(x)_y = \bar{M}(x) \cdot \sin \beta \quad (11-12)$$

Priebeh napätia vyvolaných len momentom $\bar{M}(x)_z$ (resp. $\bar{M}(x)_y$) je znázornený na obr. 11.14a (resp. 11.14b).



Obr. 11.14
Napätie pri šikmom ohybe

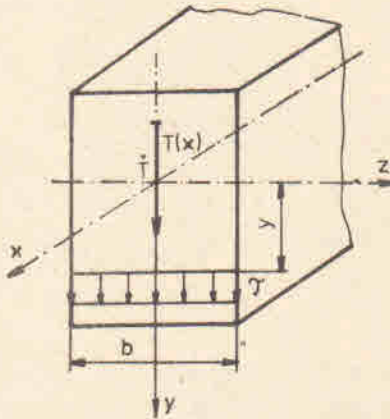
Výsledné napätie v bode A bude

$$\sigma_A = \sigma'_{\max} + \sigma''_{\max} = - \frac{|\bar{M}(x)_z|}{J_z} \cdot \frac{h}{2} + \frac{|\bar{M}(x)_y|}{J_y} \cdot \frac{b}{2} \quad (11-13)$$

Je zrejmé, že najviac namáhaný je bod C (tlakom) a bod D (ťahom).

11.6.3 Šmykové napätie od priečnej sily

Šmykové napätia, ako sme už spomenuli, sú vyvolané priečnou silou $T(x)$. O rozložení šmykových napätí po priereze vyslovil Žuravskij tieto predpoklady (obr. 11.15):



Obr. 11.15

Napätie od priečnej sily

1. smer šmykových napätí je rovnobežný s priečnou silou,
2. šmykové napätia, ktoré pôsobia na ploškach vo vzdialenosti y od neutrálnej roviny, sú konštantné.

Ako ukazuje teória pružnosti, sú oba tieto predpoklady správne pre nosník, ktorého výška prierezu je väčšia ako šírka. Podrobnejším odvođením vzťahu pre šmykové napätie sa zaoberať nebudeme, len uvedieme, že šmykové napätie je po priereze rozložené nerovnomerne, maximálne hodnoty nadobúda v bodoch neutrálnej roviny. Ich veľkosť a priebeh pre kruhový a obdĺžnikový prierez sú uvedené v kap. Čistý šmyk.

Pre prierezy nosníkov z valcových profilov (I, E, L, \dots) treba určiť veľkosť šmykových napätí osobitne podľa literatúry odporúčanej na konci skriptá.

Upozornenie

Pre nesymetrické prierezy (napr. L, E, \dots), resp. ak výslednica $T(x)$

neprac
nému n
veľmi
lu do

11.7

Pri ro
tosť d

Veľkoes
vaného
Ak je
priečne

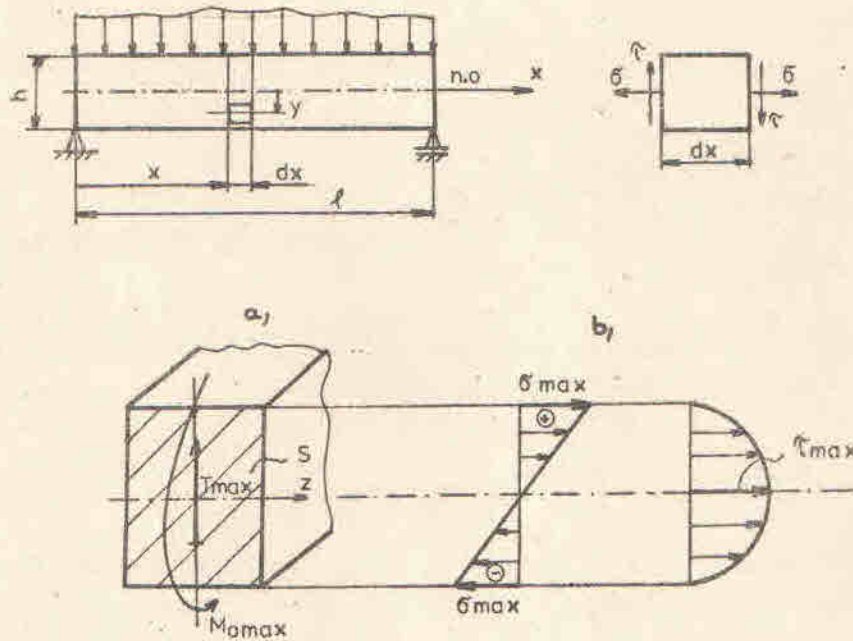
to zna
te M_0

V prípa
nosníka

neprechádza ťažiskom prierezu, môže dôjsť vplyvom priečnej sily k dodatočnému namáhaniu krútením (ktorý je najmä pre otvorené tenkostenné profily veľmi nebezpečný). V takomto prípade umiestňujeme vonkajšiu zaražujúcu silu do tzv. strediska šmyku, čím vylúčime skrúcovanie prierezu.

11.7 Dimenzovanie nosníkov

Pri rovinnom ohybe nosníka vzniká vlastne v jeho prierezoch rovinná napätosť daná normálovým napätím σ a šmykovým napätím τ (obr. 11-16).



Obr. 11.16
Rovinná napätosť

Veľkosť σ a τ závisí od charakteru $M(x)$ a $T(x)$, ale aj od polohy sledovaného bodu v priereze $-y$.

Ak je nosník štíhly (výška nosníka je oproti jeho dĺžke malá), možno vplyv priečnej sily zanedbať. V tomto prípade pevnostná podmienka bude

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{0 \max}}{W_0} \leq \sigma_{\text{dov}} \quad (11-14)$$

to znamená, že maximálne normálové napätie v nebezpečnom priereze (v mieste $M_{0 \max}$) musí byť menšie ako dovolené namáhanie v ťahu (resp. tlaku).

V prípade, že priečna sila nie je zanedbateľná, musíme na dimenzovanie nosníka použiť pevnostnú hypotézu (najčastejšie V. pevnostnú hypotézu)

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^2} \leq \sigma_{\text{dov}} \quad (11-15)$$

Je zrejmé, že z pevnostnej podmienky (podobne ako v iných prípadoch namáhania) možno:

- a) ak je známy materiál (σ_{dov}) a zaťaženie nosníka, určiť potrebné rozmery nosníka,
- b) ak sú známe rozmery a zaťaženie nosníkov, zistiť, či nedôjde k nedovolenému namáhaniu,
- c) ak sú známe rozmery a materiál nosníka (σ_{dov}), určiť prípustné zaťaženie nosníka.

Príklad 1

Určite potrebný prierezový modul obdĺžnikového prierezu nosníka zaťaženého a uloženého podľa obr. 11.7 (kap. 11.4), keď je dané σ_{dov} .

Riešenie

V uvedenej kapitole sme pre daný nosník stanovili, že nebezpečný prierez je v mieste votknutia, kde (obr. 11-16a)

$$M_{o \max} = - \frac{q \cdot l^2}{2}, \quad T_{\max} = q \cdot l$$

Priebeh napätia v nebezpečnom priereze je nakreslený na obr. 11.16b.

Platí:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{M_{o \max}}{W_o}, \quad \tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{\frac{2}{3} S}$$

Z priebehu napätia je zrejmé, že v bodoch prierezu (horná a dolná hrana), kde je napätie od ohybu maximálne, je šmykové napätie nulové. A naopak, v bodoch neutrálnej roviny, kde je šmykové napätie maximálne, je normálové napätie nulové.

Pretože pri nosníkoch je namáhanie ohybovým momentom rozhodujúce, určíme potrebné rozmery nosníka z pevnostnej podmienky

$$|\sigma_{\max}| \leq \sigma_{\text{dov}}$$

resp.

$$W_o \geq \frac{M_{o \max}}{\sigma_{\text{dov}}} \quad [\text{mm}^3]$$

Preto
Tento

Ak je
zaťaž

Príklad

Určite
11.6

Riešenie

Nebezp

Priebe

Z pevn

určíme

a S =

Pretože $W_o = \frac{bh^2}{6}$, možno zo zvoleného pomeru $\frac{h}{b}$ určiť plochu prierezu S .
 Tento prierez treba teraz skontrolovať v čistom šmyku, t.j.

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\text{dov}}, \quad \tau_{\text{dov}} = 0,6 \cdot \sigma_{\text{dov}}$$

$$\frac{T_{\max}}{\frac{2}{3} S} \leq \tau_{\text{dov}}$$

Ak je táto pevnostná podmienka splnená, navrhnutý prierez sa vplyvom daného zaťaženia q neporuší.

Príklad 2

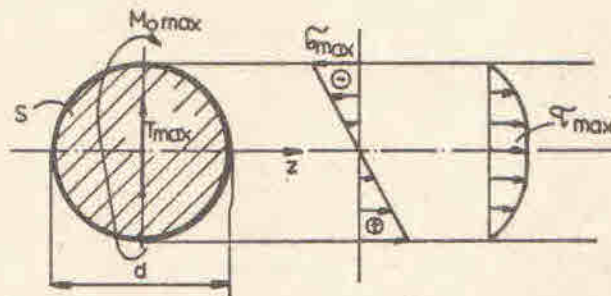
Určite potrebný kruhový prierez hriadeľa zaťaženého a uloženého podľa obr. 11.6 (kap. 11.4), keď je dané σ_{dov} .

Riešenie

Nebezpečný prierez sa nachádza v mieste pôsobenia sústredenej sily, kde

$$M_o \max = \frac{F \cdot a \cdot b}{l}, \quad |T_{\max}| = F \frac{a}{l}$$

Priebeh napätia σ a τ je znázornený na obr. 11.17.



Obr. 11.17
Kruhový prierez

Z pevnostnej podmienky

$$\sigma_{\max} = \frac{M_o \max}{W_o} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

určíme prierezový modul v ohybe

$$W_o \geq \frac{M_o \max}{\sigma_{\text{dov}}} \quad W_o = 0,1 d^3 \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{10 \cdot W_o}$$

a $S = \frac{\pi d^2}{4}$ bude plocha prierezu, ktorý skontrolujeme v šmyku

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{\frac{3}{4} S} \leq \tau_{\text{dov}}$$

Ak je pevnostná podmienka v šmyku splnená, vypočítaný prierez nosníka vyhovuje.

Poznámka

Z uvedených príkladov je zrejmé, že pri prizmatických nosníkoch bude hospodárne využitý len nebezpečný prierez. V ostatných miestach je nosník predimenzovaný a prebytočný materiál len zvyšuje náklady na daný konštrukčný prvok. Je preto logické, že sa navrhujú nosníky s premenlivým prierezom (spravidla výška nosníka sa mení pri konštantnej šírke). Zmena výšky prierezu potom vlastne súvisí s priebehom ohybového momentu $M(x)$.

Ideálnym prípadom je nosník konštantného napätia (pre veľmi presné súčiastky), s návrhom ktorého sa možno oboznámiť v inej literatúre.

Pre posledné dva vyriešené príklady sa bude výška nosníka $h(x)$ meniť, napr. podľa obr. 11.18.



Obr. 11.18
Návrh nosníkov

11.8 Energia napätostí v ohýbanom nosníku

Energia napätostí bude rovná súčtu energie napätostí normálových a šmykových napätí. Možno ukázať, že pre štíhle nosníky je príspevok energie šmykových napätí zanedbateľný, preto sa ním nebudeme zaoberať.

Energia napätostí normálových napätí potom bude

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \epsilon \, dV = \frac{1}{2E} \int_V \sigma^2 \cdot dV = \frac{1}{2E} \int_V \left(\frac{M(x)}{J_z} \cdot y \right)^2 \cdot dS \cdot dx = \\ &= \frac{1}{2E \cdot J_z} \int_l M^2(x) dx \end{aligned} \quad (11-16)$$

Využili sme pritom vzťah

$$\int_S y^2 dS = J_z \quad (11-17)$$

ktorý predstavuje moment zotrvačnosti prierezu k osi z.

Príklad 1

Určite energiu napätosti nosníka podľa obr. 11.7 (kap. 11.4).

Riešenie

Ohybový moment $M(x) = -q \frac{x^2}{2}$

Dosadením do (11-16) a integrovaním po dĺžke nosníka dostaneme:

$$A = \frac{1}{2E \cdot J_z} \int_0^l \left(-q \frac{x^2}{2}\right)^2 dx = \frac{q^2 \cdot l^5}{40E \cdot J_z}$$

Príklad 2

Vypočítajte energiu napätosti nosníka podľa obr. 11.6 (kap. 11.4).

Riešenie

Energia napätosti bude rovná súčtu energií napätosti jednotlivých častí nosníka

$$A = A_I + A_{II} = \frac{1}{2E \cdot J_z} \int_0^a M^2(x_1) dx_1 + \frac{1}{2E \cdot J_z} \int_a^l M^2(x_2) dx_2$$

Dosadením za $M(x_1) = F \frac{b}{l} \cdot x_1$ a $M(x_2) = F \frac{b}{l} \cdot x_2 - F(x_2 - a)$ a po integrácii máme (pre jednoduchosť nech $a = b = \frac{l}{2}$):

$$A = \frac{F^2 \cdot l^3}{96 \cdot E \cdot J_z}$$

12. Deformácia priamych nosníkov

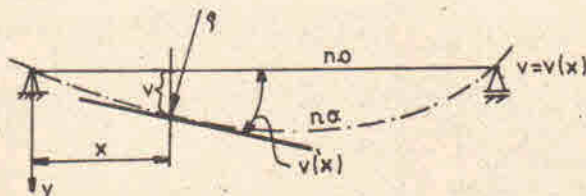
Priamočiara os nosníka sa pôsobením vonkajšieho zaťaženia deformuje. Deformovanú os nazývame priehybovou čiarou. V praxi veľmi často treba vedieť určiť priehybovú čiaru nosníka, lebo sa kladie požiadavka, aby okrem podmienky pevnosti ($\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{dov}}$) ani najväčší priehyb nosníka (napr. rotor točivého stroja) nebol väčší ako vopred stanovená hodnota. Okrem toho pri vyšetřovaní staticky neurčitých nosníkov dopĺňame chýbajúci počet rovníc vzťahmi, ktoré dostaneme z deformačných podmienok. Na určenie priehybu nosníka existujú dva hlavné prístupy.

1. Stanovíme rovnicu priehybovej čiary ako funkciu vnútorných silových veličín, rozmerov a materiálu nosníka (metódou približnej diferenciálnej rovnice priehybovej čiary, metóda počiatočných parametrov).
2. Určíme priamo hodnotu priehybu v hľadaných miestach nosníka (I. Castigliona veta, Mohrova metóda, numerické metódy).

Pretože deformáciu zložitej nosníkovej konštrukcie dnes riešime počítačovo-orientovanými metódami (najmä metódou konečných prvkov), vysvetlíme si v ďalšom len dve najvýznamnejšie metódy analytické, ktoré nám stačia na pochopenie základných princípov priehybu nosníka, prípadne nám poslúžia na orientačnú kontrolu správnosti výsledkov dosiahnutých metódou konečných prvkov.

12.1 Približná rovnica priehybovej čiary

Uvažujme nosník podľa obr. 12.1. Priehybovú čiaru nosníka označíme funkciou $v = v(x)$, ktorá predstavuje tvar neutrálnej osi nosníka x po jej deformácii. V mieste nosníka x je priehyb v , krivosť priehybovej čiary ρ a vnútorný ohybový moment $M(x)$.



Obr. 12.1
Deformácia nosníka

Medzi polomerom krivosti ρ a ohybovým momentom sme odvodili vzťah (11-8) v tvare

$$M(x) = \frac{E}{\rho} \cdot J_z \tag{12-1}$$

Pre polomer krivosti ρ krivky $v(x)$ v mieste x platí z matematiky známy vzťah

$$\rho = \pm \frac{(1 + v'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{v''(x)} \tag{12-2}$$

Po dosadení do predchádzajúcej rovnice a po úprave dostaneme:

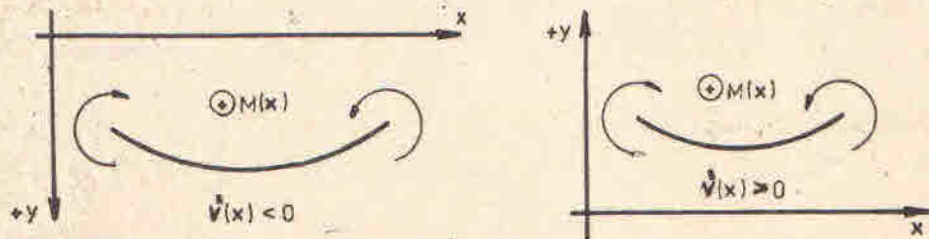
$$\frac{v''(x)}{(1+v'^2(x))^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{M(x)}{E \cdot J_z} \tag{12-3}$$

V praxi sú zväčša prípustné len malé priehyby nosníkov, a tak môžeme štvorec $v'(x)$ oproti jednotke zanedbať, a tým sa rovnica (12-3) zjednoduší na tvar

$$v''(x) = \pm \frac{M(x)}{E \cdot J_z} \tag{12-4}$$

Táto rovnica sa nazýva približná diferenciálna rovnica priehybovej čiary. Ak sú priehyby konečné (napr. štíhle nosníky a pružiny), nemožno štvorec $v'(x)$ zanedbať a musí sa riešiť úplná rovnica (12-3).

Znamienka ohybového momentu $M(x)$ bolo stanovené nezávisle od voľby súradnicových osí, ale druhá derivácia krivky $v(x)$ závisí od tejto voľby. Pre zvolený kladný smer ohybového momentu (horné vlákna nosníka stláča, dolné ťahuje), pričom súčin $E \cdot J_z$ je vždy kladný, musí potom pre súradnicový systém podľa obr. 12.2a v rovnici (12-4) platiť záporné znamienko. Pre súradnicový systém podľa obr. 12.2b bude platiť znamienko kladné (aby bol splnený geometrický význam druhej derivácie funkcie $v(x)$ určujúci lokálne minimum či maximum).



Obr. 12.2
Voľba znamienka

V ďalšom budeme používať rovnicu (12-4) len so záporným znamienkom, teda

$$V''(x) = - \frac{M(x)}{E \cdot J_z} \quad (12-5)$$

aby sme z kladného momentu dostali kladný priehyb. Z rovnice (12-5) dostaneme rovnicu priehybovej čiary $V = V(x)$ po dvojnásobnej integrácii:

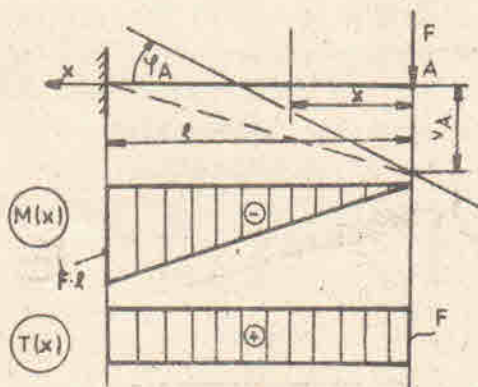
$$V'(x) = - \frac{1}{E \cdot J_z} \int_l M(x) dx + C_1$$

$$V(x) = \int_l \left[- \frac{1}{E \cdot J_z} \int_l M(x) \cdot dx \right] \cdot dx + C_1 x + C_2$$

Integračné konštanty C_1 a C_2 určíme z okrajových podmienok uloženia nosníka. Derivácia priehybovej čiary $V'(x)$ vlastne predstavuje uhol natočenia v danom mieste x (uhol, ktorý zvierajú dotyčnica k priehybovej čiare s kladným smerom osi x). Z tvaru rovnice (12-5) je zrejmé, že priehybovú čiaru z jednej diferenciálnej rovnice možno určiť za predpokladu spojitej zmeny $M(x)$ a J_z po dĺžke nosníka, pričom $E = \text{const}$. Pre nosník s viacerými úsekmi nespojitosti musíme pre každý úsek osobitne napísať jednu diferenciálnu rovnicu. Pre integračné konštanty tak dostaneme algebrický systém rovníc, ktorý je potom výhodné riešiť na počítači.

Príklad 1

Určite priehyb a uhol natočenia voľného konca votknutého nosníka podľa obr. 12.3a, keď je dané F , l , E , J_z .



Obr. 12.3
Príklad

Riešenie

Ohybový moment a priečnu silu určíme zo vzťahov:

$$x \in (0, l)$$

$$M(x) = -F \cdot x$$

$$T(x) = - \frac{dM(x)}{dx} = F$$

Ich priebeh je znázornený na obr. 12.3b.

Diferenciálna rovnica priehybovej čiary má tvar

$$V''(x) = - \frac{M(x)}{E \cdot J_z} = \frac{F}{E \cdot J_z} \cdot x$$

$$V'(x) = \frac{F}{2E \cdot J_z} \cdot x^2 + C_1$$

$$V(x) = \frac{F}{6E \cdot J_z} \cdot x^3 + C_1 x + C_2$$

Potrebné dve okrajové podmienky sú:

1. $x = l \dots V'(x) = 0 \Rightarrow \frac{F}{2E \cdot J_z} \cdot l^2 + C_1 = 0$

2. $x = l \dots V(x) = 0 \quad \frac{F}{6E \cdot J_z} \cdot l^3 + C_1 l + C_2 = 0$

Dosadením za C_1 z prvej podmienky do druhej máme:

$$\frac{F}{6E \cdot J_z} \cdot l^3 - \frac{F \cdot l^3}{2E \cdot J_z} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot J_z}$$

Dosadením integračných konštánt do $V(x)$ dostaneme:

$$V(x) = \frac{F}{6E \cdot J_z} \cdot x^3 - \frac{F \cdot l^2}{2E \cdot J_z} \cdot x + \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot J_z}$$

resp. uhol natočenia

$$V'(x) = \frac{F}{2E \cdot J_z} \cdot x^2 - \frac{F \cdot l^2}{2E \cdot J_z}$$

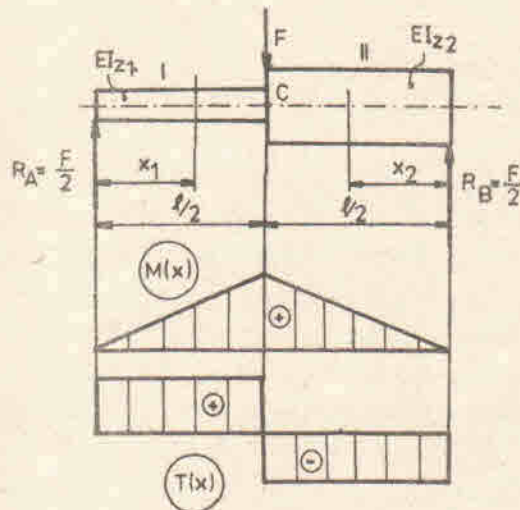
Pre miesto A potom platí:

$$V_A = [V(x)]_{x=0} = \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot J_z} \quad [m]$$

$$\psi_A = [v'(x)]_{x=0} = - \frac{F \cdot l^2}{2E \cdot J_z} \quad [\text{rad}]$$

Príklad 2

Určite priehyb nosníka v mieste pôsobenia zatažujúcej sily F , keď je nosník uložený na dvoch podperách, má však v dvoch rovnako dlhých úsekoch rozdielne prierezy s tuhosťou v ohybe $E \cdot J_{z1}$ a $E \cdot J_{z2}$ (obr. 12.4a).



Obr. 12.4
Príklad

Riešenie

Ľahko možno ukázať, že veľkosť väzbových reakcií $R_A = R_B = \frac{F}{2}$ a vnútorné veličiny v dvoch úsekoch sú:

I. $x_1 \in (0, l/2)$

$$M(x_1) = R_A \cdot x_1 = \frac{F}{2} x_1$$

$$T(x_1) = \frac{F}{2}$$

II. $x_2 \in (0, l/2)$

$$M(x_2) = R_B \cdot x_2 = \frac{F}{2} x_2$$

$$T(x_2) = - \frac{F}{2}$$

Ich priehyby sú na obr. 12.4b.

Pretože máme dva úseky nespojitosti, musíme napísať dve diferenciálne rovnice a samostatne ich riešiť:

$$v''(x_1) = - \frac{M(x_1)}{E \cdot J_{z1}} = - \frac{F}{2 \cdot E \cdot J_{z1}} \cdot x_1$$

$$V''(x_2) = - \frac{M(x_2)}{E \cdot J_{z2}} = - \frac{F}{2E \cdot J_{z2}} \cdot x_2$$

$$V'(x_1) = - \frac{F}{4E \cdot J_{z1}} x_1^2 + C_1 \quad V'(x_2) = - \frac{F}{4E \cdot J_{z2}} x_2^2 + C_3$$

$$V(x_1) = - \frac{F}{12E \cdot J_{z1}} x_1^3 + C_1 \cdot x_1 + C_2 \quad V(x_2) = \frac{F}{12E \cdot J_{z2}} x_2^3 + C_3 \cdot x_2 + C_4$$

Integračné konštanty C_1 až C_4 určíme z okrajových podmienok:

1. $x_1 = 0 \dots V(x_1) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

2. $x_2 = 0 \dots V(x_2) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

3. $x_1 = x_2 = \frac{l}{2} \dots V(x_1) = V(x_2) \Rightarrow - \frac{F l^3}{96E \cdot J_{z1}} + C_1 \frac{l}{2} = - \frac{F \cdot l^3}{96E \cdot J_{z2}} + C_3 \frac{l}{2}$

4. $x_1 = x_2 = \frac{l}{2} \dots V'(x_1) = -V'(x_2) = \frac{F \cdot l^2}{16E \cdot J_{z1}} + C_1 = + \frac{F \cdot l^2}{16E \cdot J_{z2}} - C_3$

Riešením posledných dvoch rovníc dostaneme:

$$C_3 = \frac{F \cdot l^2}{48E} \cdot \left[\frac{J_{z2} + 2 \cdot J_{z1}}{J_{z1} + J_{z2}} \right]$$

$$C_1 = \frac{F \cdot l^2}{48E} \cdot \left[\frac{J_{z1} - J_{z2}}{J_{z1} \cdot J_{z2}} \right]$$

Priehyb v strede nosníka možno potom vypočítať zo vzťahu

$$V_C = [V(x_2)]_{x_2=l/2} = \frac{F \cdot l^3}{96E} \left(\frac{J_{z2} + 2 \cdot J_{z1}}{J_{z1} + J_{z2}} \right) - \frac{F \cdot l^3}{96E \cdot J_{z2}}$$

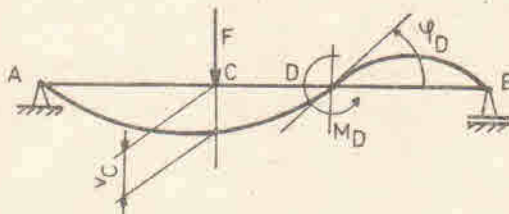
Za predpokladu konštantného prierezu $J_{z1} = J_{z2} = J_z$ bude

$$V_C = \frac{F \cdot l^3}{48E \cdot J_z}$$

12.2 Určenie deformácie nosníka I. Castiglianovou vetou

V úvode tohto skrípta sme ukázali, že posunutie pôsobiska sily (resp. natočenia dotýčnice k priehybovej čiare v mieste pôsobenia silovej dvojice)

je rovné parciálnej derivácii celkovej energie napätosti podľa danej sústredenej sily (resp. podľa sústredeného momentu).
Uvažujme nosník podľa obr. 12.5.



Obr. 12.5
Deformácia nosníka

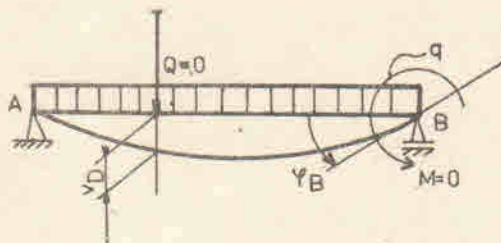
Priehyb nosníka v mieste C a uhol natočenia v mieste D bude

$$y_C = \frac{\partial A}{\partial F} \quad (12-5)$$

$$\psi_D = \frac{\partial A}{\partial M_D} \quad (12-6)$$

V prípade, že v hľadanom mieste nosníka nepôsobí sústredená sila, pri výpočte priehybu postupujeme takto (obr. 12.6):

- V predpokladanom smere priehybu vložíme fiktívnu sústredenú silu $Q = 0$
- Silu Q považujeme za ďalšie vonkajšie zaťaženie, ktoré fiktívne ovplyvňuje tak veľkosť väzbových reakcií, ako aj vnútorných síl
- Po vykonaní parciálnej derivácie celkovej energie napätosti podľa Q a pred integráciou po dĺžke nosníka dosadíme za $Q = 0$.



Obr. 12.6
Deformácia nosníka

Čiže, napr. priehyb nosníka v mieste D bude

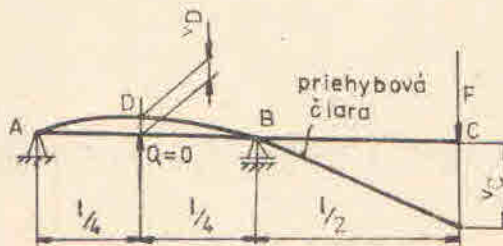
$$y_D = \left[\frac{\partial A}{\partial Q} \right]_{Q=0} \quad (12-7)$$

Podobne pre uhol natočenia v mieste B dostaneme:

$$\varphi_B = \left[\frac{\partial A}{\partial M} \right]_{M=0} \quad (12-8)$$

Príklad 1

Určite priehyb nosníka v mieste C a D, keď je dané F, l, E, J_z (obr. 12.7).



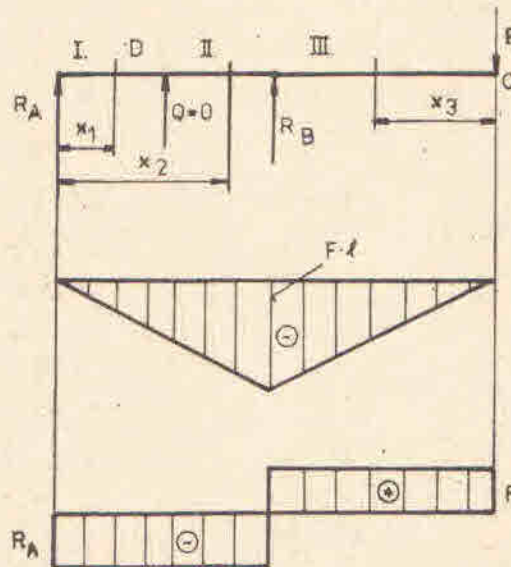
Obr. 12.7
Deformácia nosníka

Riešenie

Priehyb v mieste D bude

$$v_D = \left[\frac{\partial A}{\partial Q} \right]_{Q=0}$$

Na určenie energie napätosti potrebujeme vyriešiť priebeh ohybových momentov podľa predtým stanoveného postupu.



Obr. 12.8
Príklad

1. Väzbové reakcie:

$$\sum F_{iy} = 0 : \quad F - R_A - R_B - Q = 0$$

$$\sum M_A = 0 : \quad F \cdot 2l - R_B \cdot l - Q \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_B = 2F - \frac{Q}{2}$$

$$\sum M_B = 0 : \quad F \cdot l + R_A \cdot l + Q \cdot \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_A = -F - \frac{Q}{2}$$

Kontrola: $F - (-F - \frac{Q}{2}) + 2F - \frac{Q}{2} = 0$
 $0 = 0$ } reakcie sú správne vypočítané

Je zrejme, že reakcia R_A pôsobí v skutočnosti opačne, ako sme ju orientovali na obr. 12.8a.

2. Vzhľadom na nespojitosť zaťaženia volíme na nosníku tri úseky a v nich myslané rezy.

3. Ohybový moment a priečna sila:

I. $x_1 \in (0, \frac{l}{4})$

$$M(x_1) = R_A \cdot x_1 = (-F - \frac{Q}{2})x_1$$

$$T(x_1) = -F - \frac{Q}{2}$$

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial Q} = -\frac{x_1}{2}$$

II. $x_2 \in (l/4, l/2)$

$$M(x_2) = R_A \cdot x_2 + Q(x_2 - \frac{l}{4})$$

$$T(x_2) = (-F - \frac{Q}{2})x_2 + Q(x_2 - \frac{l}{4})$$

$$T(x_2) = -F - \frac{Q}{2} + Q = \frac{Q}{2} - F$$

$$\frac{\partial M(x_2)}{\partial Q} = -\frac{x_2}{2} + x_2 - \frac{l}{4} = \frac{x_2}{2} - \frac{l}{4}$$

III. $x_3 \in (0, l/2)$

$$M(x_3) = -F \cdot x_3$$

$$T(x_3) = F$$

$$\frac{\partial M(x_3)}{\partial Q} = 0$$

4. Priebeh $M(x)$ a $T(x)$ je znázornený (po dosadení za $Q = 0$) na obr. 12.8b.

Celková energia napätosti bude

$$A = A_I + A_{II} + A_{III} = \frac{1}{2E \cdot J_z} \left[\int_0^{l/4} M^2(x_1) dx_1 + \int_{l/4}^{l/2} M^2(x_2) dx_2 + \int_0^{l/2} M^2(x_3) dx_3 \right]_{Q=0}$$

Priehyb v mieste D bude

$$v_D = \left[\frac{\partial A}{\partial Q} \right]_{Q=0} = \frac{1}{2E \cdot J_z} \left[\int_0^{l/4} 2 \cdot M(x_1) \cdot \frac{\partial M(x_1)}{\partial Q} dx_1 + \dots + \dots \right]_{Q=0}$$

resp. po úprave a dosadením za parciálne derivácie podľa Q dostaneme:

$$v_D = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\int_0^{l/4} M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial Q} dx_1 + \int_{l/4}^{l/2} M(x_2) \frac{\partial M(x_2)}{\partial Q} dx_2 \right]_{Q=0}$$

$$v_D = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\int_0^{l/4} \left(-F - \frac{Q}{2}\right) \cdot x_1 \left(-\frac{x_1}{2}\right) dx_1 + \int_{l/4}^{l/2} \left[\left(-F - \frac{Q}{2}\right) \cdot x_2 + Q\left(x_2 - \frac{l}{4}\right)\right] \cdot \left(\frac{x_2}{2} - \frac{l}{4}\right) dx_2 \right]_{Q=0}$$

Teraz dosadíme za Q = 0, potom

$$v_D = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\int_0^{l/4} F \frac{x_1^2}{2} dx_1 + \int_{l/4}^{l/2} -F \cdot x_2 \left(\frac{x_2}{2} - \frac{l}{4}\right) dx_2 \right]$$

$$v_D = \frac{F \cdot l^3}{128 E \cdot J_z}$$

Priehyb v mieste C určíme taktiež z 1. Castiglianovej vety:

$$v_C = \frac{\partial A}{\partial F}$$

Pre výpočet celkovej energie napätosti použijeme predchádzajúce vzťahy a tým, že za Q dosadíme nulu. Taktiež nám vypadne úsek nespojitosti č. II a zmení sa hranica úseku I.

Potom

$$A = A_I + A_{III} = \frac{1}{2E \cdot J_z} \int_0^{l/2} M^2(x_1) dx_1 + \frac{1}{2E \cdot J_z} \int_0^{l/2} M^2(x_3) dx_3$$

alebo

$$v_C = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\int_0^{l/2} M(x_1) \frac{\partial M(x_1)}{\partial F} dx_1 + \int_0^{l/2} M(x_3) \frac{\partial M(x_3)}{\partial F} dx_3 \right]$$

pričom

$$\frac{\partial M(x_1)}{\partial F} = -x_1$$

$$\frac{\partial M(x_3)}{\partial F} = -x_3$$

Potom

$$V_C = \frac{1}{E \cdot J_z} \left[\int_0^{l/2} (-F \cdot x_1)(-x_1) dx_1 + \int_0^{l/2} (-F \cdot x_3)(-x_3) dx_3 \right]$$

$$= \frac{1}{E \cdot J_z} \left\{ \left[F \frac{x_1^3}{3} \int_0^{l/2} \right] + \left[F \frac{x_3^3}{3} \int_0^{l/2} \right] \right\}$$

$$V_C = \frac{F \cdot l^3}{12E \cdot J_z}$$

12.3 Riešenie staticky neurčitých nosníkov

Z hľadiska zvýšenia únosnosti nosníkov treba v praxi často voliť viacero podpier alebo iných väzieb. Z hľadiska riešenia takýchto úloh odoberáme vlastne telesu viac stupňov voľnosti pohybu, ako je potrebné na zaručenie statickej rovnováhy. Na výpočet väzbových reakcií nám už stačia statické podmienky rovnováhy, preto ich musíme doplniť deformačnými podmienkami. Takéto nosníky nazývame staticky neurčitými.

Postup riešenia staticky neurčitých nosníkov

1. Nosník staticky neurčitý premeníme na systém staticky určitý, a to tak, že prebytočné väzby odstránime a nahradíme ich staticky neurčitými väzbovými reakciami (sily alebo momenty sil).
2. Podľa počtu staticky neurčitých reakcií napíšeme rovnaký počet deformačných podmienok, z ktorých určíme staticky neurčitú reakciu. Deformačné podmienky vyjadrujú známy priehyb alebo uhol natočenia v nejakom bode nosníka (v miestach odstránených väzieb).
3. V ďalšom postupujeme ako pri úlohách staticky určitých s tým, že vypočítané staticky neurčité reakcie považujeme za ďalšie vonkajšie zaťaženie.

Treba pripomenúť, že pomerne jednoducho možno analytickými metódami riešiť raz staticky neurčité rovinné nosníky. Pre zložitejšie nosníkové konštrukcie treba použiť neumerické metódy. Princíp riešenia staticky neurčitých nosníkov si ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príkl

Navrh

dov

Riešen

Nosník

tý, pr

nosti.

1. Ods

tu

12.

2. Pre

jedi

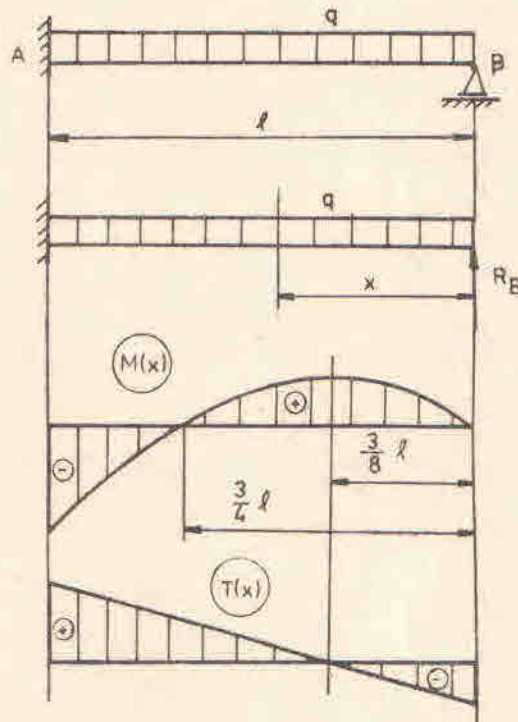
ka

Ďalší

ky. Pr

Príklad 1

Navrhnete kruhový prierez nosníka podľa obr. 12.9a, keď je dané q, l, E, σ_{dov} .



Obr. 12.9
Príklad

Riešenie

Nosník, ktorý má v rovine 3 stupne voľnosti pohybu, je raz staticky neurčitý, pretože mu dve väzby (votknutie a posuvný kĺb) odoberajú 4 stupne voľnosti.

1. Odstránili sme napr. väzbu v bode B a nahradili sme ju staticky neurčitou reakciou R_B . Staticky určitý systém nosníka je znázornený na obr. 12.9b.
2. Pretože máme jednu staticky neurčitú reakciu (silu R_B), stačí napísať jednu deformačnú podmienku. V našom prípade je zrejmé, že priehyb nosníka v mieste B je rovný nule

$$v_B = 0$$

Ďalší postup riešenia je závislý od spôsobu vyjadrenia deformačnej podmienky. Priehyb v danom bode možno vyjadriť napr. I. Castiglianovou vetou:

$$V_B = \frac{\partial A}{\partial R_B} = 0$$

Takýto tvar Castiglianovej vety (keď pravá strana rovnice je rovná nule) je známy pod pojmom II. Castiglianova veta.

Definícia II. Castiglianovej vety

Parciálna derivácia celkovej energie napätosti podľa staticky neurčitej veličiny je rovná nule.

V prípade staticky neurčitého momentu má II. Castiglianova veta tvar

$$\frac{\partial A}{\partial M} = 0$$

Energia napätosti bude

$$A = \frac{1}{2E \cdot J_z} \int_0^l M^2(x) \cdot dx$$

kde pre $x \in (0, l)$ je

$$M(x) = R_B \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$T(x) = -R_B + q \cdot x$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial R_B} = x$$

Potom

$$\frac{\partial A}{\partial R_B} = \frac{1}{2E \cdot J_z} \int_0^l 2 \cdot M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial R_B} \cdot dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^l M(x) \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial R_B} \cdot dx = 0$$

$$\int_0^l (R_B \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}) \cdot x \cdot dx = 0$$

$$R_B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

3. Priebeh $M(x)$ a $T(x)$ je určený na obr. 12.9c zo vzťahov:

$$M(x) = \frac{3}{8} q \cdot l \cdot x - q \frac{x^2}{2}$$

$$T(x) = -\frac{3}{8} q \cdot l + qx$$

Pretože $M(x)$ je funkciou druhého rádu, na určenie jej priebehu bolo treba stanoviť jej hodnoty v hraničných bodoch intervalu, nulové body a extrémny funkcie.

Napr. poloha extrémnu $M(x)$ je v bode, kde

$$M'(x) = \frac{3}{8} q \cdot l - qx = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{8} l$$

Pretože $M''(x) = -q$, v bode $x = \frac{3}{8} l$ je maximum, ktorého hodnota je

$$\left[M(x) \right]_{x = \frac{3}{8} l} = \frac{9}{128} q \cdot l^2$$

Nulovú čiaru pretína $M(x)$ v $x = \frac{3}{4} l$.

Pre $x = l$ je $M(x) = -\frac{q \cdot l^2}{8}$, čo je zároveň maximálnou hodnotou ohybového momentu.

Nebezpečný prierez nosníka je v mieste votknutia, kde

$$|M_{o \max}| = q \cdot \frac{l^2}{8}$$

$$T_{\max} = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l$$

Potom

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{dov}$$

$$\frac{\frac{q \cdot l^2}{8}}{0,1d^3} \leq \sigma_{dov} \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{q \cdot l^2 / 8}{0,1 \cdot \sigma_{dov}}}$$

Vypočítaný prierez nosníka $S = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ treba ešte skontrolovať v šmyku priečnou silou ($\tau_{dov} = 0,6 \cdot \sigma_{dov}$)

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{\frac{3}{4} S} \leq \tau_{dov}$$

$$\frac{\frac{1}{4} \sigma_{kt}}{s} \cdot q \cdot l \leq \tau_{dov}$$

Ak je táto podmienka splnená, vypočítaný prierez pevnostne vyhovuje.

12.4 Riešené príklady k ohybu rovinných nosníkov

Príklad 1

Pre nosník uložený a zaťažený podľa obr. 12.10a treba navrhnúť prierezy podľa obr. 12.11 a porovnať spotrebu materiálu pri použití jednotlivých profilov, ak za porovnávaciu jednotku považujeme hmotnosť nosníka tvaru I. profilu.

Dané: $M = 10^4 \text{ Nm}$, $l = 1 \text{ m}$, $\rho = 7,85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\sigma_{kt} = 300 \text{ MPa}$, $s = 3$,

$$\alpha = \frac{D_1}{D} = 0,8.$$

Riešenie

Ohybový moment v reze x je

$$M(x) = M = \text{const}$$

Priečna sila podľa Žuravského vety je

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} = 0$$

Priebeh ohybového momentu a priečnej sily je uvedený na obr. 12.10b.

Maximálny ohybový moment teda je

$$M_o \text{ max} = M$$

Podľa vzťahu (11-15) podmienka pevnosti v ohybe je

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_o \text{ max}}{W_o} \leq \sigma_{\text{Dov}}, \quad \sigma_{\text{Dov}} = \frac{\sigma_{kt}}{s} = \frac{300}{3} = 100 \text{ MPa}$$

odkiaľ potrebný prierezový modul v ohybe

$$W_o = \frac{M_o \text{ max}}{\sigma_{\text{Dov}}} = \frac{M}{\sigma_{\text{Dov}}} = \frac{10^4}{100 \cdot 10^6} = 10^{-4} \text{ m}^3$$

1. Návrh nosníka kruhového prierezu

$$W_0 = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 W_0}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,1006 \text{ m}$$

volíme $d \approx 100 \text{ mm}$.

Tisáž hriadeľa kruhového prierezu potom je

$$G_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot l \cdot \rho = 61,65 \text{ kg}$$

2. Nosník medzikruhového prierezu

Prierezový modul v ohybe je

$$W_0 = \frac{\pi \cdot D^3}{32} (1 - \alpha^4)$$

odkiaľ

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_0}{\pi (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 10^{-4}}{(1 - 0,8^4)}} = 0,1199 \text{ m}$$

Berieme $D = 0,12 \text{ m} = 120 \text{ mm}$

Potom $D_1 = 0,8 \cdot 0,12 = 0,096 \text{ m} = 96 \text{ mm}$

Hmotnosť nosníka medzikruhového prierezu potom je

$$G_2 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} (1 - \alpha^2) \cdot l \cdot \rho = 31,96 \text{ kg}$$

3. Nosník s prierezom tenkostennej rúrky

Polárny moment zotrvačnosti

$$J_p = \pi \cdot D_s \cdot h \left(\frac{D_s}{2}\right)^2 = \frac{D_s^3 \cdot h}{4} = \frac{D_s^3}{4} \cdot \frac{D_s}{20} = \frac{D_s^4}{80}$$

Moment zotrvačnosti k osi z potom je

$$J_z = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi \cdot D_s^4}{160}$$

Prierezový modul v ohybe potom je

$$W_o = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{\frac{\pi \cdot D_s^4}{160}}{\frac{D_s + h}{2}} = \frac{\pi \cdot D_s^3}{84}$$

odkiaľ

$$D_s = \sqrt[3]{\frac{84 \cdot W_o}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{84 \cdot 10^{-4}}{\pi}} = 0,1388 \text{ m}$$

Vzmememe $D_s = 0,139 \text{ m} = 139 \text{ mm}$.

Hrúbka steny rúrky bude

$$h = \frac{D_s}{20} = \frac{139}{20} = 6,95 \text{ mm}$$

Hmotnosť nosníka s prierezom tenkostennej rúrky je

$$G_3 = \pi \cdot D_s \cdot h \cdot l \cdot \rho = 23,824 \text{ kg}$$

4. Nosník štvorcového prierezu

$$W_o = \frac{a^3}{6}, \text{ odkiaľ } a = \sqrt[3]{6 \cdot 10^{-4}} = 0,843 \text{ m}$$

Vzmememe $a = 0,084 \text{ m} = 84 \text{ mm}$.

Hmotnosť nosníka štvorcového prierezu je

$$G_4 = a^2 \cdot l \cdot \rho = 55,39 \text{ kg}$$

5. Nosník obdĺžnikového prierezu

$$W_o = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} b (2b)^2 = \frac{2}{3} b^3$$

odkiaľ

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_o}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^{-4}}{2}} = 0,053 \text{ m} = 53 \text{ mm}$$

Hmotnosť nosníka obdĺžnikového prierezu

$$G_5 = b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 2b^2 \cdot l \cdot \rho = 44,1 \text{ kg}$$

6. Nosník s prierezom tenkostenného uzavretého profilu tvaru obdĺžnika

Osový moment zotrvačnosti

$$J_z = \frac{1}{12} (b_s + \frac{b_s}{10}) \cdot (2b_s + \frac{b_s}{10})^3 - \frac{1}{12} (b_s - \frac{b_s}{10}) \cdot (2b_s - \frac{b_s}{10})^3$$

Po úprave bude

$$J_z = 3345 \cdot 10^{-4} b_s^4$$

Vzdialenosť krajných vlákien od neutrálnej osi je

$$y_{\max} = \frac{1}{2} (2b_s + \frac{b_s}{10}) = \frac{21}{20} b_s$$

a prierezový modul v ohybe

$$w_o = \frac{J_z}{y_{\max}} = 3186 \cdot 10^{-4} b_s^3$$

odkiaľ

$$b_s = \sqrt[3]{\frac{w_o}{3186 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt[3]{\frac{10^{-4}}{3186 \cdot 10^{-4}}} = 0,068 = 68 \text{ mm}$$

$$h = \frac{b_s}{10} = \frac{68}{10} = 6,8 \text{ mm}$$

Hmotnosť nosníka potom je

$$G_6 = S \cdot l \cdot \rho = (b_s + h)(h_s + h) - (b_s - h)(h_s - h) \cdot l \cdot \rho = 21,78 \text{ kg}$$

7. Nosník s prierezom profilu I

Pre prierezový modul $w_o = 10^{-4} \text{ m}^3$ nájdeme v ČSN 42 0076 zodpovedajúci najbližší vyšší profil I 16 s hmotnosťou

$$G_7^* = 17,9 \text{ kg}$$

Urobme pomery hmotnosti nosníkov s prislúchajúcimi prierezmi vzhľadom na zvolený základný I profil:

$$\frac{G_1}{G_7^*} = \frac{61,65}{17,9} = 3,45 \qquad \frac{G_2}{G_7^*} = \frac{31,96}{17,9} = 1,785$$

$$\frac{G_3}{G_7^*} = \frac{23,842}{17,9} = 1,332$$

$$\frac{G_4}{G_7^*} = \frac{55,39}{17,9} = 3,094$$

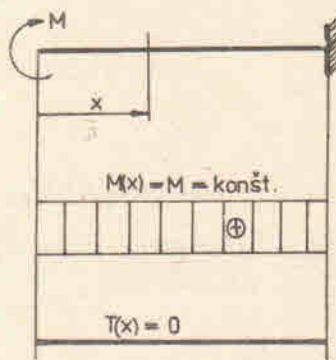
$$\frac{G_5}{G_7^*} = \frac{44,1}{17,9} = 2,464$$

$$\frac{G_6}{G_7^*} = \frac{21,78}{17,9} = 1,217 \quad \frac{G_7^*}{G_7^*} = 1$$

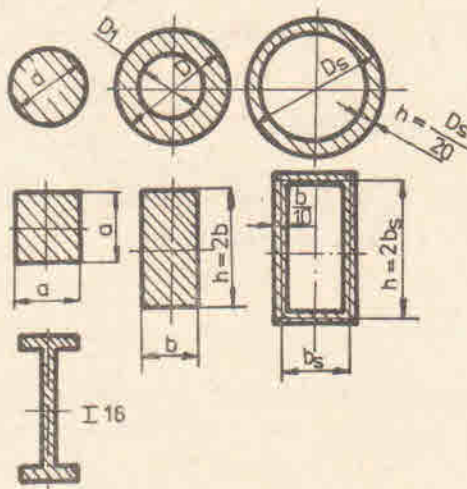
Zaradením týchto pomerov jednotlivých profilov, ako sú uvedené na obr. 12.11, dostaneme:

$$3,45 : 1,785 : 1,332 : 3,094 : 2,464 : 1,217 : 1$$

Z uvedených pomerov vyplýva, že najväčšiu hmotnosť má nosník kruhového prierezu, a to o 245 % väčšiu ako najekonomickjší I. profil. Najviac sa približuje k nosníku s prierezom I. profilu nosník s prierezom tvaru tenkostenného uzavretého profilu obdĺžnikového prierezu, ktorý má väčšiu hmotnosť len o 21,7 %.



Obr. 12.10
Príklad

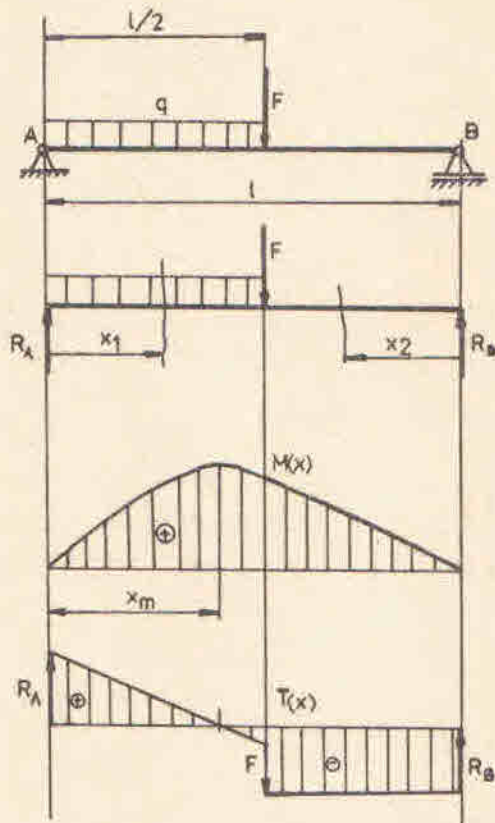


Obr. 12.11
Používané prierezy nosníka

Příklad 2

Vypočítajte a nakreslite priebeh ohybového momentu a posúvajúcej sily nosníka uloženého a zaraženého podľa obr. 12.12a.

Dané: $F = 1 \text{ MN}$, $q = 4 \text{ MN/m}$ a $l = 2 \text{ m}$.



Obr. 12.12
Příklad

Riešenie

Nosník je staticky určitý. Vázby uvoľníme a ich účinnok nahradíme väzbovými reakciami (obr. 12.12b), ktoré určíme zo statických podmienok rovnováhy:

$$\sum M_A = 0 : R_B \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0$$

$$\sum M_B = 0 : -R_A \cdot l + q \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right) + F \cdot \frac{l}{2} = 0$$

odkiaľ

$$R_A = \frac{F}{2} + \frac{3}{8} q \cdot l = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot 4 \cdot 2 = 3,5 \text{ MN}$$

$$R_B = \frac{F}{2} + \frac{q \cdot \ell}{2} = \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot 2}{8} = 1,5 \text{ MN}$$

Ohybový moment a posúvacia sila

Vzhľadom na porušenie spojitosti zaraženia musíme riešiť pre ohybový moment a posúvacia silu dva úseky:

$$\left. \begin{aligned} M_I(x_1) &= R_A \cdot x_1 - \frac{q \cdot x_1^2}{2} \\ T_I(x_1) &= \frac{dM_I(x_1)}{dx_1} = R_A - q \cdot x_1 \end{aligned} \right\} x_1 \in (0, \ell/2)$$

$$M_I(0) = 0, \quad M_I\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{R_A \cdot \ell}{2} - \frac{q}{2} \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 1,5 \text{ MNm}$$

Určenie extrémneho ohybového momentu

$$\left[\frac{dM_I(x_1)}{dx_1} \right]_{x_1=x_m} = R_A - q \cdot x_m = 0$$

odkiaľ

$$x_m = \frac{R_A}{q} = \frac{3,5}{4} = \frac{7}{8} = 0,875 \text{ m}$$

Hodnota x_m zodpovedá maximu

$$M_I(x_m) = R_A x_m - \frac{q}{2} x_m^2 = 1,53 \text{ MNm}$$

$$T_I(0) = R_A = 3,5 \text{ MN}, \quad T_{II}\left(\frac{\ell}{2}\right) = R_A - \frac{q \cdot \ell}{2} = -0,5 \text{ MN}$$

V úseku II

$$M_{II}(x_2) = R_B x_2$$

$$T_{II}(x_2) = - \frac{dM_{II}(x_2)}{dx_2} = -R_B = -1,5 \text{ MN} = \text{const} \quad x_2 \in (0, \frac{\ell}{2})$$

Priebeh ohybového momentu a posúvajúcej sily je uvedený na obr. 12.12c,d. Maximálny ohybový moment je

$$M_{o \max} = M_I(x_m) = 1,53 \text{ MNm}$$

a maximálna posúvejúca sila

$$T_{\max} = T_I(0) = 3,5 \text{ MN}$$

vý moment

• $\frac{f}{2}$)

12c, d.