4. Základné pojmy pružnosti a pevnosti

Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

- Čo je obsahom predmetu "Pružnosť a pevnosť", aké je jeho postavenie v odbore ESI.
- Čo je to poddajné kontinuum.
- Čím sú charakterizované vnútorné sily a mechanické napätia.
- Princíp metódy mysleného rezu.
- Ako je definovaný vektor mechanického napätia, normálové a šmykové napätie.
- Čo sú to základné prípady namáhania, a ako ich delíme.
- Aké sú základné zložky deformácie a ich matematické a fyzikálne vyjadrenie.
- Pracovný diagram trhacej skúšky, Hookov zákon a modul pružnosti.
- Ako je definované priečne zúženie.
- Odvodenie vzťahov pre energiu napätosti normálových a šmykových napätí.
- Odvodenie 1. Castiglianovej vety a jej fyzikálny význam.
- Na čo slúži pevnostná podmienka, čo je to dovolené namáhanie a miera bezpečnosti.

4.1 OBSAH A POSTAVENIE PREDMETU "PRUŽNOSŤ A PEVNOSŤ"

Predmet "Pružnosť a pevnosť" sa zaoberá rovnováhou deformovateľného (poddajného) telesa a skúma účinky pôsobenia zaťažujúcich síl na poddajné teleso.
Mechanické súčiastky strojov a zariadení, prenášajúce účinky zaťažujúcich síl, sú zhotovené z konštrukčných materiálov vyznačujúcich sa základnými mechanickými vlastnosťami:

a. ***Pružnosť materiálu*** je schopnosť materiálu nadobúdať, po prerušení pôsobenia zaťažujúcich síl, svoj pôvodný tvar.

b. ***Pevnosť materiálu*** je schopnosť materiálu odolávať pôsobeniu zaťažujúcich síl bez jeho porušenia.

Na rozdiel od statiky sa pružnosť a pevnosť zaoberá prvkami konštrukcie, ktoré pri vzájomnom pôsobení na seba menia svoje rozmery a tvar. Táto zmena sa nazýva *deformácia*. Hmotnému telesu schopnému sa deformovať hovoríme *poddajné teleso*. Mechanické vlastnosti pružnosť a pevnosť úzko súvisia s účinkami zaťažujúcich síl na poddajné teleso. Predmet Pružnosť a pevnosť skúma odozvu deformovateľného telesa na pôsobenie zaťažujúcich síl. Po zostavení matematického modelu daného konštrukčného prvku je jej cieľom navrhnúť jeho optimálne rozmery tak, aby nenastala porucha materiálu prekročením jeho pevnosti alebo neprimeranou deformáciou.

Obsah tejto časti predmetu "Mechanika a Termomechanika" je zameraný na poznatky o silovom pôsobení a jeho účinkoch na poddajné hmotné body a telesá pevnej fázy. Obsahuje aplikačné výpočtové metódy na bezpečný návrh niektorých konštrukčných prvkov a systémov silnoprúdovej elektrotechniky a elektroenergetiky, s poukázaním na možné príčiny mechanických porúch a ich dôsledkov na bezpečnú a spoľahlivú prevádzku.

4.2 PODDAJNÉ KONTINUUM

Materiál konštrukčných prvkov možno rozdeliť do dvoch skupín.

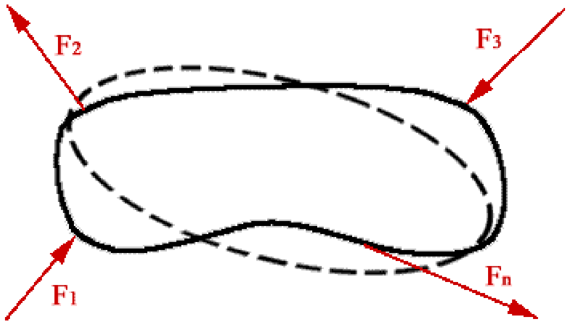
a. ***kryštalické***

b. ***amorfné***

Kryštalické materiály pozostávajú z veľkého počtu malých zŕn. Každé zrno tvorí sústava atómov pravidelne v radoch rozložených, ktoré tvoria kryštalickú mriežku. Naproti tomu amorfné materiály nemajú pravidelne usporiadané atómy. Ak by sme pristupovali ku skúmaniu účinku zaťažujúcich síl na poddajné teleso *mikroskopickým spôsobom*, narazili by sme na problémy spojené najmä so zložitosťou matematického modelu a s odlišnosťami od ideálneho kryštalického zloženia konštrukčných materiálov (dané nerovnomernosťou kryštalizácie, nečistotami a vmestkami v kryštalickej mriežke). Preto v pružnosti a pevnosti abstrahujeme od skutočného zloženia hmotného telesa - aplikujeme *makroskopický prístup*. Hmotné poddajné teleso budeme považovať za *kontinuum*.
Koncept kontinua je odvodený z matematiky. Povieme, že systém reálnych čísiel je kontinuum. Medzi každými dvoma určitými číslami sú iné čísla, vlastne medzi uvažovanými dvoma číslami existuje nekonečne veľa reálnych čísiel. Intuitívne, čas môže byť reprezentovaný tromi systémami reálnych čísiel x, y, z. Čas a priestor identifikujeme ako štvorrozmerné kontinuum. Rozšírením pojmu kontinua na hmotu budeme hovoriť o spojitom rozdelení hmoty v priestore. Hmotné teleso bude takto pozostávať z hmotných bodov, z ktorých každý obsahuje veľké množstvo elementárnych častíc (atómov, elektrónov). Koncept materiálneho kontinua je matematickou abstrakciou (idealizáciou) reálneho sveta a je aplikovateľný na problémy, v ktorých jasnosť štruktúry sa môže zanedbať.

4.3 ROZDELENIE SÍL PÔSOBIACICH NA PODDAJNÉ KONTINUUM

Jednotlivé časti konštrukcií v spojení s inými tvoria konštrukčný celok, ktorý je buď v pokoji (napr. stožiar VN, zapuzdrený vodič, izolátor, osvetľovací systém, nádoba reaktora, atď.), alebo v pohybe (časti točivých elektrických strojov a pohonov, mechatronické systémy, atď.). Pritom prostredníctvom vzájomných dotykových plôch prenášajú sily na seba. Sily ktorými pôsobia ostatné časti konštrukcie na uvažovanú súčiastku, nazývame *vonkajšími silami*, ktorými sme sa už zaoberali v statike.
Vonkajšie zaťaženie možno ďalej deliť na *trvalé* a *dočasné*. Trvalé zaťaženie pôsobí po celý čas prevádzky konštrukcie, napr. jej vlastná tiaž a pod. Dočasné zaťaženie len nejaký časový úsek, napr. tiaž montéra na stožiari VN a pod. Podľa charakteru pôsobenia možno zaťaženie ešte rozdeliť na *statické* a *dynamické*. Statické zaťaženie vzrastá postupne od nuly až na vlastnú, menovitú hodnotu (napr. krútiaci moment elektromotora na hriadeľ). Pôsobenie dynamických síl vzniká spravidla v krátkej časovej perióde a pritom aj súčiastky, na ktoré dynamické sily pôsobia, sú obyčajne v pohybe.

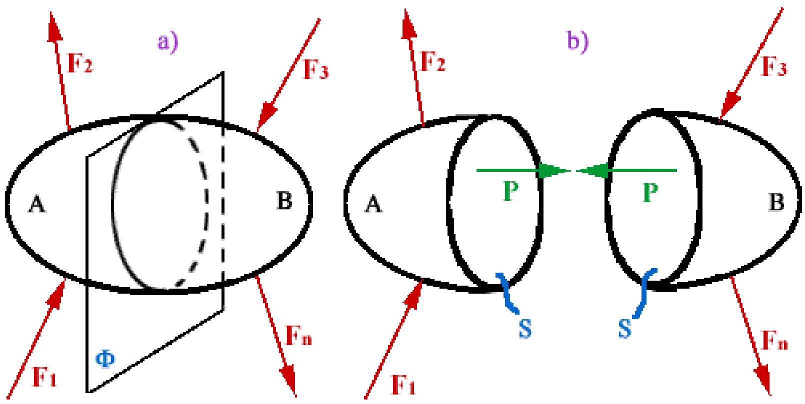


obr.4.1 Poddajné teleso

Na *obr. 4.1* vidíme poddajné kontinuum zaťažené silovou sústavou $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, ..., $\mathbf{F_n}$. Teleso, ktoré malo pred zaťažením tvar vyznačený plnou čiarou, sa po zaťažení zdeformuje do tvaru vyznačeného čiarkovanou čiarou. (Deformácia telesa je pre názornosť nakreslená prehnane veľká. *Vo všetkých kapitolách tejto učebnice bude prijatý predpoklad nekonečne malých deformácií.*) Odozvou telesa na zaťažujúce sily je jeho deformácia. Ak zaťažujúce sily (akcie aj reakcie) prestanú pôsobiť, pružnosť materiálu spôsobí jeho návrat do pôvodného stavu. To znamená, že v prvkoch konštrukcie vznikajú pôsobením vonkajších síl *doplnkové vnútorné sily*, ktoré pôsobia proti úsiliu vonkajších síl porušiť konštrukčný prvok, alebo meniť jeho tvar. V ďalšom budeme tieto sily nazývať *vnútornými silami*. Keby sme teleso chápali mikroskopicky, atómy sa v mriežke udržiavajú vzájomne pôsobiacimi medziatómovými silami. Vplyvom vonkajších síl sa vzdialenosti medzi atómmi menia (teleso sa deformuje), čo je spôsobené zmenou vzájomne pôsobiacich síl medzi atómmi. Analogicky pri makroskopickom prístupe nachádzajú sa hmotné body v telese v rovnováhe. Ak začneme pôsobiť vonkajšími silami, hmotné body sa bránia vysunutiu zo svojej rovnovážnej polohy - vznikajú už spomenuté *vnútorné sily*. Tieto vnútorné sily sú, podobne ako pojem kontinua, matematickou abstrakciou, ktorú zaviedli Cauchy a Euler.
Aby sa dal číselne charakterizovať stupeň účinku vonkajších síl na deformovaný prvok, treba vedieť vypočítať veľkosť vnútorných síl. Na to sa v pružnosti a pevnosti používa metóda *jedného alebo viacerých myslených rezov*. Voľba ich počtu závisí od zložitosti riešenej úlohy.

4.4 METÓDA MYSLENÉHO REZU NA URČENIE VÝSLEDNICE VNÚTORNÝCH SÍL

Metóda mysleného rezu tkvie v nasledujúcich úvahách:
Teleso na *obr. 4.2* rozrežeme mysleným rovinným rezom Φ na dve konečné časti A a B.



obr.4.2 Metóda mysleného rezu

Pôsobením vonkajších síl sa obe časti telesa usilujú oddeliť a udržiavajú sa pohromade vzájomnými vnútornými silami pôsobiacimi medzi hmotnými bodmi, ktoré sú na oboch stranách mysleného rezu. Na *obr. 4.2* sú nakreslené výslednice týchto síl. Vnútorné sily pôsobiace na časť A od časti B a vnútorné sily pôsobiace na časť B od časti A sa podľa zákona akcie a reakcie sebe rovnajú (Cauchyho-Eulerov princíp). Ak má nastať rovnováha každej z odrezaných častí, musia byť vnútorné sily pôsobiace na časť A v rovnováhe s vonkajšími silami pôsobiacimi na túto časť a rovnako i na časti B. Výslednicu vnútorných síl **P** nazývame *vektorom napätia* a určíme ho zo statických podmienok rovnováhy vonkajších a vnútorných síl a momentov síl.

4.5 NORMÁLOVÉ A TANGENCIÁLNE (ŠMYKOVÉ) NAPÄTIE

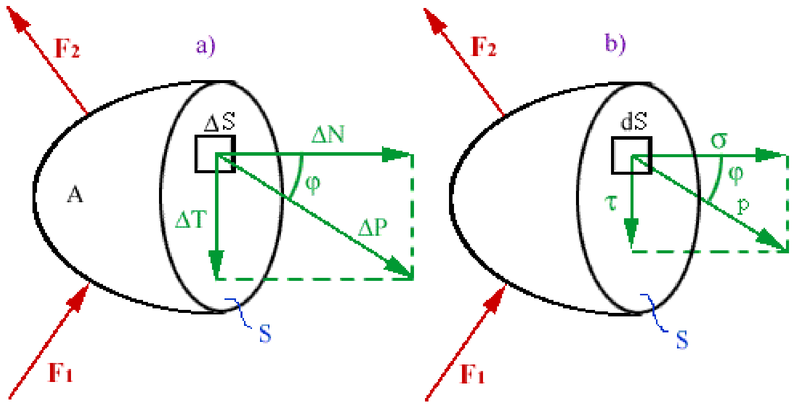
Vnútorné sily sú vo všeobecnosti nepravidelne rozložené po priereze, takže statické podmienky rovnováhy nestačia na určenie rozloženia vnútorných síl v jednotlivých hmotných bodoch ležiacich v rovine mysleného rezu. Zo statických podmienok rovnováhy možno určiť len výslednicu vnútorných síl.

Aby sme mohli lepšie porovnávať účinok vnútorných síl v rôznych rezových plochách, zavádzame pomer vnútorných síl na jednotku prierezovej plochy, ktorý nazývame *mechanickým napätím*.

Vybratý hmotný bod si nahradíme pravouhlým elementárnym hranolčekom, ktorého jedna plocha sa nachádza v rovine rezu a jej veľkosť je ΔS, *obr.4.3*. Na tejto plôške pôsobí elementárna vnútorná sila ΔP a s normálou k rezovej rovine zviera uhol φ. Túto silu rozložíme do normály a tangenty k rezovej rovine. Potom podľa *obr.4.3* platí:

$$\Delta N = \Delta P . \cos\varphi$$

$$\Delta T = \Delta P . \sin\varphi$$



obr.4.3 Pojem napätia

Limita pomeru vnútorných síl ΔP, ΔN, ΔT k ploche ΔS sa nazýva napätie, jeho smer a zmysel sa zhoduje so smerom a zmyslom vnútornej sily a ktorého rozmer je $N.mm^{-2}$ (*MPa*), prípadne iné odvodené jednotky. Napätie budeme v ďalšom texte označovať písmenami našej, resp. gréckej abecedy. Označenie *p* budeme používať pre *napätie* ľubovolne sklonené k vyšetrovanej plôške, písmenom σ budeme označovať *normálové napätie*, ktoré je kolmé na rovinu rezu a písmenom τ *šmykové napätie*, ktoré leží v rovine rezu *obr.4.3*

Jednotlivé napätia sú definované vzťahmi:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{dP}{dS}$$

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta S} = \frac{dN}{dS}$$

$$\tau = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta S} = \frac{dT}{dS}$$

Normálovému napätiu priraďujeme tiež znamienko, a to: *kladné*, keď zmysel sily ΔN smeruje von z plochy rezu, a nazývame ho napätím ťahovým. Ak je zmysel sily ΔN opačný, priraďujeme mu znamienko *záporné*, a takéto napätie nazývame tlakovým. Na orientácii šmykového napätia obvykle nezáleží, ale len na jeho veľkosti.

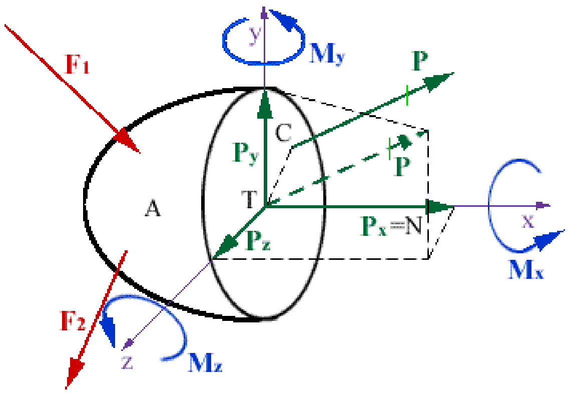
Iné napätie ako ťahové, tlakové alebo šmykové na plôške ΔS nie je mysliteľné. Ich smer a veľkosť závisí od vonkajšieho zaťaženia a od veľkosti a polohy plôšky ΔS. Pri každom druhu namáhania sa môžu vyskytovať iba tieto napätia, a to alebo každé samostatne, alebo v kombinácii.

Z rovníc napätia je zrejmé, že:

$$\sigma = p.\cos\varphi, \qquad \tau = p.\sin\tau, \qquad p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

4.6 ZÁKLADNÉ PRÍPADY NAMÁHANIA

V bode C sme určili výslednicu vnútorných síl pre rezovu plochu S. Táto výslednica P je v statickej rovnováhe s vonkajšími silami, pôsobiacimi na časť telesa A *obr.4.4*

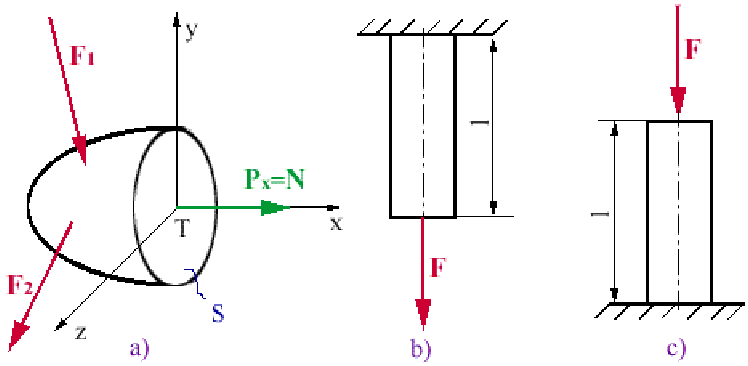


obr.4.4 Zložky výslednice vnútorných síl

Preložme vnútornú silu **P** do ťažiska T plochy prierezu S a rozložme ju do súradnicových osí x, y, z , z ktorých os x je kolmá na rezovu rovinu. Tieto zložky výslednej vnútornej sily sú na obrázku vyznačené $\mathbf{P_x}$, $\mathbf{P_y}$ a $\mathbf{P_z}$. Aby táto transformácia sily bola ekvivalentná, treba k preloženej sile **P** pripojiť dvojicu síl, ktorej zložky otáčavého účinku do súradných osí sú M_x, M_y, M_z. Tak sme dostali v ťažisku plochy prierezu šesť zložiek výslednice vnútorných síl (tri sily a tri momenty síl). Ak pôsobí v ťažisku plochy S viac zložiek výslednice vnútorných síl ako jedna, hovoríme o *kombinovanom (zloženom) namáhaní*. Ak pôsobí v uvažovanom reze len jedna z uvažovaných zložiek, hovoríme o *jednoduchom (prostom) namáhaní*. Podľa toho rozoznávame päť základných (jednoduché, prosté, čisté) prípadov namáhaní: prostý ťah (tlak), prostý šmyk, prosté krútenie, prostý ohyb, a vzper.

4.6.1 Prostý ťah (tlak)

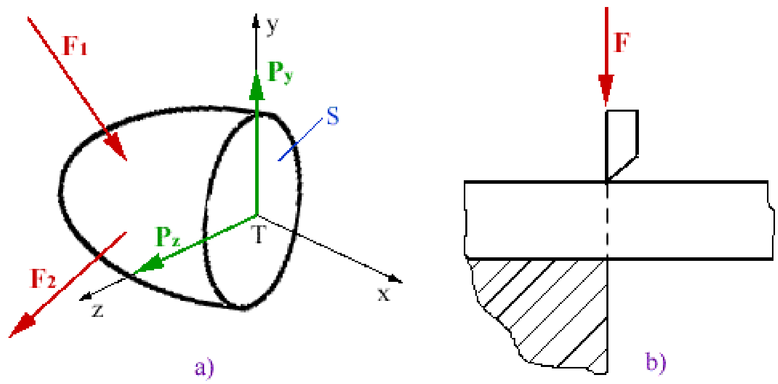
O prostom ťahu alebo tlaku hovoríme vtedy, ak v myslenom reze pôsobí len zložka výslednice vnútorných síl $\mathbf{P_x} = \mathbf{N}$ *obr.4.5c*. Najjednoduchším prípadom ťahového namáhania je tenká priama tyč, konštantného prierezu namáhaná osovou silou **F** *obr.4.5b*. Najjednoduchším prípadom tlakového namáhania je prípad podľa *obr.4.5c*. Pretože v myslenom reze pôsobí výslednica vnútorných síl na normále k prierezu, pri ťahu, resp. tlaku vzniká normálové napätie σ (+σ pre ťah a -σ pre tlak). Takto sú namáhané napr. tyče (prúty) stožiarov elektrického vedenia, osvetľovacích rámp, vodiče a laná, výstuže optických a iných káblov, izolátory a pod.



obr.4.5 Čistý ťah, tlak

4.6.2 Prostý šmyk

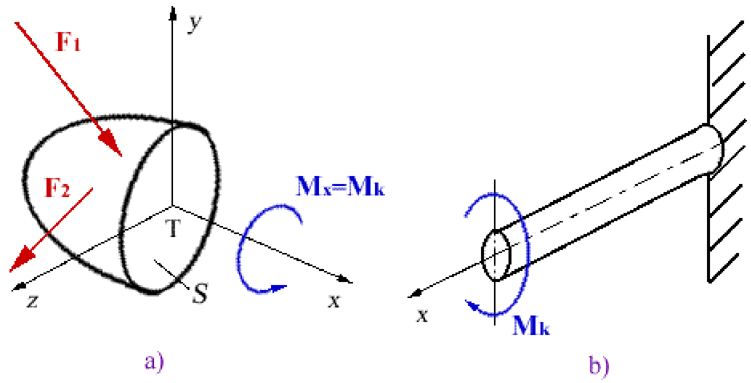
O prostom šmyku hovoríme vtedy, ak v myslenom reze pôsobia len zložky výslednice vnútorných síl $\mathbf{P_y}$ a $\mathbf{P_z}$ *obr.4.6a* alebo len jedna z nich. Výsledná šmyková sila v danom reze je daná vektorovým súčtom obidvoch zložiek. Najjednoduchším prípadom šmykového namáhania je strihanie materiálu *obr.4.6b*. Pretože výslednica vnútorných síl leží v myslenom reze, pri prostom šmyku vzniká šmykové napätie τ .



obr.4.6 Čistý šmyk

4.6.3 Prosté krútenie

O tomto druhu namáhania hovoríme vtedy, ak v myslenom reze zo všetkých možných zložiek pôsobí len moment $\mathbf{M_x} = \mathbf{M_k}$, ktorého rovina pôsobenia je totožná s rovinou rezu *obr.4.7a*. Najjednoduchším prípadom namáhania tohto druhu je krútenie tyče (hriadeľa) kruhového prierezu *obr.4.7b*.

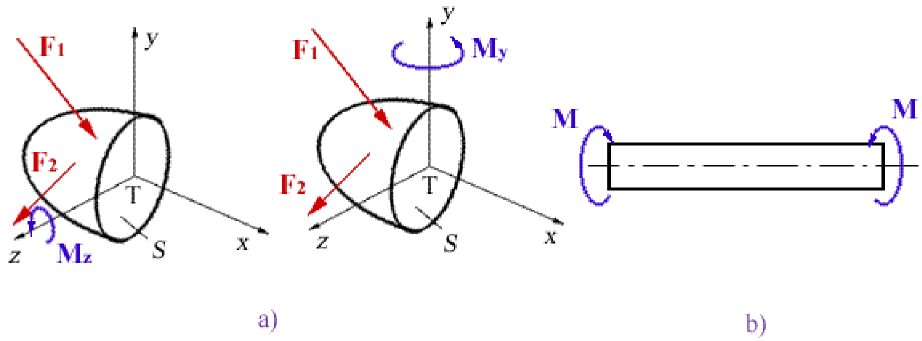


obr.4.7 Čistý krut

Krútením sú napr. namáhané hriadele a osi točivých strojov.

4.6.4 Prostý ohyb

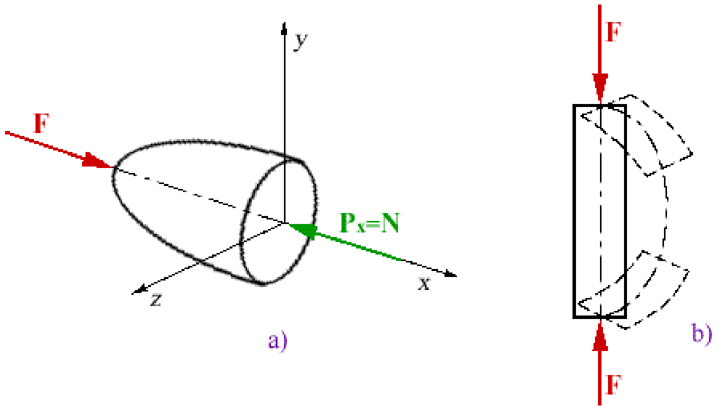
O prostom ohybe hovoríme vtedy, ak v myslenom reze pôsobí len moment $\mathbf{M_y}$ alebo len $\mathbf{M_z}$ *obr.4.8a*. Ak pôsobia obidve zložky súčasne, hovoríme spravidla o *šikmom ohybe*.
Najjednoduchší prípad tohoto druhu namáhania je znázornený na *obr.4.8b*. Konštrukčné prvky prenášajúce ohybový moment nazývame *nosníkmi*.



obr.4.8 Čistý ohyb

4.6.5 Vzper

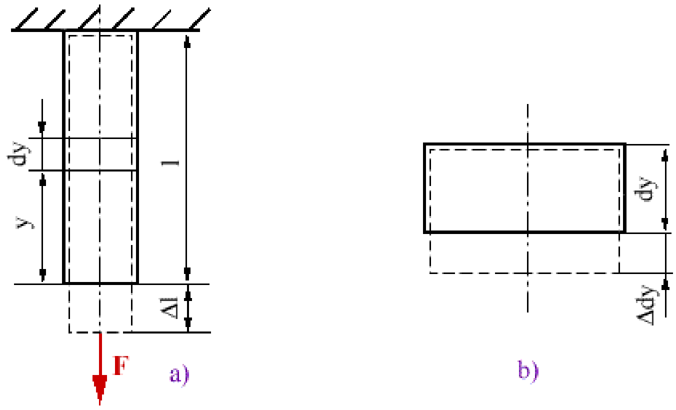
Podobne ako pri prostom tlaku, i v tomto prípade pôsobí v myslenom reze tlaková sila $\mathbf{P_x} = \mathbf{N}$ *obr.4.9a*. Ak priečny prierez tyče je proti jej dĺžke malý (štíhly prút), dôjde po prekročení určitej (kritickej) hodnoty osovej sily k vybočeniu priamej pozdĺžnej osi prúta, tyč sa prehne, až sa zlomí - stratí stabilitu *obr.4.9b*. Stratiť stabilitu môžu konštrukčné prvky (štíhle, tenkostenné) namáhané tlakovou silou, ako sú napríklad prúty stožiarov, rámp, veží a anténnych systémov.



obr.4.9 Vzper štíhleho prúta

4.7 POMERNÉ PREDĹŽENIE A POMERNÉ SKOSENIE

Ak namáhame priamu tyč ťahom podľa *obr.4.10b*, pozorujeme, že tyč sa predlžuje a jej prierez sa zužuje. Zúženie prierezu tyče oproti jej predĺženiu býva zanedbateľné.



obr.4.10 Namáhanie osovou silou **F**

Dvoma rovnobežnými myslenými rezmi vyberme z tyče valček nekonečne malej výšky dy vo vzdialenosti *y obr.4.10b* od spodného okraja tyče. Zaťažením tyče sa valček predĺži o hodnotu Δdy.

Pomer

$$\varepsilon = \frac{\Delta dy}{dy}$$

nazývame *pomerným predĺžením* tyče. Je to predĺženie pripadajúce na jednotku dĺžky tyče. Ak je pomerné predĺženie vo všetkých bodoch prierezu a vo všetkých priečnych prierezoch rovnaké, možno celkové predĺženie tyče vyjadriť vzťahom

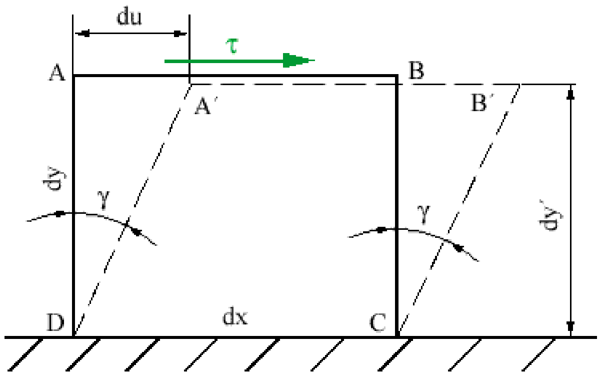
$$\Delta l = \int_0^l \Delta dy = \int_0^l \varepsilon . dy = \varepsilon l$$

odkiaľ

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Ako vidieť z týchto rovníc pomerné predĺženie je *veličina bezrozmerná*.

Uvažujeme elementárnu časť plochy prierezu ABCD s rozmermi *dx*, *dy obr.4.11*, ktorá sa vplyvom šmykových napätí τ pretvorí, ako je to na obrázku vyznačené.



obr.4.11 Pomerné skosenie

Ak je toto pretvorenie malé, môžeme zmenu dĺžky *dy* zanedbať. Posunutie *du* môžeme potom vyjadriť vzťahom

$$du = \mathrm{tg}\,\gamma . dy$$

alebo

$$dy' \doteq dy$$

Keďže uhol γ je malý, možno písať:

$$\mathrm{tg}\gamma \doteq \gamma$$

takže bude

$$du = \gamma . dy$$

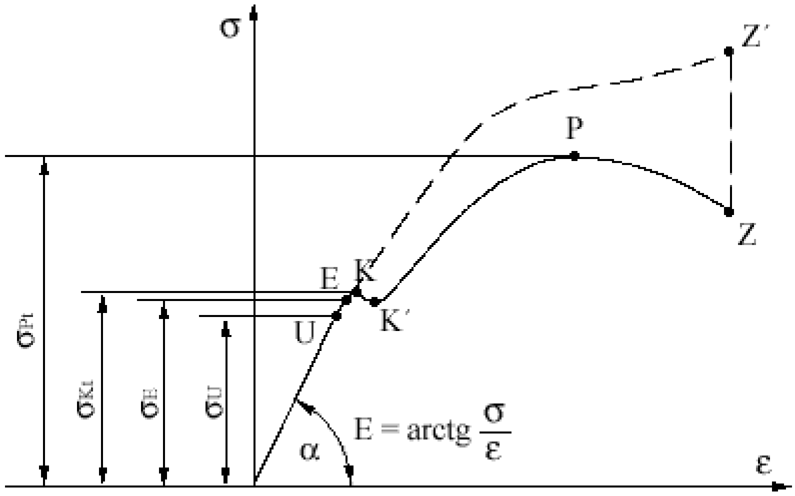
a z toho pomer

$$\gamma = \frac{du}{dy}$$

nazývame pomerným skosením (tiež zmena pravého uhla v elementárnom hranolčeku). Tak ako pomerné predĺženie, aj táto veličina je bezrozmerná. Pomerné predĺženie a skosenie sú základnými zložkami deformácie telesa.

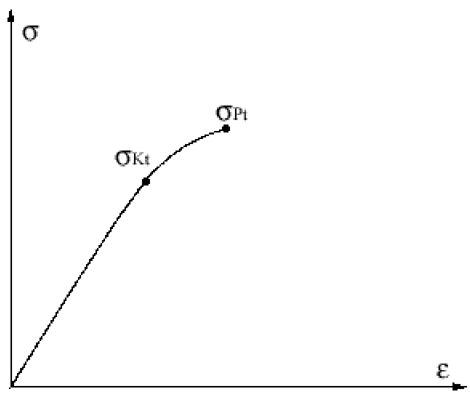
4.8 PRACOVNÝ DIAGRAM TRHACEJ SKÚŠKY

Informácie o pružnosti a pevnosti materiálu nám dávajú *skúšky mechanických vlastností*. Jedna z takýchto skúšok je trhacia skúška ťahom. Skúšobná tyč normalizovaného tvaru a rozmerov sa upne do čeľustí trhacieho stroja a postupne sa plynulo zaťažuje prostým ťahom. Pritom sa automaticky zaznamenáva závislosť medzi zaťažením a príslušným predĺžením skúšobnej tyče. Pri známych rozmeroch skúšobnej tyče (počiatočný prierez *S*, dĺžka *l*) možno získať závislosť pomerného predĺženia od napätia.
Na *obr.4.12* je nakreslený diagram napätia a pomerného predĺženia "mäkkej" konštrukčnej ocele. Z obrázku vidieť, že časť diagramu až po bod U je lineárny, čiže napätie je úmerné pomernému predĺženiu. Napätie prislúchajúce bodu U nazývame *medzou úmernosti* σ_U. Pri skúške možno nájsť také napätie, po hodnotu ktorého bude mať tyč len pružné deformácie. Toto napätie sa nazýva *medza pružnosti* σ_E. Bod E leží spravidla vyššie, ale veľmi blízko k bodu U. Ak skúšobnú tyč odľahčíme v stave pod medzou pružnosti, pružné (elastické) deformácie vymiznú a skúšobná tyčka nadobudne svoj pôvodný tvar. Po prekročení medze pružnosti začnú vznikať trvalé plastické deformácie. V bode K sa začne skúšobná tyč predlžovať bez toho, že by napätie stúpalo. Napätie prislúchajúce bodu K (resp. K´) nazývame hornou (resp. spodnou) medzou klzu. Veľkosť pružnoplastických deformácií ε pri dosiahnutí medze klzu pri konštrukčných oceliach neprekračuje hodnotu 0,001 ~ 0,003.



obr.4.12 Skúška v ťahu

Najväčšia hodnota napätia pri skúške je daná napätím σ_{Pt} (bod P) - *medza pevnosti v ťahu*. Konečné porušenie nastáva však pri napätí, ktoré prislúcha bodu Z. Na *obr.4.12* je čiarkovanou čiarou vyznačený priebeh tej istej závislosti, vzťahovaný však na okamžitý prierez tyčky. Materiál, pri ktorom nastáva porucha po značných pružnoplastických deformáciách, sa nazýva *húževnatý*.



obr.4.13 Krehký materiál

Na *obr.4.13* je znázornený diagram ťahovej skúšky liatiny. Tento materiál má veľmi nízku medzu úmernosti a nemá jasne vyhranenú medzu klzu. Medza klzu sa nachádza blízko medze pevnosti materiálu. Takýto materiál pri ktorom nastane porucha bez významnejších pružnoplastických deformácií, nazývame *krehkým*. Skrehnúť môže aj pôvodne húževnatý materiál, napr. vplyvom teplotného namáhania. Materiál jadrového reaktora krehne aj vplyvom radiačného žiarenia. Typickým krehkým materiálom je tiež sklo, keramika, a iné.

4.9 HOOKOV ZÁKON

Lineárnu závislosť medzi napätím a deformáciou do medze úmernosti σ_U definoval roku 1860 Robert Hooke jedným zo základných zákonov pružnosti a pevnosti:

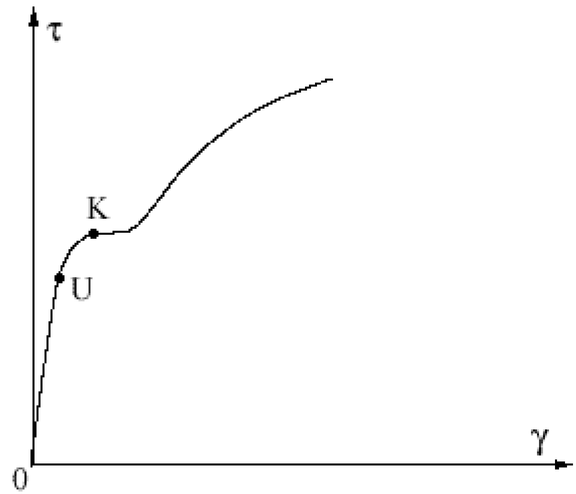
$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{const.} = E = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{alebo} \quad \sigma = E.\varepsilon$$

ktorý nazývame *Hookov zákon*.
Konštantu úmernosti *E* nazývame *modulom pružnosti v ťahu*. Modul pružnosti charakterizuje mechanickú vlastnosť - pružnosť materiálu a je závislý od druhu materiálu skúšobnej tyčky.

Pretože pomerné predĺženie ε je bezrozmerná veličina, má modul pružnosti v ťahu rozmer napätia, teda

$$E = \left[N.m^{-2}\right] \quad \text{alebo} \quad \left[N.mm^{-2}\right] \equiv \left[MPa\right]$$

Pre oceľ nadobúda hodnoty $E = 2{,}1.10^5$ $N.mm^{-2}$. Hliník má modul pružnosti 78000 *MPa*, sklenná výstuž optických vlákien má $E = 50000$ *MPa*. Modul pružnosti rôznych materiálov je závislý na technológii výroby a jeho ďalšom spracovaní.
Ak namáhame nejakú látku prostým šmykom, možno skúškami určiť vzťah medzi šmykovým napätím τ a pomerným skosením γ. Na *obr.4.14* je nakreslený diagram konštrukčnej ocele, ktorý sa zistil pri namáhaní tenkostennej rúrky prostým krútením.



obr.4.14 Závislosť medzi šmykovým napätím a pomerným skosením

Diagram sa podobá diagramu skúšok v ťahu a možno na ňom vidieť medzu úmernosti τ_U (bod U) a medzou klzu τ_K (bod K). Po medzu úmernosti platí vzťah

$$\tau = G.\gamma$$

Kde *G* je materiálová konštanta a nazýva sa *modul pružnosti v šmyku*. Pretože γ je bezrozmerná veličina, má i tento modul (tak ako aj *E*) rozmer napätia. Hodnota modulu pružnosti v šmyku pre oceľ je $G = 0{,}8.10^5$ $N.mm^{-2} = 0{,}8.10^{11}$ $N.m^{-2}$
Ak je modul pružnosti materiálu vo všetkých smeroch rovnaký, hovoríme, že látka je *izotropná*. Materiály používané v konštrukčnej praxi považujeme spravidla za *izotropné* a *homogénne*, t.j. také, ktoré majú vo všetkých smeroch rovnaké materiálové vlastnosti. V opačnom prípade hovoríme o *anizotrópnych* látkach. Modul pružnosti ako aj iné vlastnosti materiálov možno nájsť na web stránke www.mems.org.

4.10 PRIEČNE ZÚŽENIE

Súčasne s predĺžením skúšobnej tyče v smere pozdĺžnej osi pozorujeme pri prostom ťahu aj skrátenie jej priečnych rozmerov. Toto skrátenie je, ako ukázali skúšky, v rozsahu platnosti Hookovho zákona pri izotropných materiáloch úmerne napätiu σ, a tým i osovému pomernému predĺženiu ε_x. Keď vytkneme zo skúšobnej tyče elementárny hranolček podľa obr. 4.15, potom možno priečne zúženia v smere *y* a *z* popísať rovnicami:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{m.E} = -\frac{\upsilon.\sigma}{E}$$

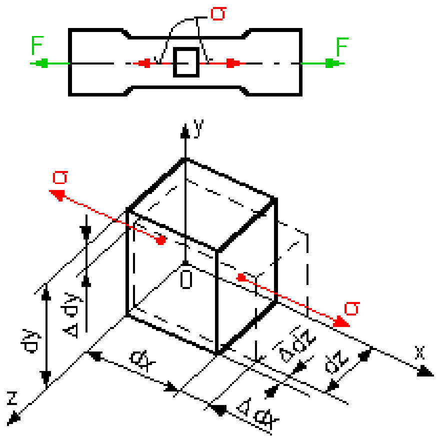
$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dy} = -\frac{\varepsilon_x}{m} = -\frac{\sigma}{m.E} = -\frac{\upsilon.\sigma}{E} = \varepsilon_y$$

Súčiniteľa m nazývame Poissonova konštanta. Často, najmä v numerických metódach, sa používa jej prevrátená hodnota, ktorú nazývame *Poissonovým číslom*. Pre oceľ je Poissonova konštanta

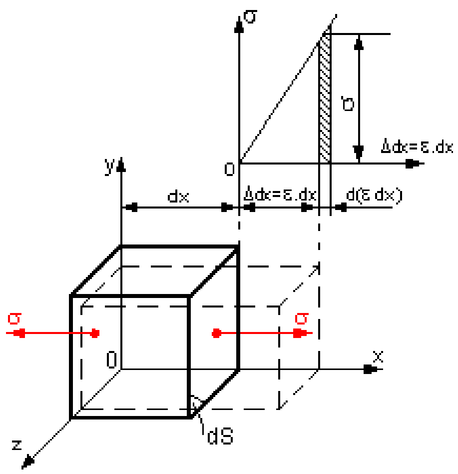
$$m = \frac{10}{3}$$

resp. Poissonovo číslo

$$\upsilon = 0.3$$



obr.4.15 Deformácia pri jednoosovej napätosti



obr.4.16 Energia napätosti normálových napätí

4.11 ENERGIA NAPÄTOSTI

Energiou napätosti rozumieme energiu, ktorá sa skumuluje v pôvodne nezaťaženom telese, keď nadobudne určité pretvorenie, a to od všetkých vnútorných síl pôsobiacich na nekonečne malé elementy telesa. Táto energia - za predpokladu platnosti Hookovho zákona - sa rovná práci vonkajších síl, vykonanou pri pretvorení telesa. Vonkajšie a vnútorné sily musia byť pritom v statickej rovnováhe.

Deformačnú prácu vonkajších síl - podľa definície známej z fyziky - určíme podľa vzťahu

$$W = \int_{(s)} F.ds$$

Kde F je zaťažujúca sila, ktorá pôsobí na dráhe s. Energiu napätosti určíme osobitne pre normálové a osobitne pre šmykové napätia, pričom využijeme horeuvedený vzťah.

a) Energia napätosti normálových napätí

Pri namáhaní normálovým napätím v smere osi x vzniká deformácia elementárneho hranola podľa obr. 4.16. Za predpokladu platnosti Hookovho zákona je závislosť medzi napätím σ a pretvorením ε lineárna.

Vnútorná sila pôsobiaca na plochu dS elementárneho hranolčeka bude $dF = \sigma.dS$. Potom elementárna deformačná práca dW_σ, ktorá je rovná energii napätosti dA_σ elementárneho hranolčeka, bude

$$dW_\sigma = dA_\sigma = \int_{(s)} dF.ds = \int_0^{\Delta dx} \sigma.dS.d(\Delta dx) = \int_0^{\varepsilon.dx} \sigma.dy.dz.d(\varepsilon.dx)$$

Pretože $\sigma = E.\varepsilon$ a dx, dy a dz sú konštanty, možno túto rovnicu upraviť do tvaru

$$dA_\sigma = dy.dz.E\int_0^{\varepsilon.dx} \varepsilon.d(\varepsilon.dx) = dy.dz.\frac{E}{dx}\int_0^{\varepsilon.dx} \varepsilon.dx.d(\varepsilon.dx) = dy.dz.\frac{E}{dx}(\varepsilon.dx)^2.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.E.\varepsilon^2.dx.dy.dz = \frac{1}{2}.E.\varepsilon^2.dV$$

kde $dV = dx\ dy\ dz$ je objem elementu. Celková energia napätosti potom bude

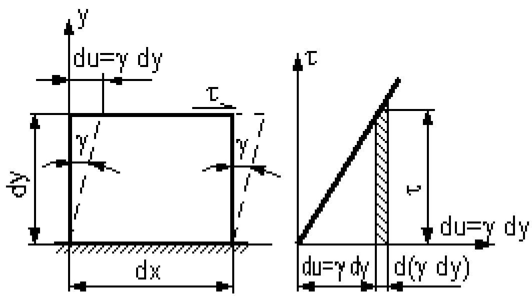
$$A_\sigma = \frac{1}{2}\int_V E.\varepsilon^2.dV = \frac{1}{2}\int_V E.\varepsilon.\frac{\sigma}{E}dV = \frac{1}{2}\int_V \sigma.\varepsilon.dV$$

Poznámka: Energia napätosti A_σ je vždy kladná, i keď pôjde o namáhanie v tlaku. Vtedy

$$A_\sigma = \frac{1}{2}\int_V (-\sigma).(-\varepsilon)dV = \frac{1}{2}\int_V \sigma.\varepsilon dV$$

b) Energia napätosti šmykových napätí

Podobne ako pri normálových napätiach, možno vyjadriť energiu napätosti šmykových napätí (obr. 4.17)



obr.4.17 Energia napätosti šmykových napätí

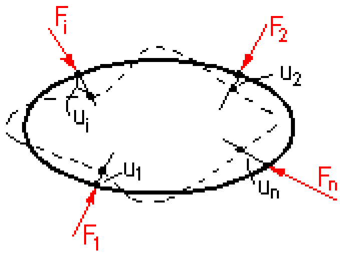
$$A_\tau = \frac{1}{2}\int_V \tau.\gamma dV$$

Celková energia napätosti v danom telese je vo všeobecnom prípade daná súčtom energie napätosti normálových a šmykových napätí

$$A = A_\sigma + A_\tau$$

4.12 CASTIGLIANOVA VETA

Uvažujeme poddajné teleso, ktoré je zaťažené rovnovážnou silovou sústavou $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, ...,$\mathbf{F_i}$, ...,$\mathbf{F_n}$ (obr. 4.18).



obr.4.18 Castiglianova veta

Pôsobiská vonkajších síl sú na povrchu telesa, ktoré sa pri pretvorení telesa posunú o hodnoty $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, ...,$\mathbf{u_i}$, ...,$\mathbf{u_n}$. Pretože napätia σ a τ sú v konečnom dôsledku pre teleso daných rozmerov funkciou zaťažujúcich síl, bude aj celková energia napätosti funkciou síl $A = f(F_1, F_2, ..., F_i, ..., F_n)$. Ak zväčšíme napr. silu F_1 o veľmi malú hodnotu dF_i , zväčší sa posunutie o du_i a energia napätosti o hodnotu

$$dA = \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i$$

takže energia napätosti bude

$$A + dA = A + \frac{\partial A}{\partial F_i} dF_i = \left(F_i + dF_i\right)\left(u_i + du_i\right) = F_i\left(u_i + du_i\right) + dF_i.u_i + dF_i.du_i$$

kde A je práca sily F_i na posunutiach ($u_i + du_i$), a súčin dvoch malých veličín $dF_i.du_i$ zanedbáme. Potom

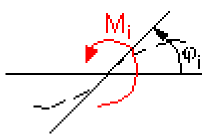
$$A + \frac{\partial A}{\partial F_i}.dF_i = A + u_i.dF_i$$

resp.

$$\frac{\partial A}{\partial F_i} = u_i$$

Výsledná rovnica je matematickým vyjadrením prvej Castiglianovej vety, podľa ktorej posunutie pôsobiska ľubovoľnej sily pri deformácii telesa (za predpokladu platnosti Hookovho zákona) sa rovná parciálnej derivácii celkovej energie napätosti podľa tejto sily. Zmysel posunutia sily u_i súhlasí so zmyslom sily F_i.

Poznámka: I. Castiglianova veta vyžaduje taktiež platnosť *zákona superpozície účinkov*, ktorý si vysvetlíme neskôr. Zákon superpozície účinkov hovorí: *Ak na teleso pôsobí sústava vonkajších síl, potom výsledný napäťový a deformačný účinok je rovný súčtu účinkov od jednotlivých síl, pričom nezáleží na poradí pôsobiacich síl.*
Pri odvádzaní tejto vety mohli sme však znakom $\mathbf{F_i}$ označiť aj moment točivej dvojice síl $\mathbf{M_i}$ a znakom $\mathbf{u_i}$ zase príslušné natočenie φ_i (obr. 4.19).



obr.4.19 Uhol natočenia

Postup i výsledok by boli rovnaké a preto možno tiež písať:

$$\varphi_i = \frac{\partial A}{\partial M_i}$$

I.Castiglianovu vetu budeme používať na vyjadrenie deformácie telesa.

4.13 MIERA BEZPEČNOSTI A DOVOLENÉ NAMÁHANIE

Trhacia skúška nám dáva dôležité údaje o mechanických vlastnostiach materiálu. Ak z nej poznáme medzu klzu a medzu pevnosti materiálu, môžeme určiť pre každú technickú úlohu veľkosť napätia, ktoré môžeme pokladať za bezpečné. Toto prípustné napätie voláme *dovoleným namáhaním*. Pri voľbe dovoleného namáhania pre oceľ si treba uvedomiť, že tento materiál pri napätiach pod medzou úmernosti môžeme považovať za dokonale pružný a pri napätiach nad touto medzou dochádza k trvalému plastickému pretvoreniu. Ak chceme pripustiť len pružné deformácie, dovolené namáhanie musí byť nižšie ako je medza úmernosti daného materiálu. Pretože zisťovanie tejto medze je dosť obtiažne a jej poloha závisí od presnosti merania, berieme pre určenie dovoleného namáhania materiálu obyčajne medzu klzu alebo medzu pevnosti. Veľkosť dovoleného namáhania potom určujeme podľa rovníc:

$$\sigma_{DOV} = \frac{\sigma_K}{s_k}$$

$$\sigma_{DOV} = \frac{\sigma_{pt}}{s_p}$$

kde s_k, resp. s_p sú miery bezpečnosti vzhľadom na medzu klzu σ_K, resp. na medzu pevnosti σ_{Pt}.

Pri konštrukčných oceliach berieme obvykle za základ pre výpočet dovoleného namáhania medzu klzu σ_K. Pri statickom namáhaní pritom uvažujeme mieru bezpečnosti $s_k \in (1{,}4 \sim 1{,}6)$. Pre krehké materiály (liatinu a pod.) berieme za základ na určenie dovoleného namáhania medzu pevnosti σ_{Pt}. Mieru bezpečnosti volíme v závislosti od presnosti zvoleného matematického modelu danej konštrukcie, ako aj metódy riešenia homogenity použitých látok.

Pre mnohé konštrukcie sú hodnoty miery bezpečnosti určené normami STN.

Podľa rovnakých metód volíme dovolené namáhanie v šmyku:

$$\tau_{DOV} = \frac{\tau_K}{s_k}$$

$$\tau_{DOV} = \frac{\tau_{pt}}{s_p}$$

Ako uvidíme ďalej, je vzájomný vzťah medzi σ_{dov} a τ_{dov} určených hypotézami pevnosti. Je zrejmé, že ak súčiastka má pracovať s príslušnou bezpečnosťou, musí byť splnená *bezpečnostná podmienka*

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{dov}$$

alebo

$$\tau_{max} \leq \tau_{dov}$$

kde σ_{max} a τ_{max} sú maximálne hodnoty napätia.