

# 5. Úlohy prostého ťahu a tlaku

## Učebný cieľ kapitoly

Po preštudovaní tejto kapitoly by ste mali ovládať:

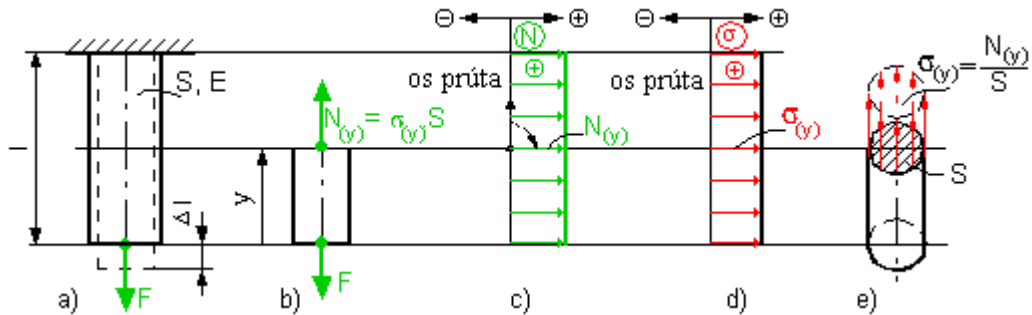
- Kedy nastáva namáhanie na čistý ťah-tlak
- Ktorá zložka výslednice vnútorných síl je nenulová
- Ako je definované normálové napätie čistého ťahu-tlaku
- Podľa akého pravidla volíme myslené rezy
- Načo určujeme priebeh osových síl a normálových napätí
- Ako sa vypočíta celkové predĺženie (skrátene) tyče
- Ako zohľadniť vlastnú tiaž pri výpočte vnútorných síl a celkového predĺženia
- Akým postupom treba riešiť staticky neurčité úlohy
- Ako sa dimenzujú jednoduché prútočky
- Ako sa určí posunutie styčníc prútočky
- Ako sa riešia staticky neurčité prútočky
- Ako sa vykonáva statická analýza zložitých prútoviek
- Ako je definovaná tiažová reťazovka - predpoklady a mechanický model
- Aký priebeh má osová sila a normálové napätie po dĺžke reťazovky
- Ako sa určí celkové predĺženie reťazovky
- Ako sa vykonáva statická analýza reťazoviek symetrických a s prevýšením upevnenia jej koncov

Ak možno určiť výslednicu vnútorných síl - *osovú silu* zo statických podmienok rovnováhy, hovoríme o staticky určitej úlohe čistého ťahu alebo tlaku. V opačnom prípade musíme statické podmienky rovnováhy doplniť ďalšími - *deformačnými podmienkami* a hovoríme o staticky neurčitých úlohách. Medzi prípady namáhania prostým ťahom možno zaradiť: namáhanie vonkajšou osovou silou, vlastnou tiažou a odstredivou silou a iné.

### 5.1 NAMÁHANIE OSOVOU SILOU F

#### a) Staticky určité úlohy

Uvažujeme tyč konštatného prierezu na jednom konci pevne zachytenú a na druhom konci zaťaženú vonkajšou osovou silou  $F$ . Zaujímá nás poloha nebezpečného prierezu tyče a celková deformácia tyče. Na to potrebujeme určiť priebeh výslednice vnútorných síl - osovú silu  $N$  a priebeh normálových napätí  $\sigma$  v jednotlivých myslených rezoch tyče, ako aj celkové predĺženie tyče  $\Delta l$ , resp. pomerné predĺženie  $\epsilon$ .



Obr.5.1 Čistý ťah

Rozrežeme tyč na obr. 5.1a myslenným rezom kolným na os tyče na dve časti. Počiatok súradnice  $y$  volíme vo voľnom konci tyče. Odrezanú časť tyče 5.1b uvedieme do statickej rovnováhy tak, že do myslenného rezu vložíme (v kladnom smere - von z rezu) výslednicu vnútorných síl  $N(y)$ . Táto osová sila musí byť v rovnováhe s vonkajšími silami pôsobiacimi na odrezanú časť.

Zo statických podmienok rovnováhy síl do osi  $y$  pre odrezanú časť tyče máme:

$$\sum F_y = 0: \quad N(y) - F = 0 \Rightarrow N(y) = \frac{F}{S}, y \in (0, l)$$

V tomto prípade je priebeh  $N(y)$  konštantný po celej dĺžke tyče a je nakreslený na obr. 5.1c.

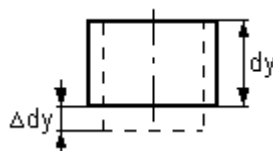
Z výslednice vnútorných síl možno určiť napätie  $\sigma(y)$  v jednotlivých myslenných rezoch. Pri prútoch s konštantným prierezom alebo prútoch, ktorých prierez sa málo mení, sila  $F$  predlžuje tyč tak, aby sledovaný (pôvodne rovinný prierez) zostal rovinným aj po deformácii. Z podmienky zachovania rovinnosti prierezu vyplýva, že napätie má konštantnú hodnotu v každom bode prierezu (obr. 5.1c) a jeho veľkosť bude

$$\sigma(y) = \frac{F}{S}$$

Jeho priebeh v rezoch po dĺžke tyče je znázornený na obr. 5.1b.

Ako vidieť z priebehov  $\sigma(y)$  a  $N(y)$  (spôsob ich grafického znázorňovania je zrejmý z obr. 5.1c, d), napätie a osová sila nie je závislá od  $y$ . Ako uvidíme neskôr, situácia sa zmení, ak budeme uvažovať aj pôsobenie objemových síl - vlastnej tiaže telesa. Pre tyč podľa obr. 5.1 je nebezpečným prierezom ľubovoľný rez kolmý na os prúta.

Deformáciu tyče - jej celkové predĺženie možno určiť z definície pomerného predĺženia alebo pomocou I. Castiglianovej vety.



Obr.5.2 Pomerné predĺženie

Predĺženie elementu  $dy$  (obr. 5.2) vyňatej z ťahanej tyče bude

$$\Delta dy = \epsilon \cdot dy$$

Celkové predĺženie potom bude

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dy = \int_0^l \epsilon \cdot dy = \int_0^l \frac{\sigma(y)}{E} dy = \int_0^l \frac{N(y)}{E \cdot S} dy = \frac{F l}{S \cdot E}$$

Podľa I. Castiglianovej vety určíme posunutie pôsobiska sily  $F$  zo vzťahu

$$\Delta l = \frac{\partial A}{\partial F}$$

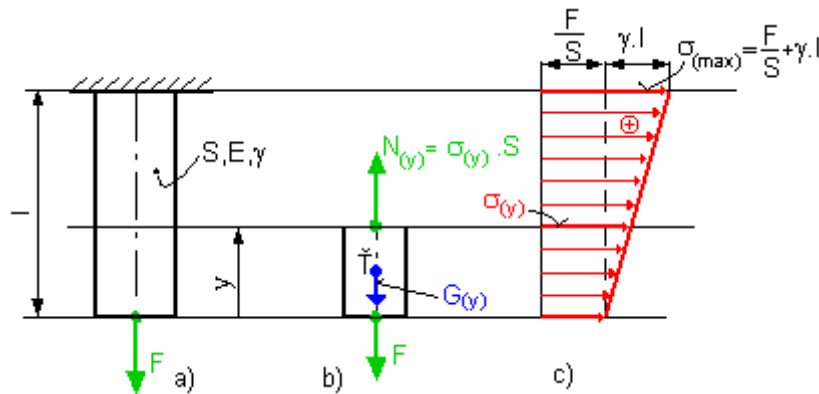
resp.

$$A = \frac{1}{2} \frac{F^2 l}{S \cdot E}, \quad \frac{\partial A}{\partial F} = \frac{F l}{S \cdot E} = \Delta l$$

čo súhlasí s výsledkom získaným z definičného vzťahu pre celkové predĺženie. Priebeg napätia a celkové predĺženie tyče zaťaženej sústavou osových síl možno určiť obdobným spôsobom.

## 5.2 NAMÁHANIE OSOVOU SILOU F PRI SPOLUPÔSOBNÍ VLASTNEJ TIAŽE TYČE

Uvažujeme tyč vo zvislej polohe, ktorej rozmery a v ich dôsledku vlastná tiaž nie je zanedbateľná voči veľkosti osovej sily  $F$  (obr. 5.3). Priebeg napätia určíme opäť metódou mysleneho rezu.



Obr.5.3 Vplyv vlastnej tiaže

Z podmienok rovnováhy odrezanej časti tyče (obr. 5.3b) dostaneme:

$$\sum F_y = 0 \quad \sigma(y) \cdot S - F - G(y) = 0$$

kde  $G(y)$  je vlastná tiaž odrezanej časti tyče ( $\gamma = \rho \cdot g$  je merná tiaž). V našom prípade  $G(y) = V(y) \cdot \gamma = S \cdot y \cdot \gamma$ . Potom napätie v myslenom reze je:

$$\sigma(y) = \frac{F + \gamma \cdot S \cdot y}{S} = \frac{F}{S} + \gamma \cdot y$$

Priebeg  $\sigma(y)$  určíme ako priebeg rovnice priamky v intervale  $y \in (0, l)$ .

$$y = 0 \dots \dots \dots \sigma(y) = 0$$

$$y = l \dots \dots \dots \sigma(y) = \sigma_{\max} = \frac{F}{S} + \gamma l$$

Priebeg napätia po dĺžke tyče je znázornený na obr. 5.3c. Nebezpečný prierez sa nachádza v mieste maximálneho napätia  $\sigma_{\max}$  - v mieste votknutia tyče. Aby nedošlo k porušeniu tyče v nebezpečnom priereze, musí byť splnená pevnostná podmienka

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{S} + \gamma l \leq \sigma_{\text{doz}}$$

Celková energia napätosti tyče je

$$A = A_{\sigma} = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma(y) \cdot E \cdot dy = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\sigma^2(y)}{E \cdot S} dy = \dots$$

$$A = \frac{1}{2ES} \left[ F^2 l + F \gamma S l^2 + \frac{\gamma^2 S^2 l^3}{3} \right]$$

potom celkové predĺženie tyče

$$\Delta l = \frac{\partial A}{\partial F} = \frac{F l}{S E} + \frac{\gamma l^2}{2 E}$$

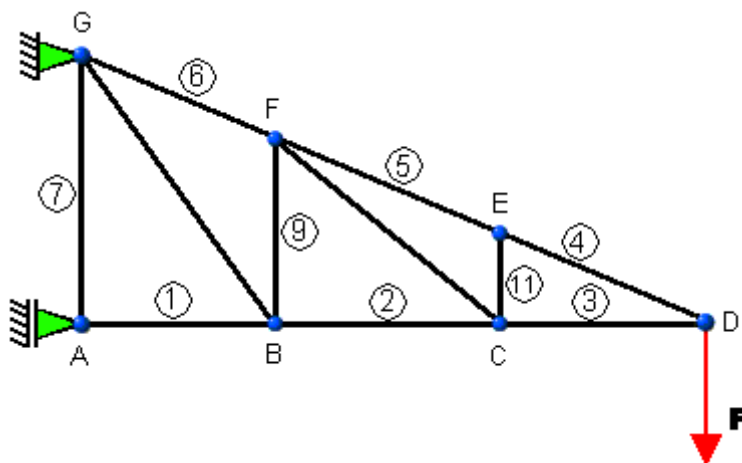
Ten istý výsledok by sme pre celkové predĺženie dostali aj zo vzťahu

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon dy = \dots = \frac{F l}{S E} + \frac{\gamma l^2}{2 E}$$

Z týchto vzťahov je zrejmé, že napätie, resp. celkové predĺženie tyče je rovné súčtu napätí, resp. predĺžení, od osovej sily a vlastnej tiaže, čo je vlastne potvrdením *zákona superpozície účinkov*. *Statically určité úlohy* namáhania osovou silou riešime podľa postupu uvedeného v príkladoch uvedených v tejto kapitole.

### 5.3 DIMENZOVANIE PRÚTOVÝCH SÚSTAV

Na obr. 5.4 je znázornené rameno stožiaru vysokého napätia. Konštrukčné prvky označené číslicami 1, 2, ..., 11 nazývame *prúty*. Prúty sú navzájom pospájané v bodoch A, B, ..., G, ktoré nazývame *styčnicami*. Ak predpokladáme, že prúty sú dostatočne štíhle (rozmery prierezu prúta sú malé oproti jeho dĺžke) a v styčnicoch sú pospájané v kĺboch bez trenia, možno takúto sústavu priamych prútov považovať za *prútovú sústavu*. Pretože ideálne kĺby bez trenia neprenášajú do prútov žiadne momenty vonkajších síl, prúty sú namáhané len osovými silami. Skutočné koštrukcie (stožiaru vn, osvetľovacie veže, anténne sústavy, ...) sú však spájané spravidla zvaraním, skrutkovými spojmi a ideálnej prútovej sústave sa viac-menej len približujú. Toto priblíženie bude tým korektnejšie, čím sú prúty štíhlejšie a spojenie styčných bodov je menej tuhé. V opačnom prípade treba uvažovať, že koštrukcia pozostáva z nosníkov.



Obr.5.4 Rameno stožiaru

Pri pevnostnom a tuhostnom návrhu prútových koštrukcií nás zaujíma:

- a. veľkosť osových síl v prútoch -  $P_i$  ( $i = 1, \dots, n$  - číslo prúta)
- b. celkové predĺženie, resp. skrátenie prútov -  $\Delta l_i$
- c. posunutie styčnicov po zaťažení prútovej sústavy

Používajú sa pritom klasické metódy statiky (styčnicková, priesečná, ...), ktoré sú však čoraz viac nahrádzané numerickými metódami (napr. metóda konečných prvkov). Potom nám klasické metódy slúžia na orientačnú kontrolu správnosti numerického riešenia.

Ak je prútová sústava staticky určitá, na výpočet osových síl stačia klasické vektorové metódy statiky. Pri staticky neurčitých úlohách musíme vziať do úvahy pri výpočte osových síl aj deformačné podmienky. V prípade metódy konečných prvkov do určitej miery odpadajú ťažkosti spojené s návrhom staticky neurčitej prútovej sústavy. Táto metóda riešenia však vyžaduje, aby vnútorná statická určitosť bola  $i_{vn} \leq 3$  (prútovka a ani jej časť nesmie byť mechanizmom).

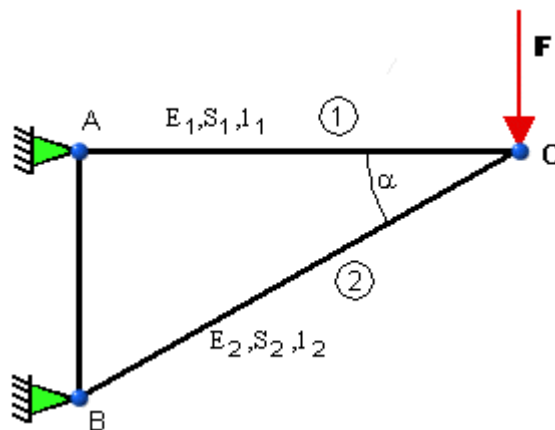
### a) Jednoduché prútové sústavy

#### a1) Staticky určité úlohy

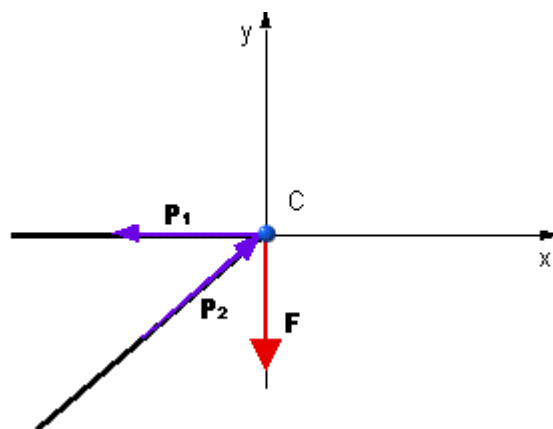
Sily v jednotlivých prútoch staticky určitej prútovej sústavy určíme z rovnováhy uvoľnených styčnickov, pričom účinok prútov nahradíme osovými silami. Ak poznáme osovú silu v jednotlivých prútoch, môžeme určiť predĺženia, resp. skrátenia prútov.

#### Příklad 1

Určite osovú silu v prútoch 1 a 2, zvislé a vodorovné posunutia styčnicka C prútovej sústavy (obr. 5.5) zaťaženej silou  $F$ , ak vlastnú tiaž prútov neuvažujeme.



Obr.5.5 Prútovka



Obr.5.6 Rovnováha styčnicka

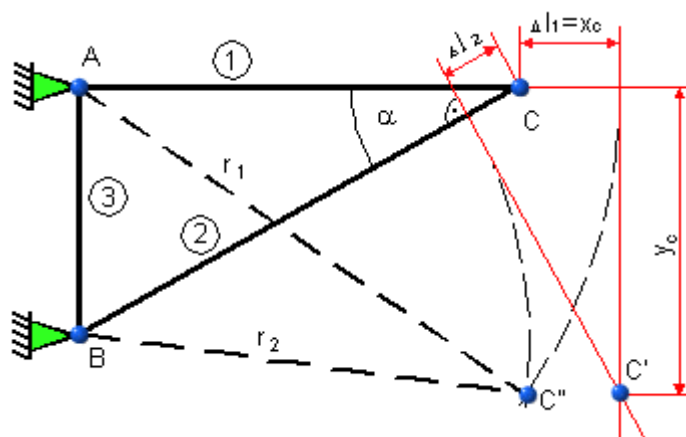
Uvoľníme styčník  $C$  a vložíme do neho v predpokladanom smere pôsobenia osovú silu (tlaková sila smeruje do styčníka, ťahová sila smeruje von zo styčníka)  $P_1$  a  $P_2$  (obr. 5.6). Zo statických podmienok rovnováhy dostaneme:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0: & \quad -P_1 + P_2 \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y = 0: & \quad -F + P_2 \sin \alpha = P_2 = \frac{F}{\sin \alpha} \\ P_1 = P_2 \cos \alpha = F \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{F}{\operatorname{tg} \alpha}\end{aligned}$$

Osovú silu vyšli so znamienkom  $+$ , preto podľa úvodného predpokladu v prúte číslo 1 je ťah a v prúte č. 2 je tlak.

Posunutie styčníka určíme z predĺženia, resp. skrátenia prútov 1 a 2. Predĺženia prútov sú:

$$\begin{aligned}\Delta l_1 &= \frac{P_1 l_1}{E_1 S_1} = \frac{F l_1}{E_1 S_1 \sin \alpha} \\ \Delta l_2 &= \frac{P_2 l_2}{E_2 S_2} = \frac{F l_2}{E_2 S_2 \operatorname{tg} \alpha}\end{aligned}$$



Obr.5.7 Posunutie styčníka

Na určenie pretvorenia sústavy stačí opísať kružnice z bodov A a B (obr. 5.7) s polomerami:

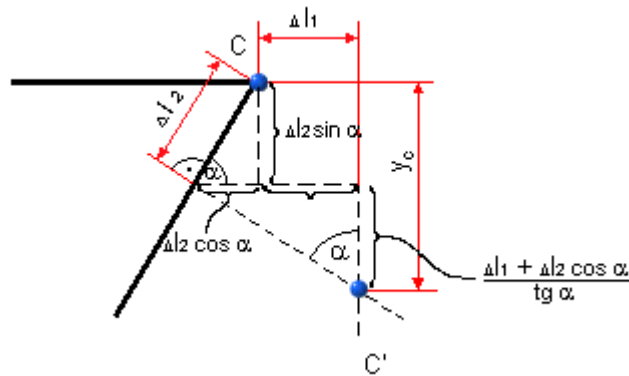
$$\begin{aligned}r_1 &= l_1 + \Delta l_1 = l_1 \left( 1 + \frac{F}{E_1 S_1 \sin \alpha} \right) \\ r_2 &= l_2 - \Delta l_2 = l_2 \left( 1 - \frac{F}{E_2 S_2 \operatorname{tg} \alpha} \right)\end{aligned}$$

Keďže deformácie musia byť malé, možno kružnice nahradiť dotyčnicami kolnými na prúty nedeformovanej sústavy (obr. 5.7, 5.8).

Potom vodorovné posunutie

$$x_c = \Delta l_1 = \frac{F l_1}{E_1 S_1 \sin \alpha}$$

Zvislé posunutie vypočítame z geometrických závislostí vo zväčšenej mierke nakresleného štvoruholníka.



Obr.5.8 Geometrická závislosť

Zvislé posunutie bude:

$$y_c = \Delta l_2 \sin \alpha + \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2 \cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$$

### Příklad 2

Určite sily v prútoch prútovej sústavy podľa obr. 5.9, ako aj vodorovné a zvislé posunutie styčníc C a B, ak všetky prúty zohrejeme o rovnaký teplotný rozdiel z teploty  $t_0$  na teplotu  $t$ .

Zo statických podmienok rovnováhy uvoľnených styčníc zistíme, že osovú silu v prútoch sú nulové. (Ak zohrejeme prúty *staticky určitej prútovej sústavy* o rovnaký teplotný rozdiel, osovú silu od teplotného zaťaženia sú rovné nule. Pre staticky neurčité prútovej sústavy to však neplatí). Posunutie styčníc je dané predĺžením jednotlivých prútov vplyvom teplotnej rozťažnosti:

$$\Delta l_1 = \alpha_1 (t - t_0) l_1$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \alpha_2 (t - t_0) l_2$$

$$\Delta l_3 = \alpha (t - t_0) l_3$$

*Posunutie styčnika C:*

$$x_C = \Delta l_1$$

$$y_C = \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{(\Delta l_1 - \Delta l_2 \cdot \cos \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha}$$

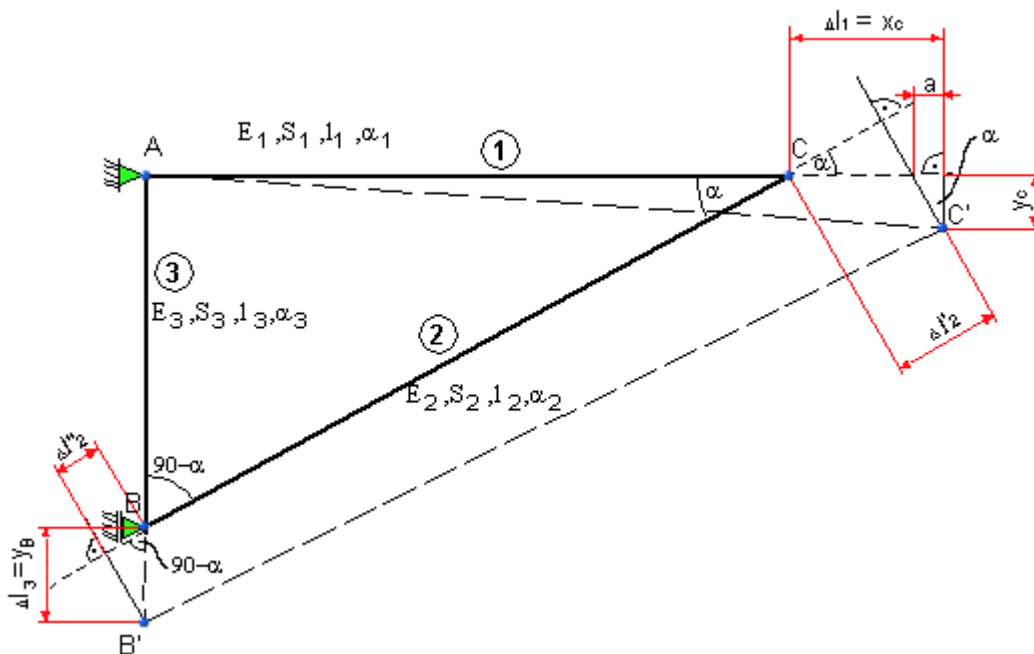
*Posunutie styčnika B:*

$$x_B = 0$$

$$y_B = \Delta l_3$$

pričom

$$\Delta l_2' = \Delta l_2 - \Delta l_2'' = \Delta l_2 - \Delta l_3 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) = \Delta l_2 - \Delta l_3 \cdot \sin \alpha$$



Obr.5.9 Posunutie styčnícov

### a2) Staticky neurčité úlohy

Jednoduché prútové sústavy, pri ktorých nemožno určiť osové sily v prútoch len zo statických podmienok rovnováhy, nazývame staticky neurčitými. V tomto prípade musíme statické podmienky rovnováhy styčníka doplniť deformačnými podmienkami (musí byť zohľadnená podmienka neporušenosti spojenia prútov v styčnícach po deformácii). Celkový počet rovníc musí byť totožný s celkovým počtom neznámych osových síl v styčníku.

#### Příklad 1

Stanovte sily v prútoch sústavy podľa obr. 5.10 zaťaženej silou  $F$ .

Z podmienok rovnováhy uvoľneného styčníka (obr. 5.11) máme:

$$1. \sum F_x = 0: \quad -P_2 \sin \alpha + P_3 \sin \alpha = 0 \Rightarrow P_2 = P_3 = P$$

$$2. \sum F_y = 0: \quad P_1 + P_2 \cos \alpha + P_3 \cos \alpha - F = 0 \Rightarrow P_1 + 2P \cos \alpha = F$$

Pretože máme tri neznáme sily, musíme napísať tretiu, doplňujúcu rovnicu. Z posunutia styčníka  $C$  (obr. 5.10) vidíme, že

$$\Delta l_1 = \frac{P_1 l_1}{S_1 E_1}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l = \frac{P l}{E S}$$

$$3. \frac{\Delta l}{y_c} = \cos \alpha \Rightarrow \Delta l = y_c \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{P l}{E S} = \frac{P_1 l_1}{S_1 E_1} \cdot \cos \alpha$$

Dosadením za  $P_1$  z rovnice 1. do rovnice 3. máme:

$$\frac{P l}{E S} = \frac{(F - 2P \cdot \cos \alpha) l_1}{E_1 S_1}$$

resp.

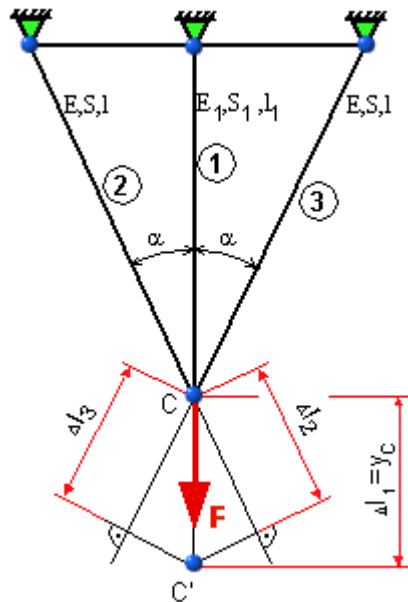


$$P = P_2 = P_3 = \frac{F l_1}{E_1 S_1} \cdot \frac{1}{\frac{l}{E S} + \frac{2 l_1 \cos \alpha}{E_1 S_1}}$$

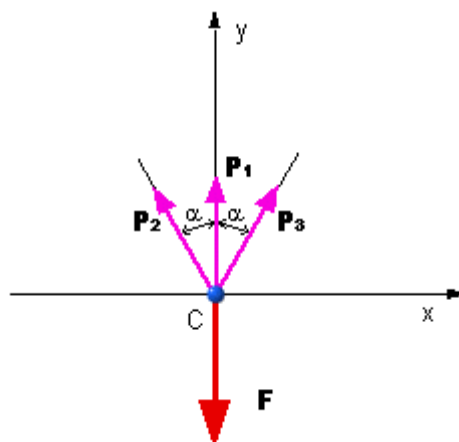
Osové sily vyšli so znamienkom +, to znamená, že pôsobia v smere zvolenom na obr.5.11. Vo všetkých troch prútoch je ťah. Pevnostná podmienka pre návrh prútov bude

$$\sigma_i = \frac{P_i}{S_i} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

kde index  $i$  označuje číslo prúta.



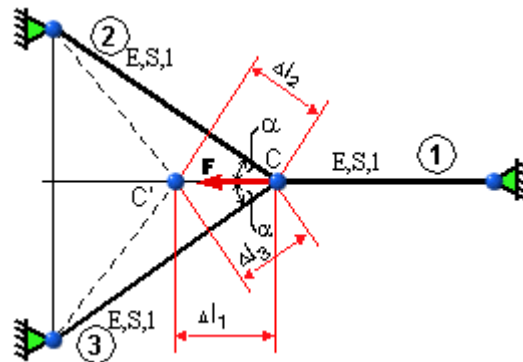
Obr.5.10 Staticky neurčitá úloha



Obr.5.11 Uvoľnený styčnik

### Príklad 2

Určite osové sily prútovej sústavy podľa obr. 5.12 zaťaženej silou  $F$ .



Obr.5.12 Posunutie styčníka

Z rovnováhy uvoľneného  $C$  styčníka máme (obr. 5.11):

$$1. \sum F_x = 0: \quad P_1 - F + P_2 \cos \alpha + P_3 \cos \alpha = 0$$

$$2. \sum F_y = 0: \quad P_2 \cos \alpha - P_3 \sin \alpha = 0 = P_2 = P_3 = P$$

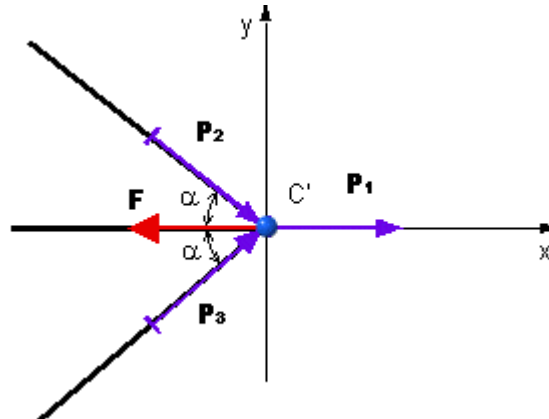
Dosadením do rovnice 1. máme:

$$P_1 = F - 2P \cos \alpha$$

V tejto rovnici sú dve neznáme, preto napíšeme deformačnú podmienku, ktorá vyplýva z celkových predĺžení, resp. skrátení prútov:

$$\Delta l_2 = \frac{P_2 l}{ES}$$

$$\Delta l_1 = \frac{P_1 l}{ES} = \frac{P_2 l}{ES} = \frac{Pl}{ES}$$



Obr.5.13 Rovnováha styčníka

Pre posunutie styčníka  $C$  teda platí:

$$x_C = \Delta l_1 = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha} = \frac{Pl}{ES \cos \alpha} = \frac{P_1 l}{ES}$$

Odtiaľ

$$P = P_1 \cos \alpha = (F - 2P \cos \alpha) \cos \alpha$$

a po úprave

$$P = P_2 = P_3 = \frac{F \cos \alpha}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$$

$$P_1 = \frac{F}{1 + 2 \cos^2 \alpha}$$

Osové sily vyšli so znamienkom +, to znamená, že pôsobia v tom zmysle, ako sme ich zakreslili na obr. 5.13. V prúte 1 je ťah, v prútoch 2 a 3 je tlak.

### Príklad 3

Určite sily v prútoch prútovej sústavy podľa obr. 5.14, ak prút č. 1 bol ohriaty o teplotný rozdiel  $\Delta t$ . Teplotná rozťažnosť materiálu je  $\alpha$ .

Z rovnováhy uvoľneného styčníka máme (obr. 5.13):

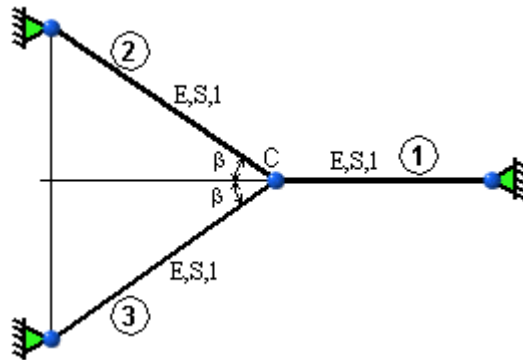
$$1. \sum F_x = 0: \quad -P_1 + P_2 \cos \beta + P_3 \cos \beta = 0$$

$$2. \sum F_y = 0: \quad -P_2 \sin \beta + P_3 \sin \beta = 0$$

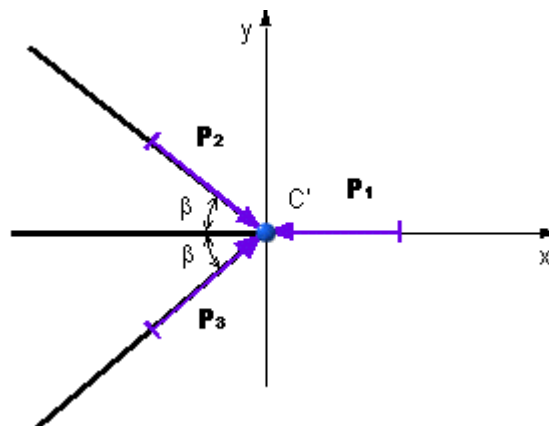
$$P_2 = P_3 = P$$

Z rovnice 1. dostaneme

$$P_1 = 2P \cos \beta$$



Obr.5.14 Prúťová sústava



Obr.5.15 Uvoľnený styčník

Na výpočet troch neznámych síl musíme podmienky rovnováhy doplniť deformačnou podmienkou. Predĺženia prútov sú:

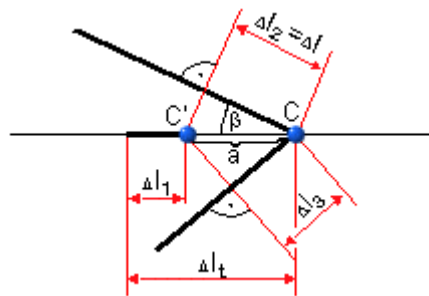
$$\Delta l_1 = \frac{P_1 l}{ES}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l = \frac{Pl}{ES}$$

Posunutie styčnka zistíme z tejto úvahy: Keby prút 1 bol uložený voľne v priestore, vplyvom ohriatia by sa predĺžil o hodnotu

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t$$

Vo voľnej deformácii mu však bránia prúty 2 a 3. Bude v ňom pritom vznikať tlaková sila, ktorá zníži veľkosť teplotného predĺženia  $\Delta l_t$  o hodnotu  $\Delta l_1$  (obr. 5.16).



Obr.5.16 Skrátenie prúta

Potom

$$3. \frac{\Delta l}{a} = \cos \beta$$

$$a = \Delta l_t - \Delta l_1 = \alpha l \Delta t - \frac{P_1 l}{ES}$$

$$\Delta l = a \cdot \cos \beta \Rightarrow \frac{Pl}{ES} = \left( \alpha l \Delta t - \frac{P_1 l}{ES} \right)$$

Dosadením za  $P_1$  do rovnice 3. a po úpravách dostaneme:

$$P_1 = \frac{2\alpha \Delta t \cdot ES \cos \beta}{1 + 2 \cos \beta}$$

$$P_2 = P_3 = P = \frac{\alpha \Delta t \cdot ES}{1 + 2 \cos \beta}$$

Veľkosť osových síl je priamo úmerná veľkosti teplotného rozdielu. Treba upozorniť, že pri staticky neurčitých prútočkách vnikajú značné osové sily už pri relatívne malých teplotných rozdieloch  $\Delta t$ .

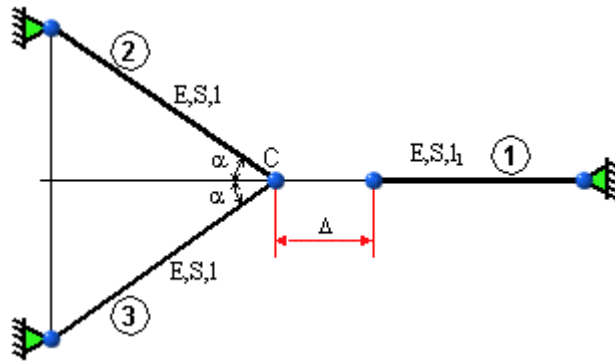
#### Príklad 4

Určite sily v prútoch, ak prút č. 1 bol vyrobený o hodnotu  $\Delta$  kratší (obr. 5.17). Z obr. 5.17 je zrejmé, že spojenie prútoch v spoločnom styčnku musí byť násilné. Prút č. 1 sa musí predĺžiť o hodnotu

$$\Delta l_1 = \frac{P_1 l_1}{ES}$$

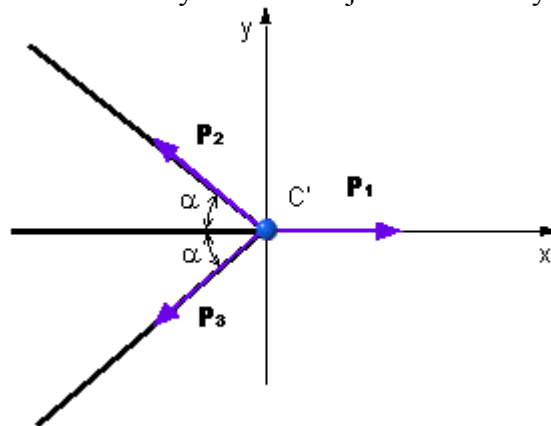
a prúty 2 a 3 o hodnotu

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l = \frac{Pl}{ES}$$



Obr.5.17 Vplyv výrobnjej nepresnosti

Sily  $P_1$  a  $P_2 = P_3 = P$  sú zakreslené v styčniku C a z jeho rovnováhy vyplýva (obr. 5.18):



Obr.5.18 Rovnováha styčnika

$$1. \sum F_x = 0: \quad P_1 - P_2 \cos \beta - P_3 \cos \beta = 0$$

$$2. \sum F_y = 0: \quad P_2 \sin \beta - P_3 \sin \beta = 0$$

$$\text{z 1. rovnice: } P_1 = 2P \cos \alpha$$

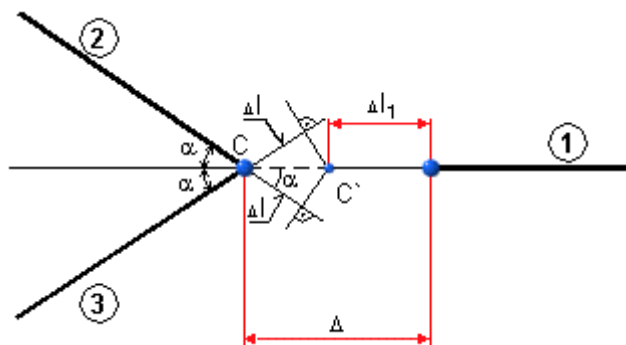
$$\text{z 2. rovnice: } P_2 = P_3 = P$$

Rovnice rovnováhy doplníme deformačnou podmienkou, ktorá vyplýva z obr. 5.19.

$$3. \Delta = \alpha + \Delta l_1, \text{ pričom } \alpha = \frac{\Delta l}{\cos \alpha} = \frac{Pl}{ES \cdot \cos \alpha}$$

Potom

$$\Delta = \frac{Pl}{ES \cdot \cos \alpha}$$



Obr. 5.19 Poloha styčníka

Dosadením za  $P_1$  a po úpravách dostaneme:

$$P_1 = \frac{\Delta ES \cdot 2 \cdot \cos^2 \alpha}{l(1 + 2 \cdot \cos^2 \alpha)}$$

$$P_2 = P_3 = P = \frac{\Delta ES \cdot \cos \alpha}{l(1 + 2 \cdot \cos^2 \alpha)}$$

Ako vidíme, veľkosť osových síl je priamo úmerná veľkosti nepresnosti  $\Delta$ .

**Poznámka:** Ak je prúťovka namáhaná súčasne vonkajšími silami, teplotou, prípadne aj prúty sú vyrobené nepresne, výsledné osovú sily budú dané superpozíciou osových síl od jednotlivých prípadov zaťaženia.

### b) Zložité prúťové sústavy

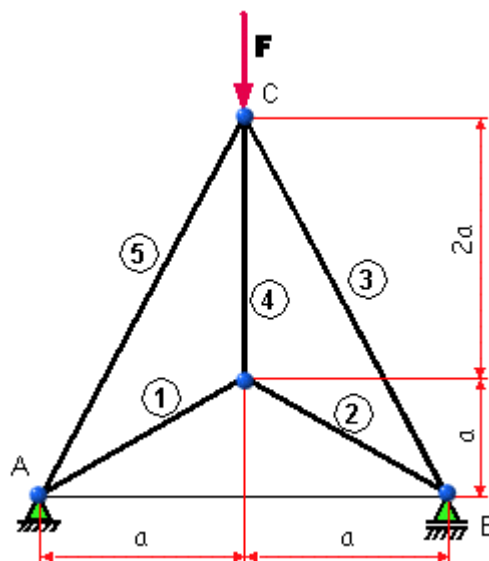
#### b1) Staticky určité úlohy

Rovinná prúťová sústava je staticky určitá, keď  $i_{vo} = 0$ ,  $i_{vn} = 3$ . Osovú sily v prúťoch určíme klasickými metódami statiky (styčnicová, priesečná, princíp virtuálnych prác, a iné). Vzhľadom na prácnosť ich aplikácie pri prúťovkách s veľkým počtom prúťov, ich hlavné využitie je na kontrolu výsledkov riešenia dosiahnutých numerickými metódami, napr. metódou konečných prvkov.

#### Príklad 1

Pre prúťovú sústavu podľa obr. 5.20 určite:

- statickú určitosť
- osovú sily v prúťoch
- prierezy prúťov tak, aby  $\sigma_i \leq \sigma_{\text{dov}}$
- posunutia styčníka C



Obr.5.20 Zadanie úlohy

*a) Statická určitost'*

Vonkajšia statická určitost' (väzby A a B odoberajú tri stupne voľnosti) je

$$i_{vp} = 3 - 2 - 1 = 0$$

Vnútoraná statická určitost'

$$i_{vn} = 3 \cdot p - 2 \cdot (2k_2 + k_1) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot (2 \cdot 2 + 2) = 3$$

prúťová sústava je staticky určitá.

*b) Osovú silu*

Na výpočet osových síl použijeme styčnickú metódu. Pre riešenie rovnováhy styčníka A a B musíme určiť väzbové reakcie. Väzbové reakcie  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  a  $R_B$  musia byť v statickej rovnováhe so zaťažujúcou silou  $F$  (obr. 5.21).

$$\sum F_x = 0: R_{Ax} = 0$$

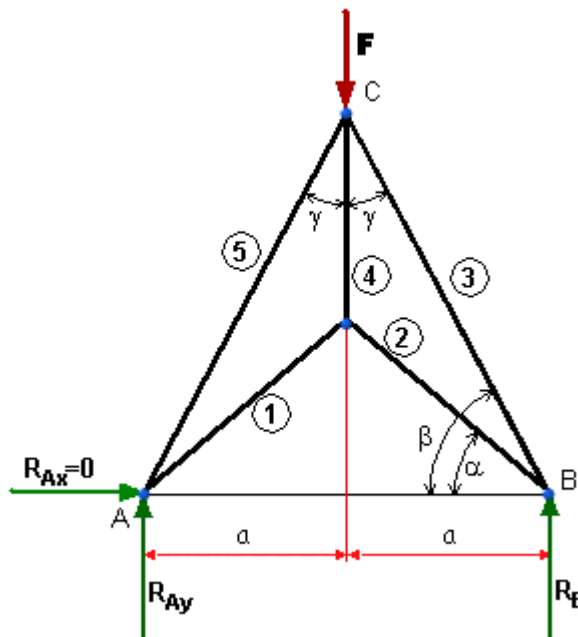
$$\sum F_y = 0: R_{Ay} + R_B - F = 0$$

$$\sum M_B = 0: R_{Ay} \cdot 2a - F = 0$$

$$R_{Ay} = \frac{F}{2}$$

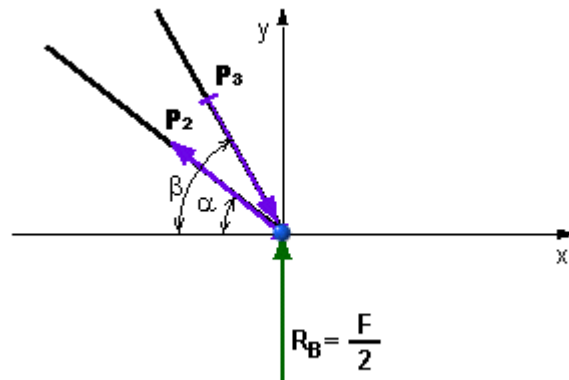
Vzhľadom na symetriu úlohy

$$R_B = R_{Ay} = \frac{F}{2}$$



Obr.5.21 Väzbové reakcie

Rovnováha styčnicka B



Obr. 5.22 Rovnováha styčnicka B

$$\sum F_x = 0: P_2 \cos \alpha - P_3 \cos \beta = 0$$

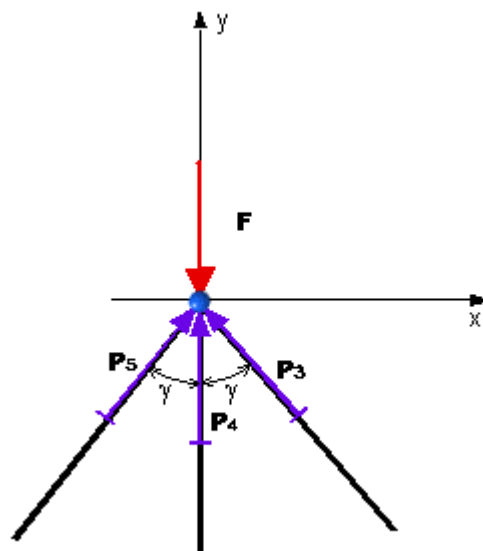
$$\sum F_y = 0: \frac{F}{2} - P_2 \sin \alpha + P_3 \sin \beta = 0$$

Z dvoch rovníc o dvoch neznámých možno určiť osové sily:

$$P_2 = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \frac{F}{2(\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \sin \beta)}$$

$$P_3 = \frac{F}{2(\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \sin \beta)}$$

V prúte 2 je ťah a v prúte 3 je tlak. Vzhľadom na symetriu úlohy možno predpokladať, že  $P_2 = P_1$ ,  $P_3 = P_5$ . Silu v prúte 4 určíme z rovnováhy styčnicka (obr. 5.23):



Obr. 5.23 Rovnováha styčnicka C



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & P_3 \sin \gamma - P_2 \sin \gamma = 0 \\ & P_3 = P_2 \\ \sum F_y = 0: & -F - P_4 + 2P_3 \cos \gamma = 0 \\ & P_4 = 2P_3 \cos \gamma - F = F \left( \frac{2 \cos \gamma}{2(\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \sin \beta)} - 1 \right) \\ & P_4 = F \frac{(\cos \gamma - \cos \beta \operatorname{tg} \alpha + \sin \beta)}{\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \sin \beta} \end{aligned}$$

### c) Prierezy prútov

Prierezy prútov určíme z pevnostnej podmienky  $\sigma_i \leq \sigma_{\text{doz}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{S_1} \leq \sigma_{\text{doz}} \Rightarrow S_1 &\geq \frac{P_1}{\sigma_{\text{doz}}}: & S_1 = S_2 \\ \frac{P_3}{S_3} \leq \sigma_{\text{doz}} \Rightarrow S_3 &\geq \frac{P_3}{\sigma_{\text{doz}}}: & S_3 = S_5 \\ \frac{P_4}{S_4} \leq \sigma_{\text{doz}} \Rightarrow S_4 &\geq \frac{P_4}{\sigma_{\text{doz}}} \end{aligned}$$

### d) Posunutie styčnika C

Bod C sa posunie v zvislom smere o hodnotu  $x_C$ , ktorá podľa I. Castiglianovej vety bude

$$x_C = \frac{\partial A}{\partial F}$$

pričom celková energia napätosti prútovej sústavy bude rovná súčtu energií napätosti jednotlivých prútov namáhaných čistým ťahom, resp. tlakom

$$A = \sum_{i=1}^5 \frac{P_i^2 l_i}{2S_i E_i}$$

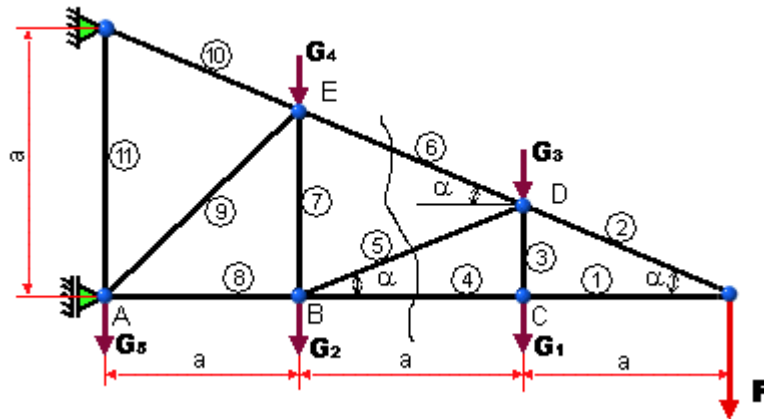
Potom

$$x_C = \frac{\partial}{\partial F} \left( \sum_{i=1}^5 \frac{P_i^2 l_i}{2S_i E_i} \right) = \sum_{i=1}^5 \frac{P_i^2 l_i}{2S_i E_i} \frac{\partial P_i}{\partial F} = \sum_{i=1}^5 \Delta l_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial F}$$

Kde  $\Delta l_i$  sú predĺženia, resp. skrátenia i-tého prúta a  $\frac{\partial P_i}{\partial F}$  je parciálna derivácia osovej sily v i-tom prúte podľa sily  $F$ .  $E_i$  a  $S_i$  je modul pružnosti v ťahu, resp. prierez i-tého prúta.

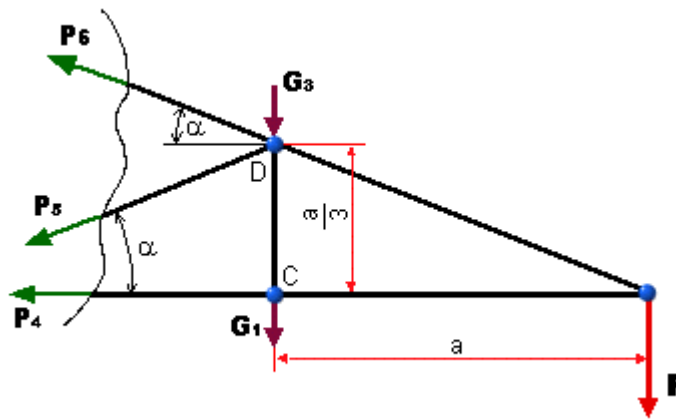
### Príklad 2

Rameno stožiaru vysokého napätia je zaťažené tiažou vodiča  $F$  a vlastnou tiažou prútov, ktorá je rozdelená do styčnikov A, B, C, D a E (obr. 5.24). Určite osové sily v prútoch **4**, **5** a **6** priesečnú metódou. Výpočet má slúžiť ako kontrola numerického riešenia.



Obr. 5.24 Zadanie úlohy

Ako možno výpočtom zistiť, prútová sústava je staticky určitá. Osové sily v prútoch 4, 5 a 6 určíme tak, že rozrežeme rameno myslenným rezom na dve polovice a riešime rovnováhu odrezanej časti (obr. 5.25):



Obr. 5.25 Rovnováha odrezanej časti ramena

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad P_6 \cos \alpha + P_5 \cos \alpha + P_4 = 0 \\ \sum F_y = 0: & \quad -F - G_1 - G_3 + P_6 \sin \alpha - P_5 \sin \alpha = 0 \\ \sum M_B = 0: & \quad Fa + P_4 \frac{a}{3} = 0 \\ & \quad P_4 = -3F \end{aligned}$$

Riešením rovníc 1 a 2 máme:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \alpha \\ \sin \alpha & -\sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_6 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3F \\ F_1 + G_1 + G_3 \end{bmatrix}$$

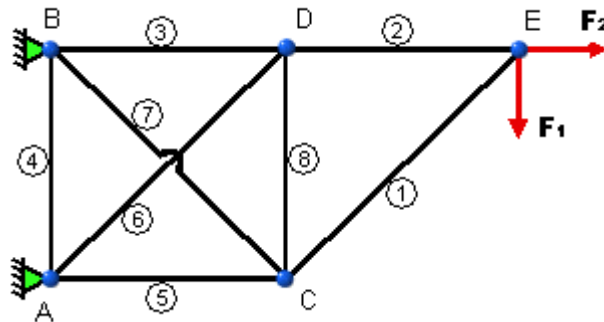
odkiaľ

$$P_5 = \frac{F(3tg\alpha - 1) - G_1 - G_2}{2 \sin \alpha}$$

$$P_6 = \frac{3F}{\cos \alpha} - P_5$$

### b2) Staticky neurčité úlohy

Uvažujme prútovú sústavu podľa obr. 5.26. Ako vidieť, prútová sústava je tak po vonkajšej, ako aj po vnútornej stránke staticky neurčitá:



Obr. 5.26 Zadanie úlohy

$$i_{wp} = 3 - 2 - 2 = -1$$

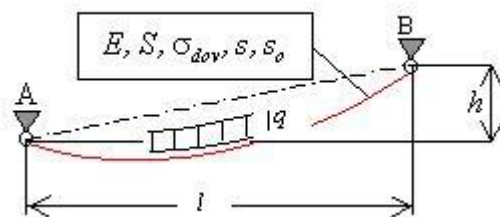
$$i_{vn} = 3 \cdot p - 2(3k_3 + 2k_2 + k_1) = 3 \cdot 8 - 2(3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1) = 2$$

Prútová sústava je raz po vonkajšej stránke staticky neurčitá a raz vnútorne staticky neurčitá. Na výpočet osových síl treba doplniť statické podmienky rovnováhy dvoma deformačnými podmienkami. Obvykle sa takéto prútovky riešia Castiglianovou vetou. Najvýhodnejšie je však použiť numerické metódy, a preto sa v tomto texte nebudeme zaoberať analytickým riešením staticky neurčitých prútových sústav. Podstata pevnostného a tuhostného návrhu staticky neurčitých prútových sústav je rovnaká ako pri staticky určitých úlohách. Staticky neurčité prútové sústavy sú z hľadiska pevnosti a tuhosti často výhodnejšie konštrukcie, zložitejšia je však ich statická analýza pôvodnými analytickými metódami. Preto prevládalo v minulosti úsilie navrhovať sústavy staticky určité. S rozvojom numerických metód však tento problém odpadá.

## 5.4 TIAŽOVÉ PARABOLICKÉ REŤAZOVKY

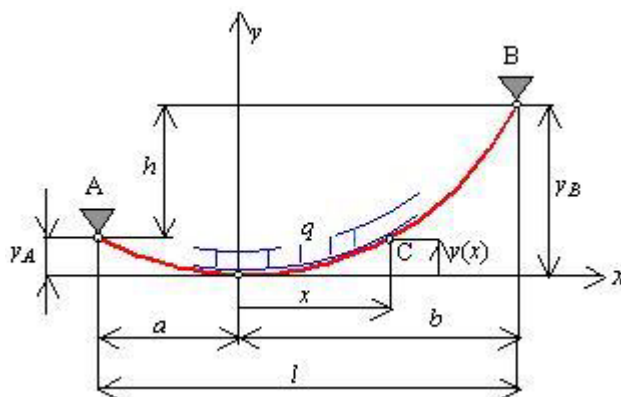
### 5.4.1 Prijaté predpoklady a mechanický model reťazovky

Pri rozvoze elektrickej energie ako aj v bežnej technickej praxi sa stretávame s prvkami namáhanými na ťah, ktorý je spôsobený najmä vlastnou tiažou. Tieto prvky ako sú napríklad vodiče napätia, nosné laná a pod., možno považovať za dokonale ohybné vlákna konštantného prierezu zaťažené vlastnou tiažou samotného vlákna, ako aj dodatočným po dĺžke vlákna rovnomerne rozloženým spojitém zaťažením  $q$  (napr. tiaž námrazy). Takéto vlákno nie je schopné prenášať ohybový moment, a bude prenášať len čistý ťah.



Obr.5.27 Tiažová reťazovka

Vlákno (reťazovka) je uchytená v bodoch A a B, ktorých rozpätie je  $l$  a prevýšenie upevnenia je  $h$ . Ak pôvodná (priama) dĺžka vlákna bola  $s_0$ , po jej zavesení vplyvom vertikálne pôsobiacej tiaže sa ustáli v deformovanom tvare s novou dĺžkou vlákna  $s$  (obr.5.27). Ak je priehyb vlákna proti rozpätiu malý, potom rozdiel medzi dĺžkou  $s$  a dĺžkou priamej spojnice bodov A a B je malý. Ak uvedený rozdiel je menší ako 10%, možno s dostatočnou presnosťou predpokladať, že tiaž vlákna, eventuálne námrazy, je rovnomerne rozložená po dĺžke priemetu vlákna do vodorovnej osi a nie po dĺžke krivky. Materiál vlákna je definovaný modulom pružnosti  $E$ , pričom dovolené namáhanie vlákna je  $\sigma_{dov}$ , a prierez vlákna je  $S$ . Na obr.5.28 je znázornený mechanický model tiažovej reťazovky. Počiatok vzt'azného súradnicového systému bol zvolený v najnižšom bode reťazovky, ktorého poloha zatiaľ nie je známa.



Obr.5.28 Mechanický model reťazovky

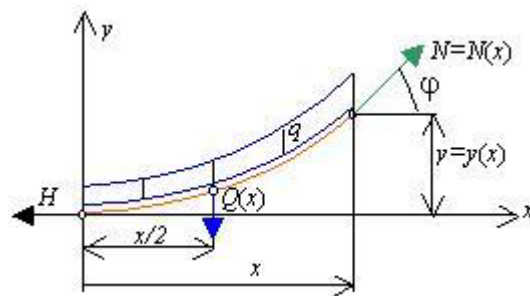
Z hľadiska elastostatiky tiažovej reťazovky treba určiť:

- rovnicu deformovaného tvaru reťazovky  $y = y(x)$  a maximálny priehyb  $y_{max}$
- veľkosť osovej sily  $N = N(x)$  v ľubovoľnom mieste  $x$  a jej maximálnu a minimálnu hodnotu
- priebeh normálového (ťahového) napätia a jeho maximálnu a minimálnu hodnotu
- väzbové reakcie v bodoch uchytenia A a B
- celkové predĺženie reťazovky

### 5.4.2 Rovnica deformovaného tvaru reťazovky

Na obr.5.29 je znázornená vybraná časť reťazovky dvoma myšlenými rezmi. Vonkajšie spojité zaťaženie (napr. vlastná tiaž) musí byť v statickej rovnováhe s vnútornými osovými silami:  $H$

je normálová osová sila v reze v najnižšom bode reťazovky,  $N(x)$  je normálová osová sila (pôsobí v smere dotyčnice k priehybovej čiare) v mieste  $x$ . Spojité zaťaženie  $q$  nahradíme výslednicou  $Q(x) = q \cdot x$ , pôsobiacou v ťažisku vybratej časti reťazovky.



Obr.5.29 Rovnováha vybratej časti reťazovky

Pre vybratú časť reťazovky možno napísať tri statické podmienky rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad -H + N \cos \varphi = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad -q \cdot x + N \sin \varphi = 0$$

$$\sum M_{ic} = 0: \quad -H \cdot y + q \frac{x^2}{2} = 0$$

Z momentovej rovnice rovnováhy k bodu C možno určiť rovnicu priehybovej čiary reťazovky:

$$y = y(x) = \frac{q}{2H} x^2$$

Čo predstavuje rovnicu paraboly. Vlákna, spĺňajúce túto rovnicu nazývame parabolické reťazovky.

V prípade známej osovej sily  $H$  možno z rovnice reťazovky určiť polohu bodov A, B a prevýšenie  $h$ :

$$\text{pre } x = b \dots y(x) = y_B = \frac{qb^2}{2H}$$

$$\text{pre } x = -a \dots y(x) = y_A = \frac{qa^2}{2H}$$

$$h = y_B - y_A = \frac{q}{2H} (b^2 - a^2)$$

### 5.4.3 Osová sila v reťazovke

Zo silových rovníc vyplýva:

$$H = N \cos \varphi$$

$$qx = N \sin \varphi$$

Umocnením a sčítaním týchto dvoch rovníc dostaneme

$$N = N(x) = \sqrt{H^2 + (qx)^2} = H \sqrt{1 + (qx)^2}$$

Je zrejmé, že ak:

$$x = -a \quad N(x) = H \sqrt{1 + \left(\frac{qa}{H}\right)^2} = N_A$$

$$x = b \quad N(x) = H \sqrt{1 + \left(\frac{qb}{H}\right)^2} = N_B$$

$$x = 0 \quad N(x) = H = N_{\min} \text{ - minimálna osová sila}$$

Za predpokladu  $b > a$  je  $N_B > N_A$ , a teda  $N_B = N_{\max}$  - maximálna osová sila.

Z uvedeného vyplýva, že minimálna osová sila je v najnižšom bode reťazovky a maximálna osová sila je vo vyššom zavesení reťazovky.

#### 5.4.4 Normálové napätie v reťazovke

Priebeh normálového napätia bude úmerný priebehu osových síl:

$$\sigma = \sigma(x) = \frac{N(x)}{S}$$

$$\text{pričom pre } x = -a \text{ je } \sigma(x) = \sigma_A = \frac{N_A}{S}$$

$$x = b \text{ je } \sigma(x) = \sigma_B = \frac{N_B}{S} = \sigma_{\max} \text{ - maximálne napätie}$$

$$x = 0 \text{ je } \sigma(x) = \frac{H}{S} = \sigma_{\min} \text{ - minimálne napätie}$$

Pevnostná podmienka reťazovky má potom tvar

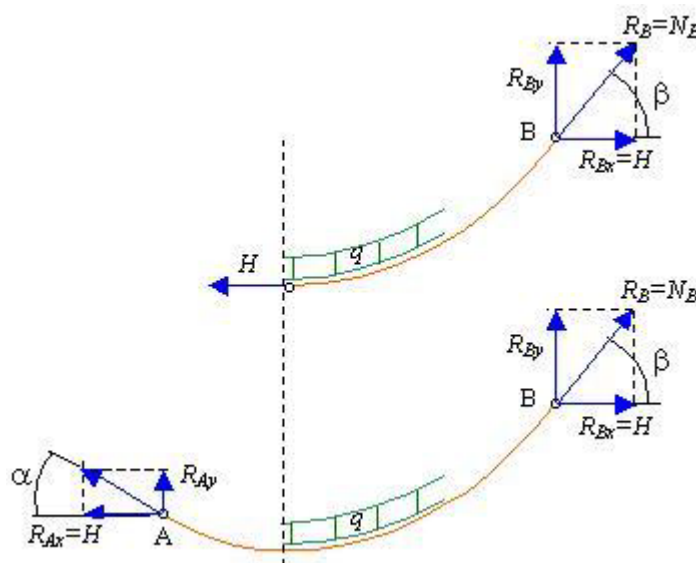
$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

$$\frac{N_B}{S} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

Splnenie tejto podmienky zaručuje dostatočnú pevnosť reťazovky po jej celej dĺžke. Dovoľené napätie je obvykle predpísané normou STN.

#### 5.4.5 Vázbové reakcie

Na obr.5.30 je uvoľnená reťazovka s väzbovými reakciami v bodoch A a B.



Obr.5.30 Vázbové reakcie

Z podmienky rovnováhy do osi  $x$  vyplýva:  $R_{Bx} = R_{Ax} = H$

Keďže väzbová reakcia v bode A musí byť v rovnováhe s osovou silou  $N_A$ , potom  $R_A = N_A$ , resp. v bode B je  $R_B = N_B$

Potom zvislé zložky reakcií sú:

$$R_{Ay} = \sqrt{N_A^2 - H^2}$$

$$R_{By} = \sqrt{N_B^2 - H^2}$$

a ďalej

$$\cos \alpha = \frac{H}{N_A}$$

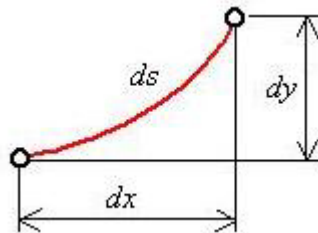
$$\cos \beta = \frac{H}{N_B}$$

čím je daný sklon priehybovej čiary v závesoch A a B.

### 5.4.6 Celkové predĺženie reťazovky

Celkové predĺženie reťazovky bude  $\Delta s = s - s_0$ , kde  $s_0$  je pôvodná (nedeformovaná) dĺžka vlákna, a  $s$  je nová dĺžka vlákna po jeho predĺžení od vlastnej tiaže.

Na obr.5.31 je znázornená elementárna časť deformovaného vlákna.



Obr.5.31 Elementárna časť vlákna

Celková dĺžka zaťaženej reťazovky je

$$s = \int_{(s)} ds = \int_{(s)} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{-a}^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \int_{-a}^b \sqrt{1 + \left(\frac{q}{H} x\right)^2} dx$$

Použijúc zjednodušujúce pravidlo  $(1 + p)^a = 1 + p \cdot a$  na druhý člen pod odmocninou

$$p = y'(x) = \frac{qx}{H} \ll 1 \quad ; \quad n = \frac{1}{2}$$

potom

$$s = \int_{-a}^b \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{H} x\right)^2 \right] dx = \dots = l + \frac{1}{6} \left(\frac{q}{H}\right)^2 (b^3 + a^3)$$

pričom  $l = a + b$ .

Podobne, celkové predĺženie

$$\Delta s = \int_{(s)} \Delta ds = \int_{(s)} \varepsilon ds = \int_{(s)} \frac{\sigma(x)}{E} ds = \int_{(s)} \frac{N(x)}{SE} ds$$

Pretože

$$N(x) = H \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2} dx$$

potom

$$\Delta s = \frac{H}{SE} \int_{-a}^b \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2} dx = \frac{H}{SE} \int_{-a}^b \left[1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2\right] dx = \dots$$

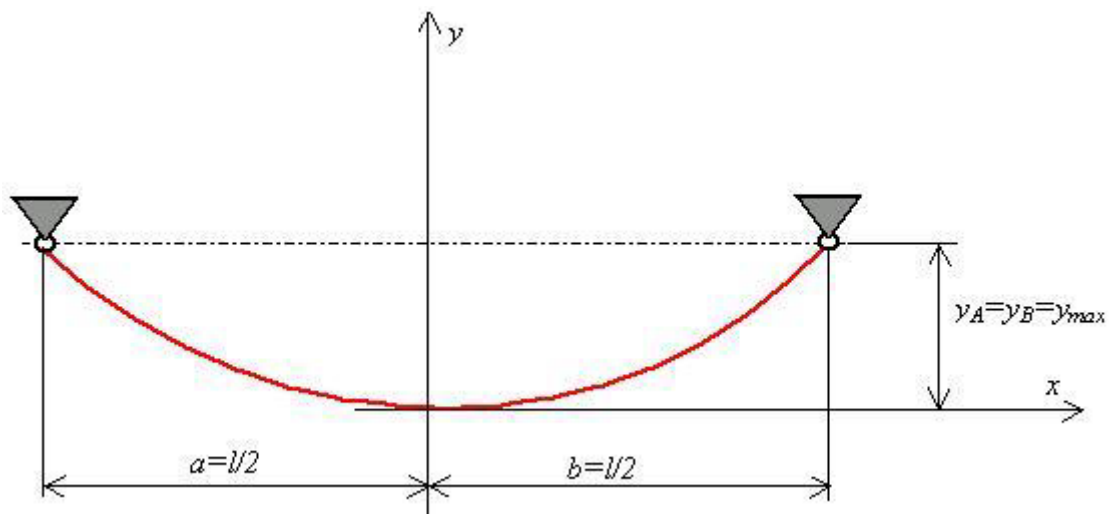
$$\Delta s = \frac{H}{SE} \left[ l + \frac{1}{3} \left(\frac{q}{H}\right)^2 (b^3 + a^3) \right]$$

Pôvodná dĺžka reťazovky je

$$s_0 = s - \Delta s = l + \frac{1}{6} \left(\frac{q}{H}\right)^2 (b^3 + a^3) - \frac{H}{ES} \left[ l + \frac{1}{3} \left(\frac{q}{H}\right)^2 (b^3 + a^3) \right]$$

### 5.4.7 Symetrická reťazovka

Na obr.5.32 je znázornená symetrická reťazovka (bez prevýšenia úchytných bodov, t.j.  $y_B - y_A = 0$ ).



Obr.5.32 Symetrická reťazovka

Táto reťazovka je špeciálnym prípadom reťazovky s prevýšením úchytných bodov. Úpravou predtým odvodených vzťahov dostaneme nasledujúce rovnice symetrickej reťazovky:

a) rovnica priehybovej čiary



$$y(x) = \frac{q}{2H} x^2$$

$$h = 0$$

$$y_B = y_A = \frac{ql^2}{8H} = y_{\max}$$

b) osová sila

$$N(x) = H \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H}\right)^2}$$

$$N_A = N_B = H \sqrt{1 + \left(\frac{ql}{2H}\right)^2} = N_{\max}$$

c) pevnostná podmienka

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{S} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{H}{S}$$

d) deformovaná dĺžka reťazovky

$$s = l + \frac{1}{6} \left(\frac{q}{H}\right)^2 \frac{l^3}{4}$$

e) celkové predĺženie reťazovky

$$\Delta s = \frac{H}{ES} \left[ l - \frac{1}{3} \left(\frac{q}{H}\right)^2 \frac{l^3}{4} \right]$$

f) počiatočná dĺžka reťazovky

$$s_0 = s - \Delta s$$

### Poznámka:

Pre prípad, že sú splnené predpoklady uvedené v úvode k tejto kapitoly, je potrebné použiť presné vzťahy vedúce na rovnicu vlákna typu kosínusu hyperbolického. Tieto vzťahy možno nájsť v práci: Fecko, Š. - Žiaran, J. - Varga, L.: Elektrické siete, Edičné stredisko SVŠT, Bratislava 1990.

### *Riešené príklady reťazovky*

#### Príklad č.1 Symetrická reťazovka

Elektrické lano AlFe 240/39 má rozpätie  $l = 300\text{m}$ . Prierezová plocha vodiča je  $S = 281,6\text{mm}^2$ , menovitá hmotnosť vodiča je  $m = 0,9844\text{ kg/m}$ , čomu odpovedá spojitý zaťaženie  $q = 9,844\text{ N/m}$ . Modul pružnosti lana je  $E = 73861\text{ N/mm}^2$ , zaručená ťahová sila je  $F_p = 76943\text{ N}$  s odpovedajúcou medzou pevnosti  $\sigma_p = F_p/S = 273,23\text{ N/mm}^2$ . Dovoľené namáhanie v ťahu je  $\sigma_{\text{dov}} = 51,79\text{ N/mm}^2$ .

Treba určiť:

- Maximálnu osoú silu od spojitého zaťaženia  $q$ :  $N_{\max} = ?$
- Minimálnu osoú silu  $N_{\min} = H = ?$
- Maximálny priehyb lana  $y_A = y_B = y_{\max} = ?$
- Pôvodnú nedeformovanú dĺžku lana  $s_0$

#### Riešenie

a) Maximálnu osoú silu vypočítame z pevnostnej podmienky:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

$$\frac{N_{\max}}{S} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

$$N_{\max} \leq S \cdot \sigma_{\text{dov}}$$

Po dosadení je hraničná hodnota ťahovej sily  $N_{\max} = 281,6 \cdot 51,79 = 14584,064 \text{ N}$ .  
 b) Minimálnu ťahovú silu  $N_{\min} = H$  vypočítame zo vzťahu

$$N_{\max} = H \sqrt{1 + \left(\frac{ql}{2H}\right)^2}$$

$$H_{1,2} = \sqrt{N_{\max}^2 - \frac{q^2 l^2}{4}}$$

Riešením je sila  $H = 14509,12 \text{ N}$

Z riešenia vyplýva, že ťahová sila sa po dĺžke reťazovky výrazne nemení.

c) Maximálny prieťah reťazovky

$$y_{\max} = y_B = y_A = \frac{ql^2}{8H} = \frac{9,844 \cdot 300^2}{8 \cdot 14509,12} = 7,6327 \text{ m}$$

d) Pôvodná dĺžka lana

$$s_0 = s - \Delta s = l + \frac{l^3}{24} \left(\frac{q}{H}\right)^2 - \frac{H}{ES} \left[ l + \frac{l^3}{12} \left(\frac{q}{H}\right)^2 \right] = 300,3078 \text{ m}$$

pričom deformovaná dĺžka vodiča  $s = 300,5178 \text{ m}$ , a celkové predĺženie  $\Delta s = 0,2099 \text{ m}$ .

## **5.5 PRÍKLADY RIEŠENIA ÚLOH ČISTÉHO ŤAHU - TLAKU**

### **a) Staticky určité úlohy namáhania osovou silou**

Úlohy tohto typu možno uvedenými metódami riešiť takto:

1. Zostavíme matematický a fyzikálny model riešenej úlohy na prút (tyč) zaťažený osovými silami.
2. Podľa počtu nespojitosti prierezu a zaťaženia prúta si zvolíme príslušný počet úsekov a v nich myslené rezy.
3. Do myslených rezov vložíme výslednicu vnútorných síl  $N(x) = \sigma(x) \cdot S(x)$  v kladnom zmysle (von z rezu).
4. Zo statických podmienok rovnováhy odrezanej časti tyče určíme výslednicu vnútorných síl, prípadne napätia  $\sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)}$  v príslušných rezoch.
5. Nakreslíme priebeh osových síl  $N(x)$  a napätia  $\sigma(x)$  po celej dĺžke tyče.
6. Určíme nebezpečný prierez a urobíme pevnostný návrh tyče.
7. Vypočítame celkové predĺženie tyče.

### **Príklad 1**

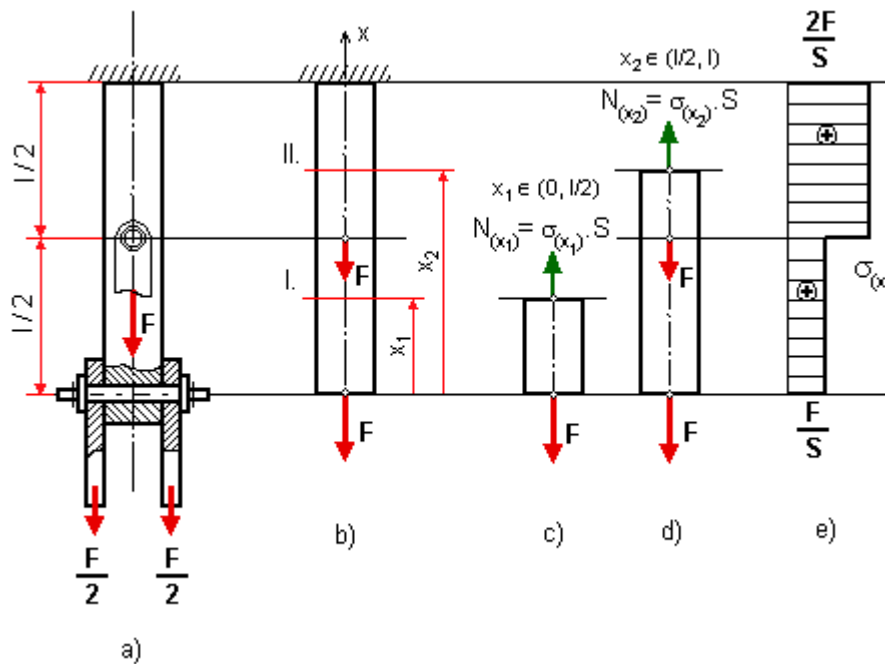
Ťahadlo štvorcového prierezu (obr.5.33a) je namáhané silami  $F$ . Určite prierez prúta a jeho celkové predĺženie, keď je dané :  $F, l, E, \sigma_K, s, \gamma$ .

### Riešenie

Model ťahadla je znázornený na obr.5.33b. V ďalšom výpočte zanedbáme oslabenie prierezu ťahadla dierami pre spojovacie kolíky. Vzhľadom na nespojitosť zaťaženia treba zvoliť dva úseky na tyči (I. a II.) a v nich myslené rezy. Bod 3. uvedeného postupu je zrejmý z obr.5.33c, d. Z podmienky rovnováhy síl do smeru osi  $x$  pre osoú silu v myslených rezoch  $x_1$  a  $x_2$  máme:

$$N(x_1) - F = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma(x_1) = \frac{F}{S}$$

$$N(x_2) - F - F = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma(x_2) = \frac{2F}{S}$$



Obr.5.33 Výpočet napätia

Priebeh napätia po dĺžke tyče je znázornený na obr.5.33e. Tyč je namáhaná čistým ťahom. Nebezpečný prierez sa nachádza v mieste maximálneho napätia

$$\sigma_{\max} = \frac{2F}{S}$$

teoreticky v ľubovoľnom reze z intervalu  $(l/2, l)$ . Pevnostná podmienka je

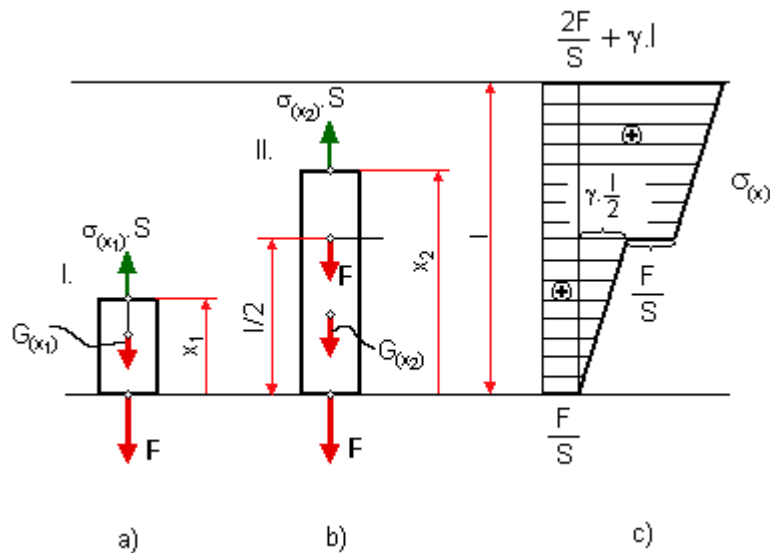
$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{dov}}$$

$$\frac{2F}{S} \leq \frac{\sigma_k}{s} \Rightarrow S \geq \frac{2F \cdot s}{\sigma_k}$$

Celkové predĺženie tyče bude rovné súčtu predĺžení jej dvoch úsekov

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} = \int_0^{l/2} \frac{N(x_1)}{ES} dx_1 + \int_{l/2}^l \frac{N(x_2)}{ES} dx_2 = \frac{3 Fl}{2 SE} = \frac{Fl}{2ES} + \frac{Fl}{ES}$$

Z výsledného vzťahu pre  $\Delta l$  vidieť, že celkové predĺženie je dané tiež súčtom predĺžení od jednotlivých zaťažujúcich síl. Ak uvažíme aj vlastnú tiaž, musíme do ťažísk jednotlivých odrezaných častí vložiť objemovú silu, ktorá je úmerná objemu odrezanej časti tyče (obr. 5.28a, b).



Obr.5.34 Zaťaženie vlastnou tiažou

Pre úsek I. a II. máme:

$$x_1 \in (0, l/2)$$

$$\sigma(x_1) \cdot S - G(x_1) - F = 0$$

$$G(x_1) = V(x_1) \cdot \gamma = S \cdot x_1 \cdot \gamma$$

$$\Rightarrow \sigma(x_1) = \frac{F}{S} + \gamma \cdot x_1$$

$$x_2 \in (l/2, l)$$

$$\sigma(x_2) \cdot S - F - F - G(x_2) = 0$$

$$G(x_2) = V(x_2) \cdot \gamma = S \cdot x_2 \cdot \gamma$$

$$\Rightarrow \sigma(x_2) = \frac{2F}{S} + \gamma \cdot x_2$$

Napätie  $\sigma(x_1)$  a  $\sigma(x_2)$  sú dané súčtom napätia od zaťažujúcich síl  $F$  a vlastnej tiaže  $\gamma$ . Ich priebeh je na obr. 5.33c. Nebezpečný prierez je v mieste votknutia, kde

$$\sigma_{\max} = \frac{2F}{S} + \gamma l \leq \sigma_{\text{doz}}$$

Prierez tyče

$$S \geq \frac{2F}{\sigma_{\text{doz}} - \gamma l}$$

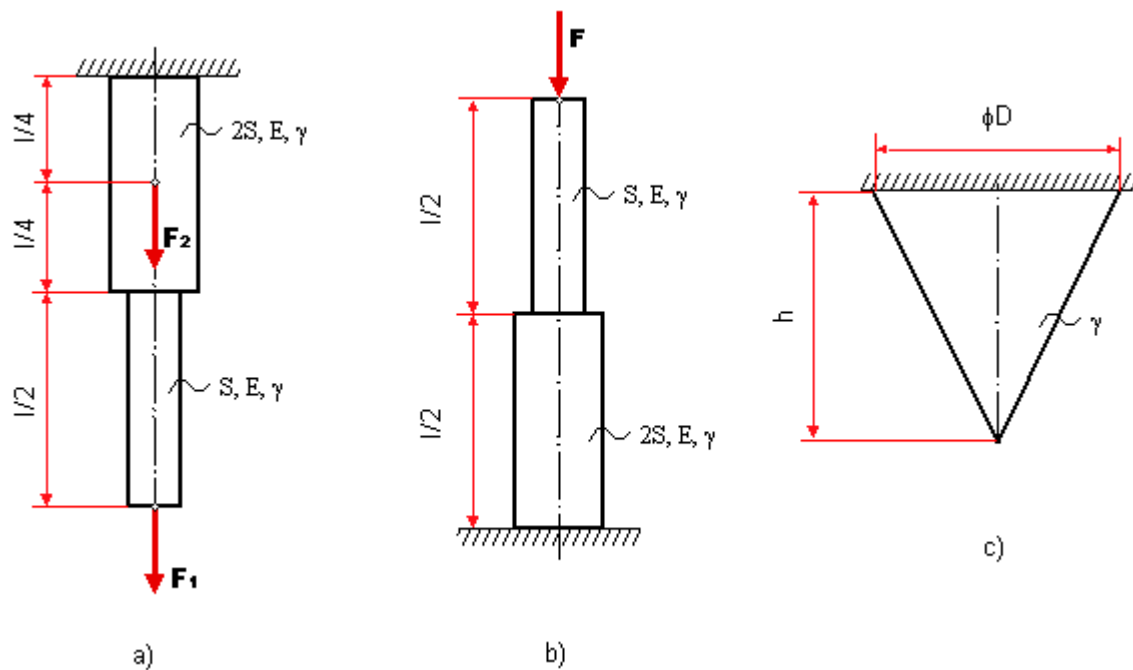
Pre celkové predĺženie tyče platí:

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} = \int_0^{l/2} \frac{N(x_1)}{ES} dx_1 + \int_{l/2}^l \frac{N(x_2)}{ES} dx_2 = \int_0^{l/2} \frac{(F + \gamma \cdot x_1 \cdot S)}{ES} dx_1 + \int_{l/2}^l \frac{(2F + \gamma \cdot x_2)}{ES} dx_2 = \frac{3Fl}{2ES} + \frac{\gamma l^2}{2E}$$

Z priebehu napätia 5.33e a 5.33c vidieť, že využitie únosnosti prierezu je efektívne len v nebezpečnom priereze. Ostatné prierezy sú využité neekonomicky. Preto treba voliť prierez tyče odstupňovaný, prispôbený veľkosti osových síl v jednotlivých úsekoch.

### Príklad 2

Riešte úlohy staticky určitého ťahu (tlaku) podľa obr. 5.35a, b, c. Určite priebeh napätia a celkové predĺženie (skrátene) tyče. Z pevnostnej podmienky určite veľkosť nebezpečného prierezu. Úlohy riešte všeobecne postupom zhodným, aký bol použitý v príklade 1.



Obr.5.35 Príklady úloh

### b) Staticky neurčité úlohy namáhania osovou silou

Ak nemožno osovú silu určiť zo statických podmienok rovnováhy, úloha je staticky neurčitá. V tomto prípade treba rovnice rovnováhy doplniť deformačnými podmienkami.

#### Postup riešenia

1. Úlohu staticky neurčitú nahradíme úlohou staticky určitou, a to tak, že prebytočnú väzbu odstránime a nahradíme ju staticky neurčitými reakciami.
2. Podľa počtu staticky neurčitých reakcií napíšeme príslušný počet deformačných podmienok (napr. celkové predĺženie alebo skrátenie tyče je nulové) a z nich vypočítame staticky neurčité reakcie.
3. V ďalšom postupujeme ako pri úlohách staticky určitých s tým, že vypočítané staticky neurčité reakcie považujeme za ďalšie vonkajšie zaťaženie.

Riešenie takýchto úloh je uvedené v časti internetovej učebnice "Príklady".