

2. Statika hmotného bodu a telesa

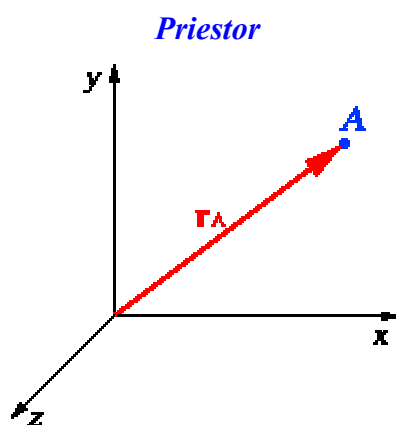
Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali vedieť:

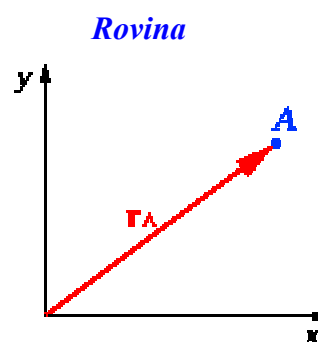
- Ako je jednoznačne určená poloha hmotného bodu a telesa v rovine, resp. v priestore
- Koľko stupňov voľnosti má hmotný bod a teleso v rovine, resp. v priestore
- Čo je to statická určitosť resp. neurčitosť uloženia a ako sa vypočíta
- Ako sa uvoľňujú väzby, ich náhrada väzbovými reakciami
- Ako možno vypočítať vonkajšie väzbové reakcie

2.1 JEDNOZNAČNÉ URČENIE POLOHY HMOTNÉHO BODU A TELESA

Poloha hmotného bodu v rovine i v priestore je jednojednoznačne určená jeho polohovým vektorom vzhľadom na vzťažný súradnicový systém.

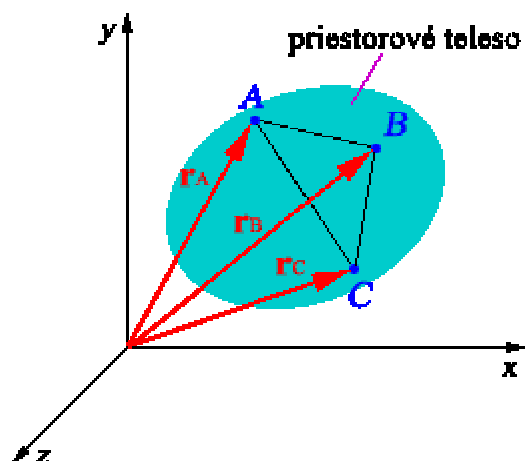


obr. 2.01a



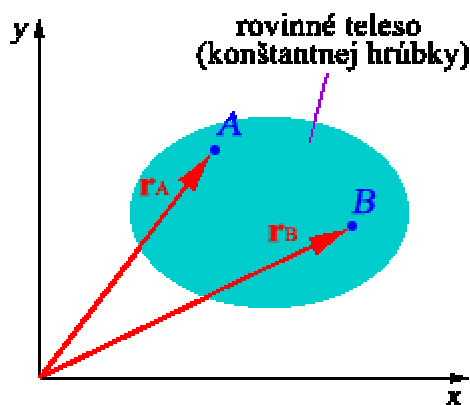
obr. 2.01b

Poloha telesa v priestore je jednojednoznačne určená polohovými vektormi jeho ľubovoľných troch bodov neležiacich na jednej priamke.



obr. 2.02

Poloha telesa v rovine je jednojednoznačne určená polohovými vektormi jeho ľubovoľných dvoch bodov ležiacich v danej rovine.

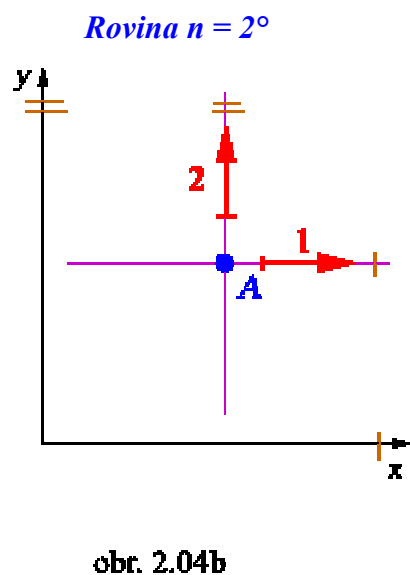
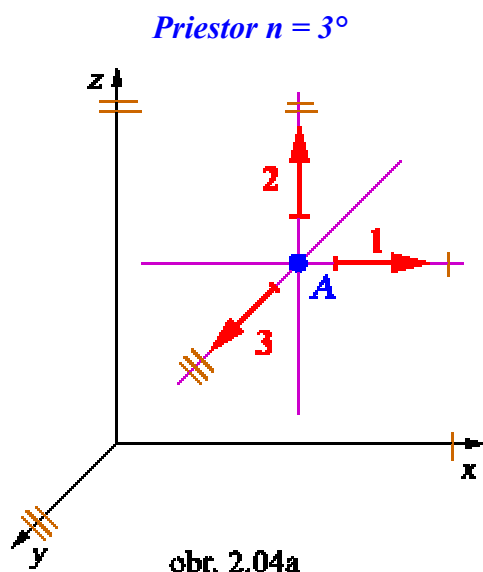


obr. 2.03

2.2 STUPNE VOĽNOSTI POHYBU

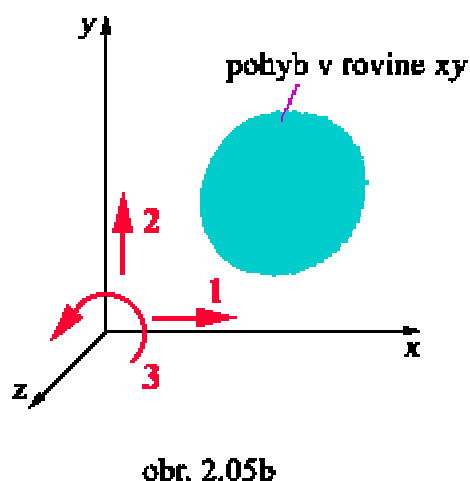
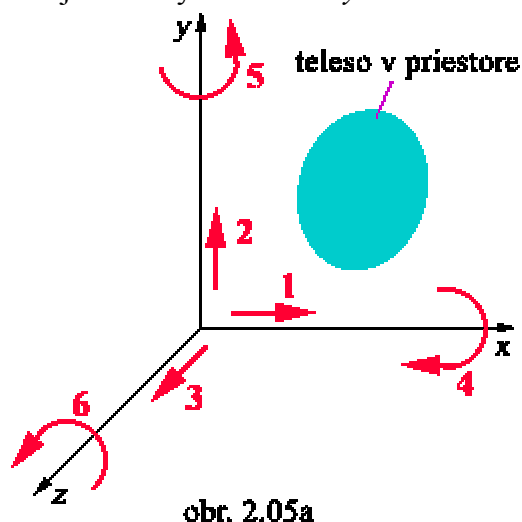
Hmotný bod v priestore má tri posuvné (translačné) stupne voľnosti pohybu **1-2-3** (napr. v smere osí vzťažného súradnicového systému). Keďže hmotný bod nemá definovaný tvar (je len abstrakciou malej časti telesa), rotačné stupne voľnosti sa mu neprisudzujú.

Hmotný bod v rovine má dva stupne voľnosti **1-2**.



Teleso má v priestore tri posuvné a tri rotačné stupne voľnosti. Má teda 6 stupňov voľnosti pohybu v priestore ($n=6^\circ$).

Teleso má v rovine dva posuvné a jeden rotačný (okolo osi z) stupeň voľnosti ($n=3^\circ$). Pohyb telesa je viazaný na rovinu xy.



2.3 VONKAJŠIE VÄZBY A VONKAJŠIE VÄZBOVÉ REAKCIE

Ak na teleso pôsobí nerovnovážna silová sústava, teleso je v pohybe. Aby sa nemohlo pohybovať, treba mu odobrať minimálne všetky stupne voľnosti pohybu väzbami. Väzbové reakcie spolu s vonkajšími zaťažujúcimi silami budú tvoriť rovnovážnu silovú sústavu a teleso bude v statickej rovnováhe. Väzbové reakcie vo väzbe pôsobia v smere odobraného stupňa voľnosti pohybu a ich veľkosť a orientácia je závislá na vonkajších silách. Pri ich výpočte ich spravidla vkladáme v kladnom zmysle - v zhode s orientáciou vzťažného súradnicového systému, a označujeme ich: R_A , R_{Ax} , M_A , A_x , ...

2.3.1 Statická určitost' - neurčitost' uloženia telesa

Je definovaná vzťahom: $i = n - r$, kde n je počet stupňov voľnosti pohybu telesa (v priestore $n = 6^\circ$; v rovine $n = 3^\circ$), r je počet stupňov voľnosti odobratých väzbami.

Môžu nastať prípady uloženia:

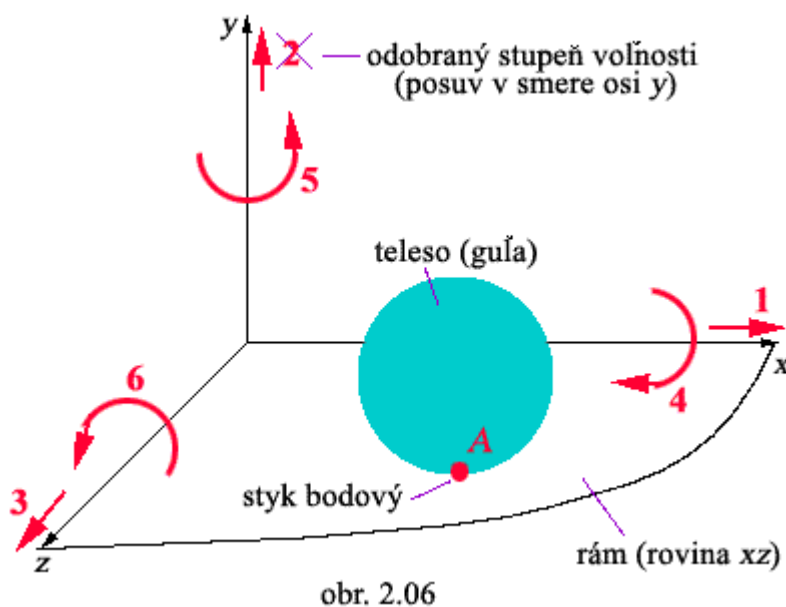
- a) $i = 0$: teleso má väzbami odobrané všetky možné stupne voľnosti pohybu - *staticky určité uloženie*
- b) $i > 0$: teleso nemá odobrané všetky stupne voľnosti, to znamená, že má pohyblivé uloženie - *staticky podurčené*. Toto uloženie je z hľadiska statickej stability telesa neprípustné.
- c) $i < 0$: teleso má odobratý väčší počet stupňov voľnosti pohybu ako ich v skutočnosti má - *statický neurčitý (preurčený) uloženie*.

Ak je teleso uložené staticky určito, na výpočet väzbových reakcií postačujú statické podmienky rovnováhy. Pri staticky neurčitom uložení je potrebné statické podmienky rovnováhy doplniť o ďalšie rovnice, vyplývajúce z deformácie telesa.

2.3.2 Typy väzieb, ich značky, náhrada väzieb väzbovými reakciami

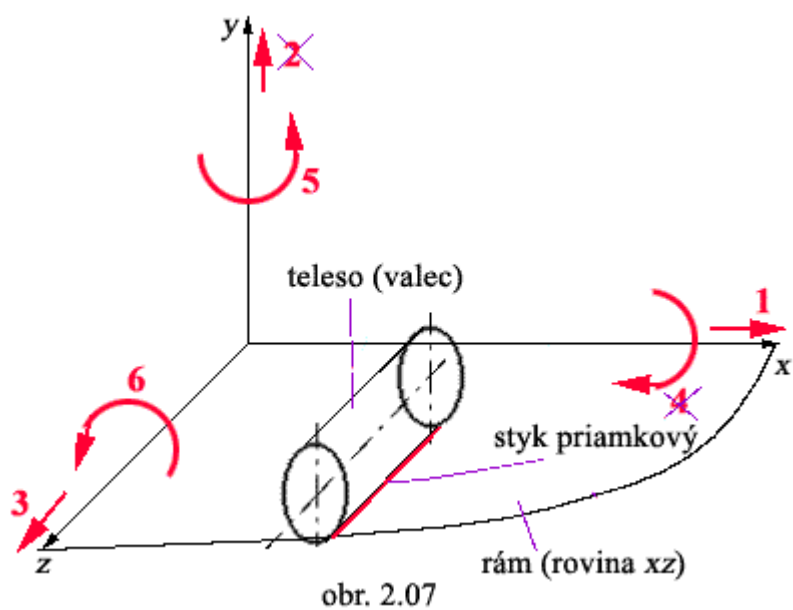
a) Priestorové úlohy

a1) Väzba odoberajúca $r = 1^\circ$ voľnosti, čiže $i = 6^\circ - 1^\circ = 5^\circ$ - teleso má ešte 5° stupňov voľnosti pohybu. Teleso (guľa) - jeho pohyb je viazaný na rovinu xz v stykovom bode A.

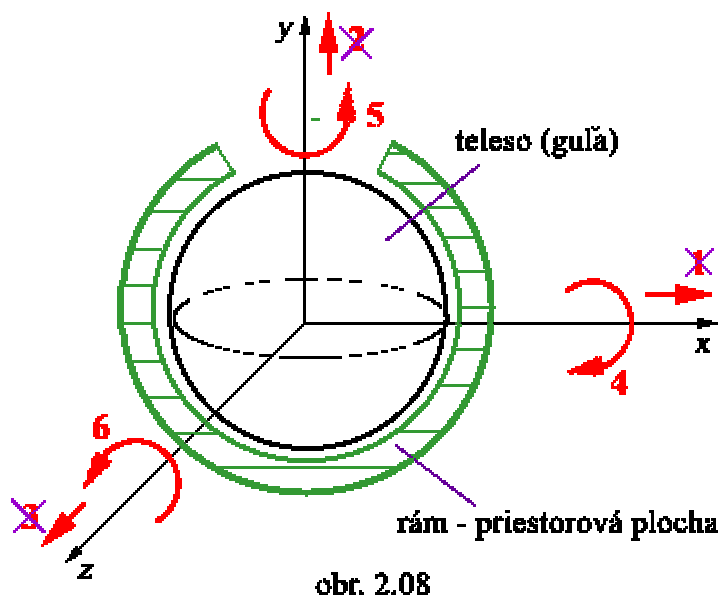


obr. 2.06

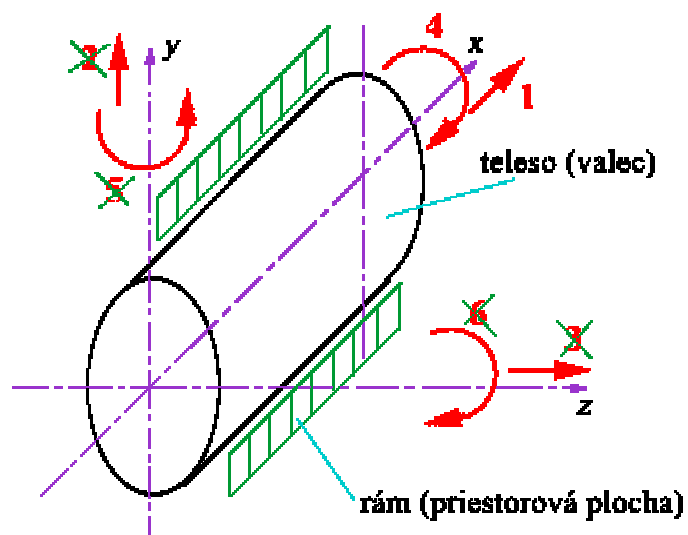
a2) Väzba odoberajúca $r = 2^\circ$ voľnosti, čiže $i = 6^\circ - 2^\circ = 4^\circ$ - teleso má ešte 4° stupne voľnosti pohybu. Teleso (valec) - jeho pohyb je viazaný na rovinu xz cez stykovú priamku. Väzba odoberá posuv v smere osi y a rotáciu okolo osi x .



a3) Väzba odoberajúca $r=3^\circ$ voľnosti, čiže $i=6^\circ-3^\circ=3^\circ$ - teleso má ešte 3° stupne voľnosti pohybu. Teleso(guľa) - jeho pohyb je viazaný na styk s priestorovou plochou. Väzba odoberá všetky tri posuvné stupne voľnosti pohybu.

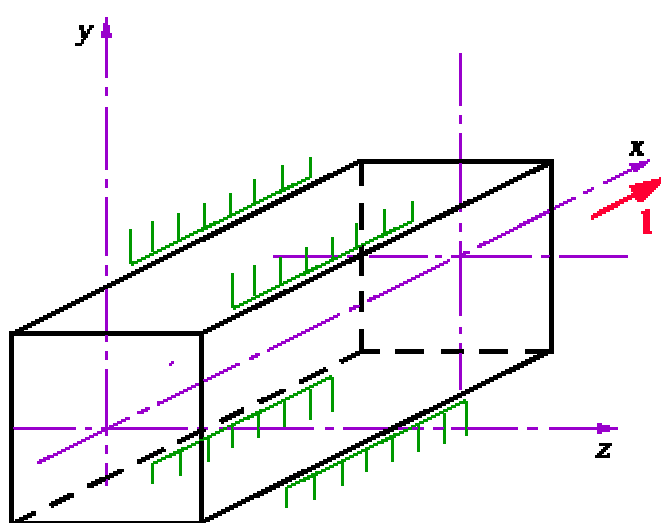


a4) Väzba odoberajúca $r=4^\circ$ voľnosti, čiže $i=6^\circ-4^\circ=2^\circ$ - teleso má ešte 2° stupne voľnosti pohybu. Väzba umožňuje telesu posuv v smere osi x a rotáciu okolo osi x .



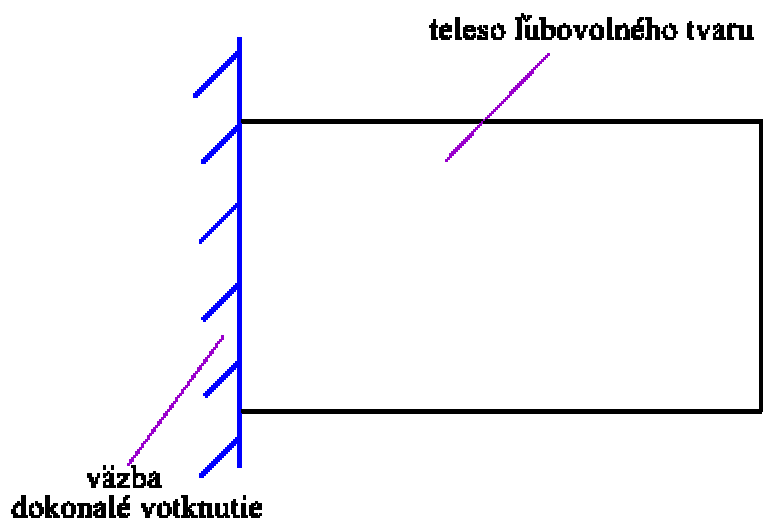
obr. 2.09

a5) Väzba odoberajúca $r=5^\circ$ voľnosti, čiže $i=6^\circ-5^\circ=1^\circ$ - teleso má jeden stupeň voľnosti pohybu. posuv v smere osi x .



obr. 2.10

a6) Vázba odoberajúca $r=6^\circ$ voľnosti, čiže $i=6^\circ-6^\circ=0^\circ$



obr. 2.11

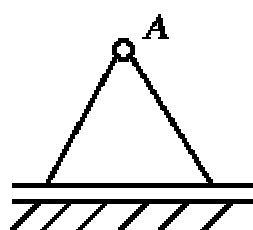
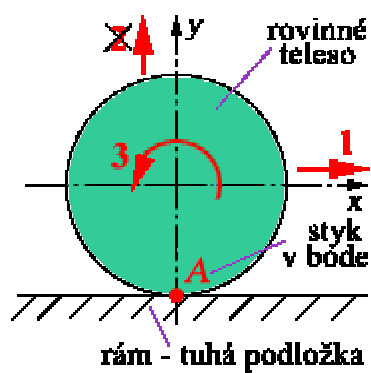
b) Rovinné úlohy

VÄZBA

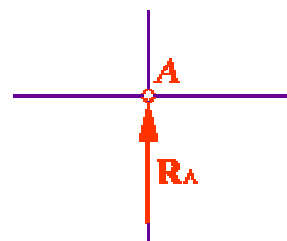
ZNAČKA

VÄZBOVÁ REAKCIA

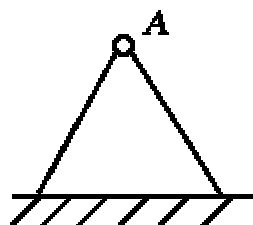
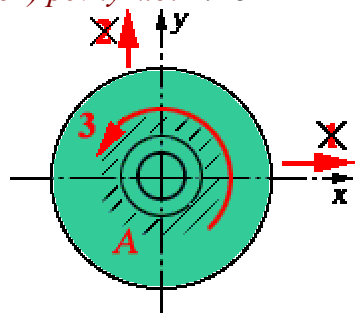
b1) posuvný klb: $i=3^\circ-1^\circ=2^\circ$ Vázba odoberá posuv v smere osi y .



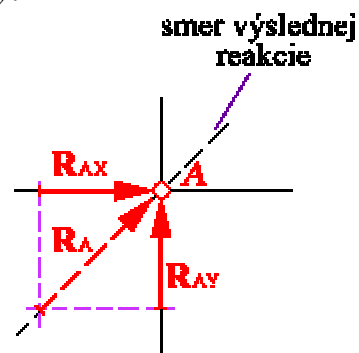
obr. 2.12



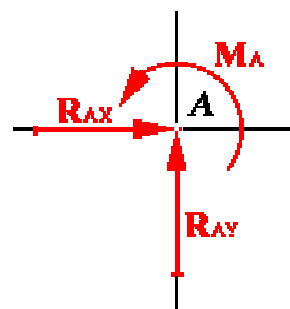
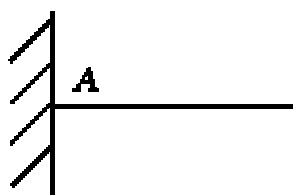
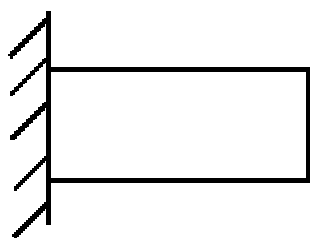
b2) pevný klb: $i=3^\circ-2^\circ=1^\circ$ Vázba odoberá posuv v smere osi x a y .



obr. 2.13



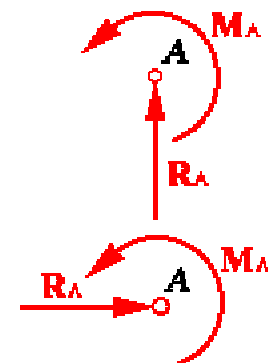
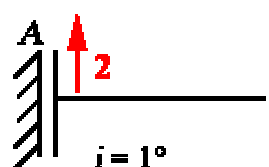
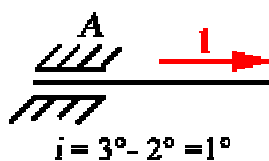
b3) dokonalé votknutie: $i=3^\circ-3^\circ=0^\circ$



obr. 2.14

c) Špeciálne väzby

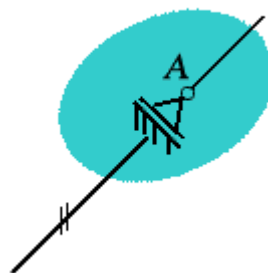
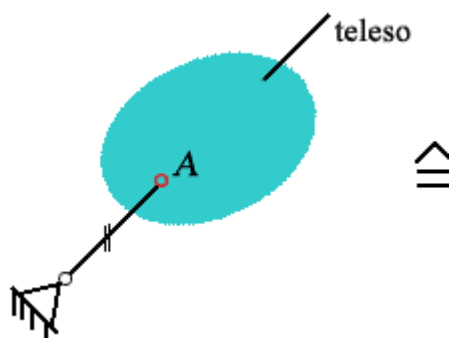
posuvné votknutie



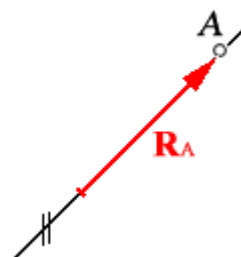
obr. 2.15

väzba prútom (lanom)

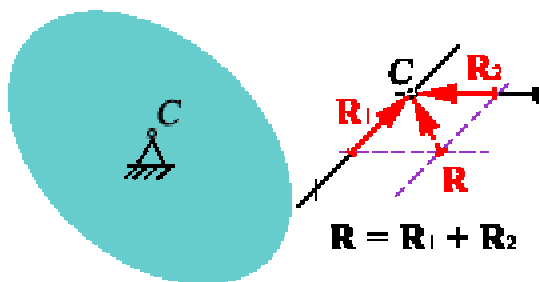
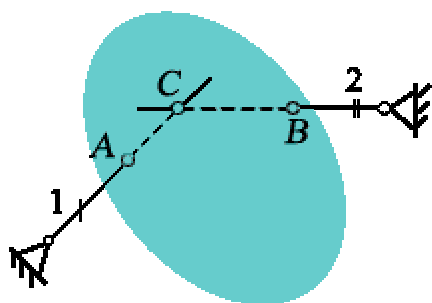
Odoberá jeden posuvný stupeň voľnosti v smere osi prúta. (lana). Jeden prút odoberá 1 stupeň voľnosti pohybu.



obr. 2.16



Dva prúty odoberajú dva stupne voľnosti.



obr. 2.17

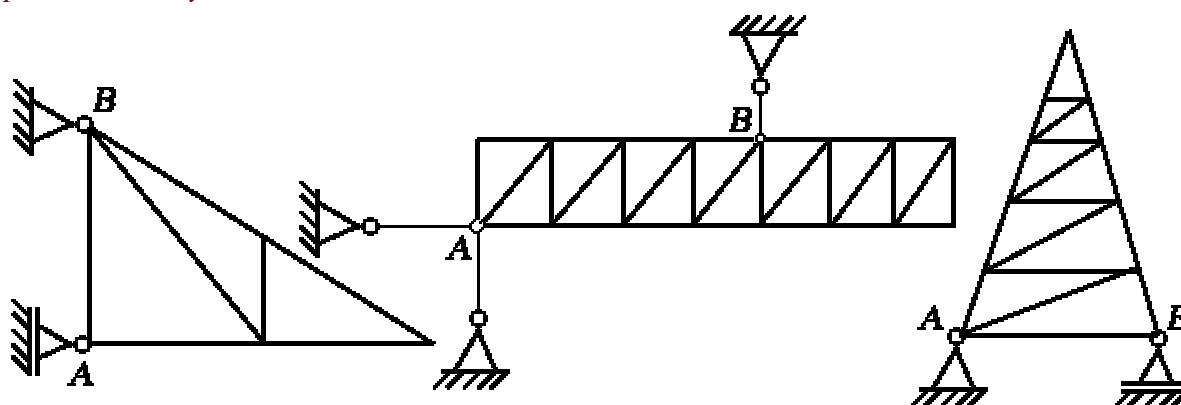
Poznámka: Každý pridaný prút odoberá ďalší stupeň voľnosti pohybu, jeho os však nesmie prechádzať spoločným priesečníkom osi dvoch predchádzajúcich prútov. Ako už bolo spomenuté, *upevnenie lanom je väzba jednosmerná*.

2.3.3 Príklady uloženia telesa

Stupne voľnosti sa telesu odoberajú kombináciou základných typov väzieb. Budeme predpokladať tzv. *ideálne väzby*, pri ktorých sa zanedbáva trenie a ich čiastočná poddajnosť. Pri veľmi presných výpočtoch je nutné túto neideálnosť väzieb zohľadniť, avšak pre väčšinu technických výpočtov je predpoklad ideálnej väzby prípustný.

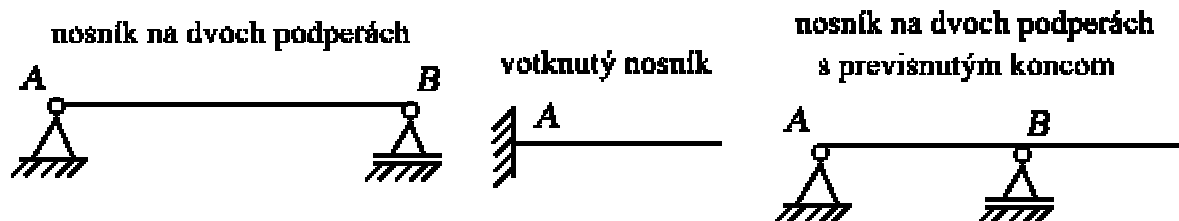
a) Staticky určité uloženie telesa v rovine: $i = n - r = 0$

a1) prútové sústavy



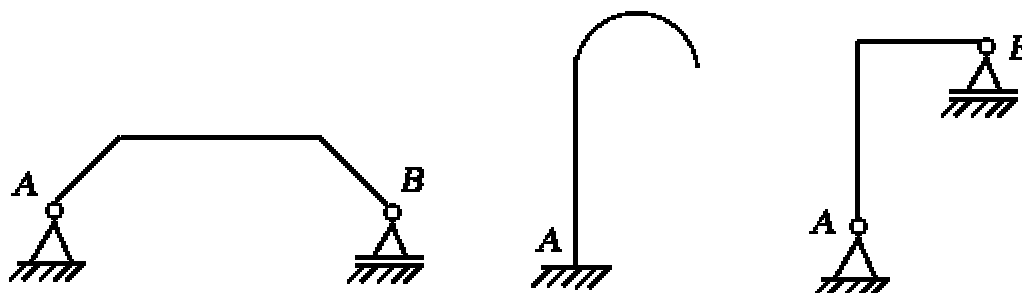
obr. 2.18

a2) nosníky



obr. 2.19

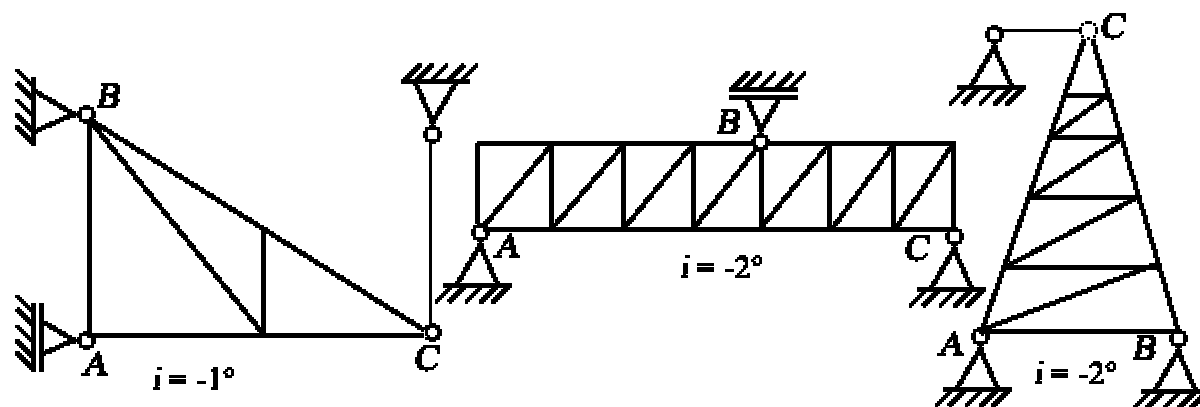
a3) lomené nosníky a zakrivené prúty



obr. 2.20

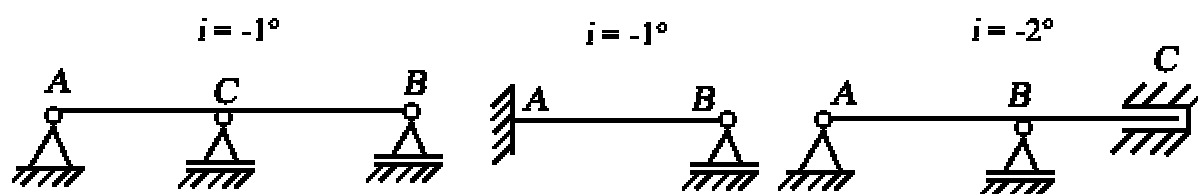
b) Staticky neurčité (preurčené) uloženie telesa v rovine: $i = n - r < 0^\circ$

b1) prútové sústavy



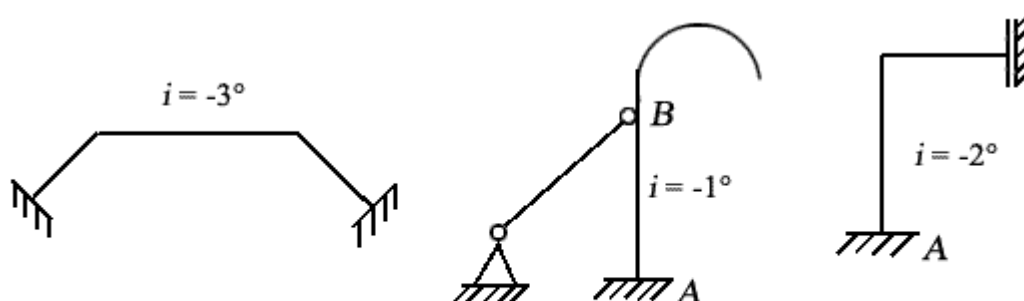
obr. 2.21

b2) nosníky



obr. 2.22

b3) lomené nosníky a zakrivené prúty



obr. 2.23

Poznámky:

Staticky určité uloženie zabezpečuje stabilné (tuhým pohybom nepohyblivé) upevnenie telesa. Pretože väzbové reakcie možno určiť zo statických podmienok rovnováhy, riešenie staticky určitých úloh je jednoduché. Ako uvidíme neskôr, najväčšou výhodou tohoto uloženia je, že teplotné namáhanie vyskytujúce sa v silnoprúdových a energetických zariadeniach nespôsobuje vznik dodatočných vnútorných síl, ktoré môžu spôsobiť mechanické poškodenie konštrukcie. Staticky určitá konštrukcia je však tuhostne poddajnejšia (vykazuje väčšie mechanické deformácie). **Staticky neurčité (preurčené) uloženie** spravidla vystužuje konštrukciu. Na statický výpočet však nepostačujú len statické podmienky rovnováhy, ale podľa stupňa statickej neurčitosti je ich nutné doplniť o tzv. **deformačné podmienky**. Statický výpočet týchto konštrukcií analytickými metódami je preto obtiažnejší. Použitie numerických

metód (napr. metóda konečných prvkov - MKP) však tento problém odstraňuje. Teplotné namáhanie (elektrické teplo, slnečné žiarenie, horúce pracovné médium) však predstavuje aj z hľadiska pevnosti konštrukcie nezanedbateľný nepriaznivý faktor.

2.4 ŠPECIÁLNE PRÍPADY STATICKEJ ROVNOVÁHY

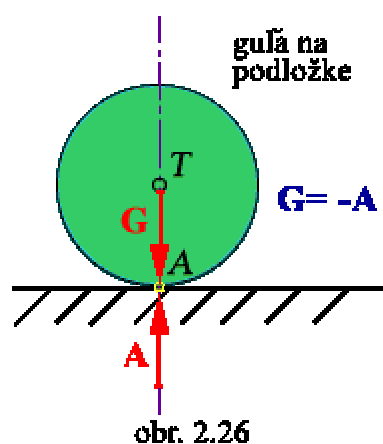
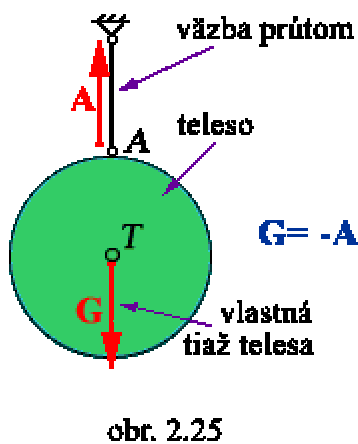
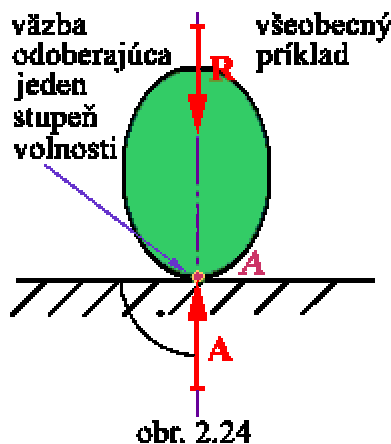
Dokonalé tuhé teleso uložené staticky určito, resp. neurčito (preurčene) sa pri zaťažení akýmkoľvek vonkajšími silami nepohybuje. Vonkajšie sily sú s väzbovými reakciami v statickej rovnováhe. Existujú však výnimky z tohto pravidla. Táto výnimka je spôsobená špeciálnou vonkajšou silovou sústavou, resp. špeciálnou kombináciou vonkajších väzieb.

a) Rovnováha staticky podurčene uloženého telesa

Teleso môže byť v statickej rovnováhe v prípade $n < r \Rightarrow i = n - r > 0^\circ$ vtedy, keď výslednica vonkajších síl pôsobí tak, že môže nastať statická rovnováha medzi ňou a výslednicou väzbových reakcií. Tento stav možno dokumentovať nasledovnými príkladmi:

a1) prípad uloženia: $n = 3^\circ$; $r = 1^\circ$; $i = 2^\circ$

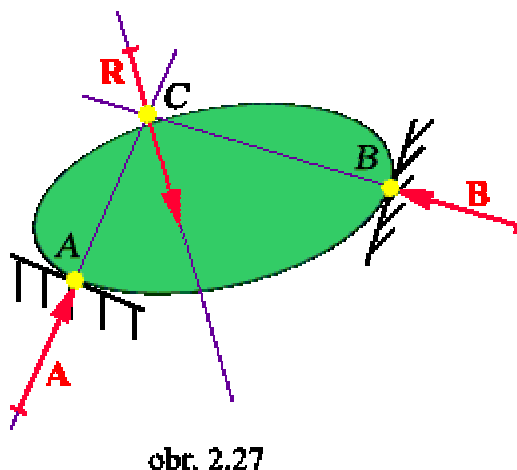
Telesu zostali v rovine dva stupne voľnosti. Výslednica vonkajších síl a väzbová reakcia ležia na spoločnej nositeľke, pričom platí: $\mathbf{R} = -\mathbf{A}$



a2) prípad uloženia: $n = 3^\circ$; $r = 2^\circ$; $i = 1^\circ$

Teleso má odobraté dva stupne voľnosti pohybu dvoma prútmí, alebo dvoma bodovými stykmi, pričom nositeľky väzbových reakcií A a B sa pretínajú v bode C. Ak výslednica vonkajších síl R prechádza tým istým bodom, potom platí silová rovnica rovnováhy $\mathbf{R} + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \dots = \mathbf{0}$ a teleso je v statickej rovnováhe.

Sily A, B a R tvoria centrálnu rovinnú rovnovážnu silovú sústavu.

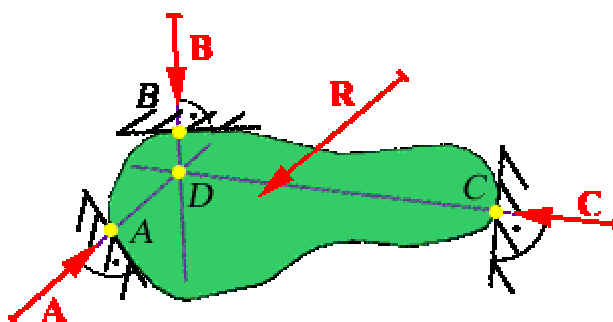


b) Statická nerovnováha staticky určito, resp. staticky neurčito (preurčene) uloženého telesa.

V dôsledku nesprávnej kombinácie väzieb je uloženie telesa nestabilné (teleso sa môže pohybovať). Zle zvolené väzby neplnia svoju funkciu - nazývajú sa *pasívne väzby*.

b1) prípad uloženia $n = 3^\circ$; $r = 3^\circ$; $i = 0^\circ$

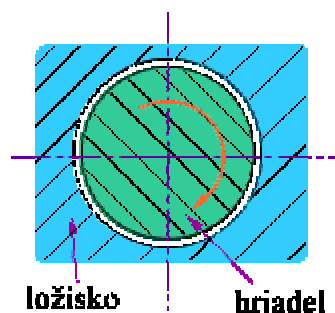
Teleso je uložené staticky určito tak, že nositeľky väzbových reakcií **A**, **B** a **C** sa pretínajú v bode **C**. Ak výslednica vonkajších síl **R** ide mimo bod **C**, teleso sa môže okolo bodu **D** virtuálne pootočiť.



obr. 2.28

Platí: $R + A + B + C + \dots = 0$

avšak $M \neq 0$



obr. 2.29

Pridaním ďalšej pasívnej väzby sa situácia nemení. Príkladom je uloženie hriadeľa točivého stroja v ložisku. Pasívne väzby sú cez styčné plochy hriadeľa a ložiska, vplyvom výslednej elektromagnetickej sily sa rotor v ložisku otáča. Špeciálne prípady uloženia sa však využívajú pri konštrukcii mechanizmov vykonávajúcich predpísaný pohyb (napr. pohony, roboty, mechatronické systémy, ...).

Poznámka:

Väzby treba voliť tak, aby vznikla stabilná rovnováha, t.j. aby nenastal prípad špeciálnej rovnováhy. V opačnom prípade každá zmena vonkajších síl spôsobí tuhý pohyb konštrukcií, ktorý je pri statických systémoch neprípustný.

2.5 VÝPOČET VÄZBOVÝCH REAKCIÍ STATICKY URČITÉHO ULOŽENIA

Postup výpočtu väzbových reakcií staticky určitých prípadov uloženia:

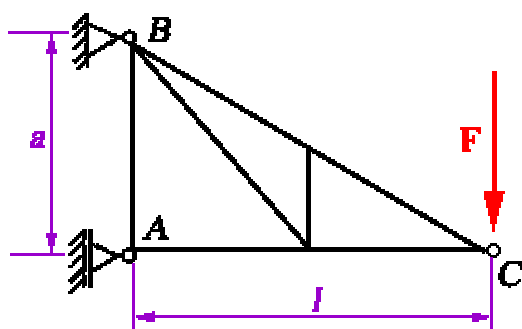
- 1) Odstránime všetky vonkajšie väzby a nahradíme ich väzbovými reakciami. Väzby vkladáme do uvoľnených bodov v smere odobratého stupňa voľnosti, resp. v smere osi zvoleného vzt'azného súradnicového systému, a orientujeme ich kladne, t.j. kladné väzbové sily sú orientované v zhode s orientáciou osi súradnicového systému a kladný väzbový moment v zmysle pravidla pravej ruky.
- 2) Pre uvoľnené teleso zostavíme statické podmienky rovnováhy (pre priestorovú úlohu 6 rovníc, pre rovinnú úlohu 3 rovnice), z ktorých vypočítame všetky väzbové reakcie. Ak z rovníc rovnováhy dostaneme väzbovú reakciu s kladným znamienkom, potom v skutočnosti pôsobí v tom zmysle (orientácia), ako sme ju do statického systému vložili. Ak väzbovú reakciu dostaneme so záporným znamienkom, v skutočnosti pôsobí v opačnom zmysle.

Poznámka: - Skúšku správnosti výpočtu väzbových reakcií treba vykonať pomocou ďalšej rovnice rovnováhy (napr. momentová podmienka rovnováhy k inému ľubovoľnému bodu telesa).

- Pri rovinných úlohách sa doporučujú používať prednostne momentové podmienky rovnováhy k bodu, kde pôsobia väzbové reakcie, a silové rovnice rovnováhy treba použiť na skúšku správnosti výpočtu.

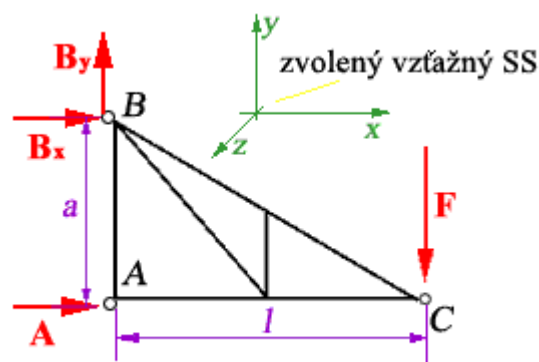
Príklad č. 2.1: Treba určiť väzbové reakcie v upevnení ramena stožiaru vn uloženého a zaťaženého silou F podľa obrázka.

Upevnené teleso ramena



obr. 2.30

Uvoľnené teleso ramena s vloženými väzbovými reakciami v kladnom zmysle



obr. 2.31

Statické podmienky rovnováhy (rovinná úloha)

Pre tri neznáme reakcie treba napísať tri rovnice rovnováhy.

Momentová rovnica rovnováhy k bodu A (momenty všetkých síl točia okolo osi z, kolmej na rovinu papiera):

$$1) \sum M_{iA} = 0: -Fl - B_x a = 0 \Rightarrow B_x = -F \frac{l}{a}$$

Momentová rovnica rovnováhy k bodu B:

$$2) \sum M_{iB} = 0: -Fl + Aa = 0 \Rightarrow A = F \frac{l}{a} = -B_x$$

Silová rovnica rovnováhy v smere osi y:

$$3) \sum F_y = 0: -F + B_y = 0 \Rightarrow B_y = F$$

Skúška správnosti:

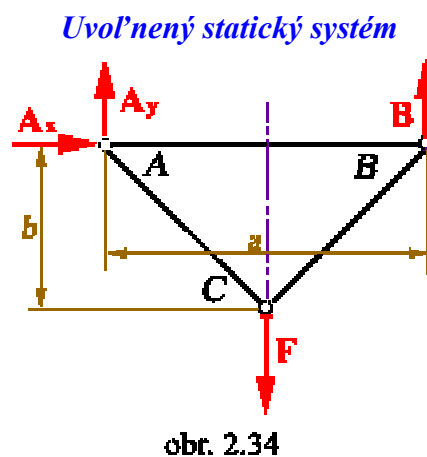
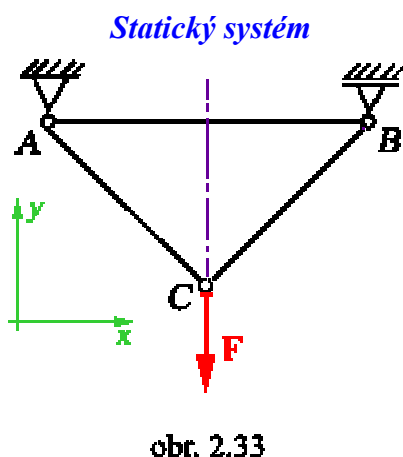
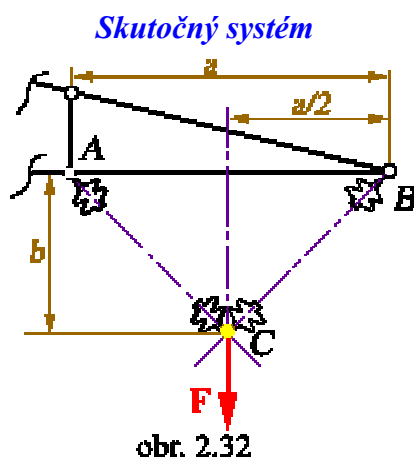
$$\sum F_{ix} = 0: A + B_x = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\sum M_{iC} = 0: -B_y l - B_x a = 0$$

$$-Fl - \left(-F \frac{l}{a}\right)a = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Väzbové reakcie sú vypočítané správne. Reakcia B_x má v skutočnosti opačnú orientáciu, ako sme predpokladali.

Příklad č. 2.2: Treba určiť väzbové reakcie v uchyteniach izolátorov na rameno stožiaru.



Na výpočet väzbových reakcií možno použiť tieto tri rovnice rovnováhy:

$$1) \sum F_{ix} = 0: A_x = 0$$

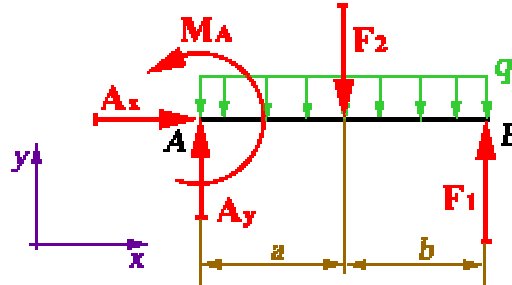
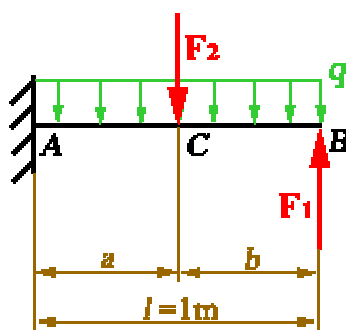
$$2) \sum M_{iB} = 0: -A_y a + F \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow A_y = \frac{F}{2}$$

$$3) \sum M_{iA} = 0: B a - F \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow B = \frac{F}{2} = A_y$$

Skúška správnosti:

$$\sum F_{iy} = 0: A_y + B - F = 0 \\ 0 = 0$$

Příklad č.2.3: Treba určiť väzbové reakcie v uložení votknutého nosníka.



Rovnice rovnováhy:

$$1) \sum M_{iA} = 0: F_1 l - q l \frac{l}{2} - F_2 a + M_A = 0$$

$$M_A = -F_1 l + q \frac{l^2}{2} + F_2 a$$

$$2) \sum F_{ix} = 0: A_x = 0$$

$$3) \sum F_{iy} = 0: A_y - F_2 - q l + F_1 = 0 \\ A_y = F_2 + q l - F_1$$

Skúška správnosti:

$$\sum M_{iB} = 0: M_A - A_y l + F_2 b + q l \frac{l}{2} = 0$$

$$\text{po dosadení: } 0 = 0$$

Poznámka: Ak na teleso pôsobí väčší počet rôznych vonkajších zaťažení, skutočnú orientáciu

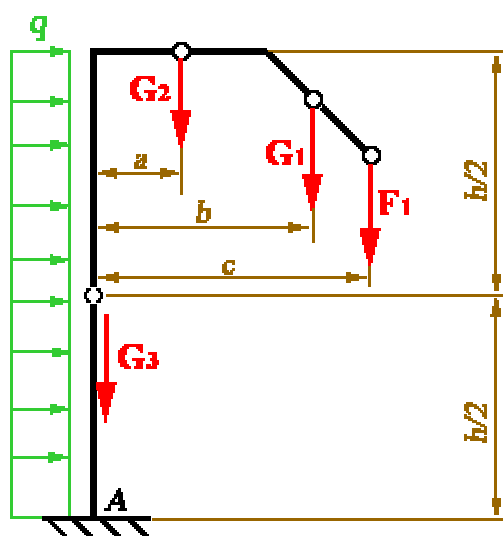
väzbových reakcií možno určiť až po dosadení konkrétnych hodnôt vonkajších síl. Ak napr. $F_1 = F_2 = F = 1000 \text{ N}$ a $q = F/l$ potom:

$$M_A = -Fl + \frac{F l^2}{2} + F \frac{l}{2} = F \left(-l + \frac{l}{2} + \frac{l}{2} \right) = 0$$

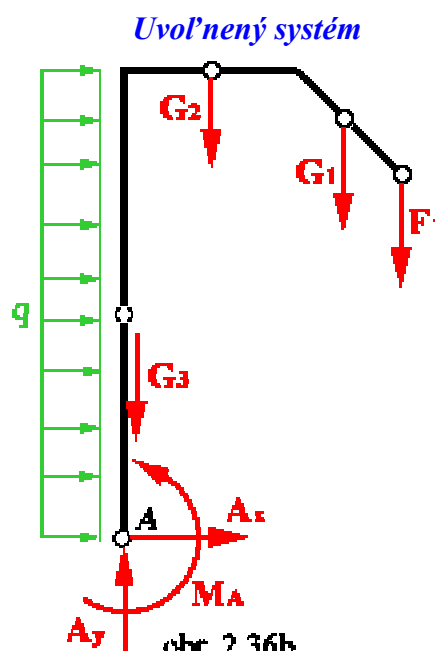
$$A_y = F + \frac{F}{l}l - F = F = 1000 \text{ N}$$

$$A_x = 0$$

Príklad č.2.4: Treba určiť väzbové reakcie v upevnení stĺpa pouličného osvetlenia zaťaženého podľa obrázku (F_1 - tiaž svietidla, G_1 , G_2 , G_3 - vlastná tiaž časti stĺpa, q - sila vetra).



obrázok 2.36a



obrázok 2.36b

Podmienky rovnováhy:

$$1) \sum M_{iA} = 0: -F_1c - G_1b - G_2a - qh \frac{h}{2} + M_A = 0$$

$$M_A = F_1c + G_1b + G_2a + q \frac{h^2}{2}$$

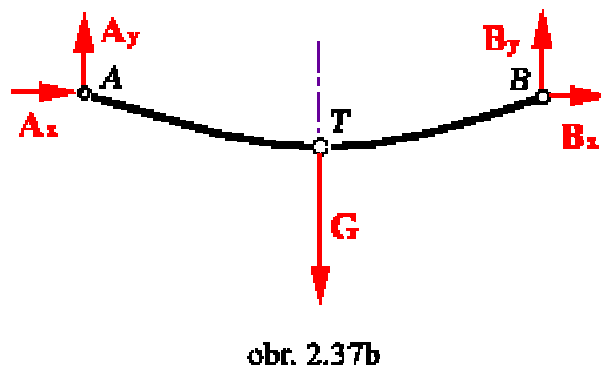
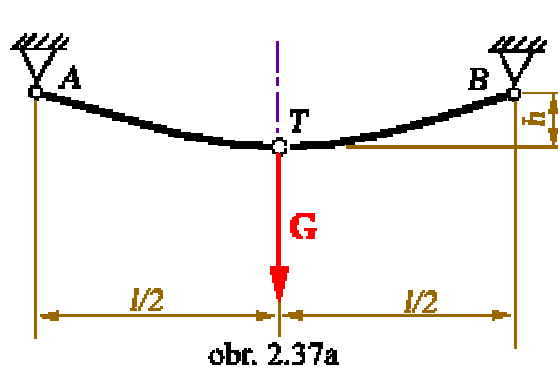
$$2) \sum F_{ix} = 0: A_x + qh = 0$$

$$A_x = -qh$$

$$3) \sum F_{iy} = 0: A_y - F_1 - G_1 - G_2 - G_3 = 0$$

$$A_y = F_1 + G_1 + G_2 + G_3$$

Príklad č.2.5: Treba určiť väzbové reakcie v uchyteníach vodiča vn, zaťaženého vlastnou tiažou sústredenej do ťažiska vodiča.



Statická určitost':

$i = n - r = 3 - 4 = 1^\circ \gg$ úloha je 1-krát staticky neurčitá.

Podmienky rovnováhy:

$$1) \sum M_{iA} = 0: -G \frac{l}{2} + B_y l = 0$$

$$B_y = \frac{G}{2}$$

$$2) \sum F_{ix} = 0: A_x + B_x = 0$$

$$A_x = -B_x$$

$$3) \sum F_{iy} = 0: A_y + B_y - G = 0$$

$$A_y = B_y = \frac{G}{2}$$

Veľkosť reakcií A_x a B_x je závislá na tzv. *vnútorných silách*, ktorých výpočtom sa budeme zaoberať niekôr v rámci pružnosti a pevnosti materiálu. Statické podmienky nepostačujú na výpočet väzbových reakcií pri staticky neurčitom uložení telesa.